

PATHWAY

数学 II

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 怎么从“大小”到“方向”：平面向量与解三角形	1
1.1 平面向量的概念：带箭头的线段	1
1.2 平面向量的运算：把箭头加起来	3
1.3 平面向量基本定理及坐标表示：把向量钉在坐标系上	5
1.4 平面向量的数量积：两个向量乘出一个实数	6
1.5 正弦定理与余弦定理：解三角形的两把钥匙	8
1.6 解三角形的实际应用：测量世界的数学眼睛	11
第二章 数系的“最后一块拼图”：复数	17
2.1 复数的概念： $x^2 = -1$ 逼出来的新数	17
2.2 复数的四则运算：像多项式一样算	20
2.3 复数的几何意义：平面上的点	22
2.4 复数的三角表示：旋转的语言	25
第三章 空间到底长什么样：立体几何初步	31
3.1 基本立体图形：三维世界的“词汇表”	31
3.2 立体图形的直观图与三视图：怎么画得像	34
3.3 空间中点线面的位置关系：空间的“语法”	38
3.4 空间中的平行与垂直：判定与证明	41
第四章 给空间装上坐标：空间向量与立体几何	51
4.1 空间向量及其运算：平面向量的“升维复制”	51
4.2 空间向量基本定理与坐标化：给空间装上“尺子和量角器”	54
4.3 用向量研究位置关系：把判定定理“算法化”	57
4.4 空间角：线线角、线面角、二面角	59
4.5 空间距离：点到面、点到线、异面直线	62

第五章 用方程画世界：直线与圆的方程	71
5.1 直线的倾斜角与斜率：给直线装“指纹”	71
5.2 直线方程的五种形式：身份证的五个版本	73
5.3 两条直线的位置关系：平行、垂直，一个方程看穿	76
5.4 三种距离公式：测量的标尺	79
5.5 圆的方程：对称的代数面孔	81
5.6 直线与圆的位置关系：相离、相切还是相交	83
5.7 圆与圆的位置关系：两个圆，五种姿势	87
第六章 怎么用“和、差、等”画尽天下曲线：圆锥曲线的方程	95
6.1 椭圆：一根绳与两颗图钉画出的曲线	95
6.2 双曲线：差值恒定的“两支”曲线	99
6.3 抛物线：等距的轨迹	102
6.4 直线与圆锥曲线：联立，算到底	106
第七章 卷末综合检测	117

第一章 怎么从“大小”到“方向”：平面向量与解三角形

章首情境

1.1 平面向量的概念：带箭头的线段

1.1.1 向量的概念与表示：给“方向”一张身份证

学习目标

- 理解向量的概念，能区分向量与标量；
- 掌握向量的几何表示与符号表示；
- 理解零向量、单位向量、相等向量，知道零向量方向任意。

前置复习 (Be Prepared)

- “从一点到另一点的移动”叫什么？它和“路程”有什么区别？
- 力的三要素是什么？

向量的概念：既有大小又有方向的量叫做**向量** (vector)。只有大小、没有方向的量叫做**标量** (scalar)。位移、速度、力、加速度 $\rightarrow$ 向量；路程、速率、时间、质量、温度 $\rightarrow$ 标量。

向量的表示

- **几何表示：**用带箭头的线段（**有向线段**）表示，起点 A 、终点 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ ；
- **字母表示：**记作 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 。

向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小叫做向量的**模**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$ 。

两个特殊向量：**零向量**（模为 0，方向任意）记作 $\vec{0}$ ；**单位向量**（模为 1），与 $\vec{a}$ 同向的单位向量记作 $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ($|\vec{a}| \neq 0$)。

相等向量：长度相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a} = \vec{b}$ 。向量可以**自由平移**——起点在哪不重要，重要的是大小和方向。

例题 1.1

(区分向量与标量)

下列各组量中，哪些是向量？哪些是标量？

(1) 温度 25°C 与“向东 2 km”；(2) 速度 60 km/h 与速率 60 km/h；(3) $|\vec{a}| = 5$ 与 $\vec{a}$ 本身。

解：(1) 温度只有高低，是**标量**；“向东 2 km”带方向，是**向量**。(2) 速度有方向，是**向量**；速率只描述快慢，是**标量**。(3) $|\vec{a}| = 5$ 是数（模），可与别的数比大小； $\vec{a}$ 是向量，**向量之间不能直接比较大小**，只能说 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 这样比较模。■

Try It 1.1：判断正误：(1) 向量就是有向线段；(2) 两个向量的模相等，这两个向量一定相等；(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 能推出 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ 。

Q&A

- **问**：为什么“向量能比较大小”是错的，但“模能比较大小”是对的？

答：向量还带着方向信息，方向之间没有“谁大谁小”。只有把方向丢掉、只看长度（模），才能比大小。

1.1.2 相等向量与平行（共线）向量：同路人才算一家人

学习目标

- 理解相等向量、相反向量的概念；
- 理解平行（共线）向量，会判断共线关系；
- 会用“零向量与任何向量平行”处理问题。

前置复习： $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 的长度、方向各有什么关系？

平行（共线）向量：方向**相同或相反**的向量叫做**平行向量**，也叫**共线向量**。平行向量可以平移到同一条直线上，所以“平行”与“共线”在向量里是**同一个概念**。记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ；规定：**零向量与任何向量都平行**。

相反向量：与 $\vec{a}$ 长度相等、方向相反的向量叫 $\vec{a}$ 的**相反向量**，记作 $-\vec{a}$ 。 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ， $\vec{AB} = -\vec{BA}$ 。

例题 1.2

(相等、相反、共线辨析，含零向量)

在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线交于点 O 。判断下列各组向量是否相等？是否共线？

(1) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$; (2) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$; (3) $\vec{0}$ 与 $\overrightarrow{BC}$; (4) $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 。

解: (1) 对边平行且相等, 方向相同 $\rightarrow$ **相等**, 当然共线。(2) 方向**相反**、长度相等 $\rightarrow$ 不相等, 但互为相反向量、**共线**。(3) 零向量与任何向量平行 $\rightarrow \vec{0}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ **共线**, 但长度不等, 不相等。(4) O 是对角线中点, 同向等长 $\rightarrow$ **相等**。■

Try It 1.2: 在正六边形 $ABCDEF$ 中, 写出与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量、与 $\overrightarrow{AB}$ 共线但不相等的向量 (各写一个)。

本节练习 (答案见章末)

- 下列哪些是向量: 温度、位移、时间、速度、质量、力?
- $\vec{a} = \vec{b}$ 与 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 是一回事吗? 为什么?
- 已知 $\vec{a}$ 是单位向量, $\vec{b}$ 的模为 3。比较 $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 的大小。

1.2 平面向量的运算: 把箭头加起来

1.2.1 向量的加减法: 首尾相接与共起点连线

学习目标

- 掌握向量加法的三角形法则与平行四边形法则;
- 掌握向量减法的作图法则;
- 理解向量加法的运算律, 能化简含向量的式子。

前置复习: 向量 $\vec{a}$ 与 $-\vec{a}$ 的关系是什么?

向量的加法: 求两个向量和的运算。两种法则:

- **三角形法则:** 把 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ **首尾相接**, 则从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量就是 $\vec{a} + \vec{b}$ 。口诀: **首尾相接, 起点到终点**。
- **平行四边形法则:** 把 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ **共起点**, 以它们为邻边作平行四边形, 从起点出发的对角线向量就是 $\vec{a} + \vec{b}$ 。

特别地: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。运算律: 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ 、结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ 。

向量的减法: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ 。作图法则 (**共起点连终点**): 把 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 移到共起点, 则 $\vec{a} - \vec{b}$ 为从 $\vec{b}$ 的终点指向 $\vec{a}$ 的终点的向量。口诀: **共起点, 连终点, 指向被减**。

例题 1.3

(向量的加减法化简)

化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; (2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; (3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

解：(1) 首尾相接顺次连： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ 。(2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ 。(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, 故原式 $= \overrightarrow{AC}$ 。■

Try It 1.3: 化简： $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ 。

1.2.2 向量的数乘与共线定理：伸缩与同路人的判定

学习目标

- 理解向量数乘的定义与几何意义；
- 掌握数乘的运算律；
- 理解向量共线定理，会用共线定理判定共线或求参数。

前置复习： $2\vec{a}$ 表示“两个 $\vec{a}$ 相加”，它的方向、长度如何变化？

向量的数乘：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量 $\lambda\vec{a}$, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; $\lambda > 0$ 时与 $\vec{a}$ 同向, $\lambda < 0$ 时反向, $\lambda = 0$ 时 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ 。

数乘的运算律： $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$; $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 。

向量共线定理：向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是：存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 。

例题 1.4

(共线定理求参数)

已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 。若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 求 λ 的值。

解：因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 存在实数 k , 使 $\vec{b} = k\vec{a}$:

$$3\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 = k(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = k\vec{e}_1 + 2k\vec{e}_2$$

因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 对应的系数必须分别相等: $k = 3, 2k = \lambda \implies \lambda = 6$ 。■

Try It 1.4: 已知 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线, $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向。用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{b}$ 。

本节练习 (答案见章末)

- 化简： $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b})$ 。
- 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 且 $\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda(2\vec{a} - \vec{b})$, 求 λ 。
- 判断： $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线是不是一回事? 为什么?

1.3 平面向量基本定理及坐标表示：把向量钉在坐标系上

1.3.1 平面向量基本定理：两个不共线向量撑起整个平面

学习目标

- 理解平面向量基本定理的内容与意义；
- 会用基底表示给定向量；
- 知道“任一向量可由基底唯一表示”。

前置复习：坐标系里点 $(3, 2)$ 是怎么读出来的？

平面向量基本定理：如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个**不共线**向量，那么对这一平面内的**任意**向量 $\vec{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 ，使

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

我们把不共线的 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一个**基底** (base)。

例题 1.5

(用基底表示向量)

在 $\triangle ABC$ 中， M 是 BC 的中点， D 是 AC 上一点且 $AD = \frac{1}{3}AC$ 。用基底 $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 。

解：(1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ 。(2) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \vec{e}_1$ 。■

Try It 1.5：上题中，若 N 是 AB 中点，用基底表示 $\overrightarrow{MN}$ 。

1.3.2 平面向量的坐标表示：让箭头变成数对

学习目标

- 理解向量的坐标表示 $\vec{a} = (x, y)$ ；
- 掌握向量坐标运算： $\vec{a} \pm \vec{b}$ 、 $\lambda\vec{a}$ ；
- 掌握用坐标求 $\overrightarrow{AB}$ 、中点坐标、向量模。

前置复习：点 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$ ，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的“横坐标、纵坐标”各是多少？

平面向量的坐标：取单位正交基底 $\vec{i} = (1, 0)$ 、 $\vec{j} = (0, 1)$ ，若 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ，则记作 $\vec{a} = (x, y)$ 。 x 叫**横坐标**， y 叫**纵坐标**。

坐标运算：设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$ ；

- $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$;
- 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (终点减起点);
- 中点 M 坐标: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$;
- 模: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

例题 1.6

(坐标运算)

已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ 。

(1) 求 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$; (2) 求 $|\vec{a}|$; (3) 已知 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 6)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与 $|AB|$ 。

解: (1) $\vec{a} + \vec{b} = (1, 4)$; $\vec{a} - \vec{b} = (3, -2)$; $2\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 2) - (-3, 9) = (7, -7)$ 。(2) $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ 。(3) $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$; $|AB| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ 。■

Try It 1.6: 已知 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, 4)$ 。(1) 求 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $3\vec{a} - \vec{b}$; (2) 求 $\vec{a}$ 的模。

本节练习 (答案见章末)

- 已知 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3)$ 。求 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 、 $|\vec{a}|$ 。
- 已知 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与中点坐标。
- 用基底 $\vec{e}_1 = (1, 0)$ 、 $\vec{e}_2 = (0, 1)$ 表示 $\vec{a} = (3, -2)$, 并求 $|\vec{a}|$ 。

1.4 平面向量的数量积: 两个向量乘出一个实数

1.4.1 数量积的定义与投影: 力做功背后的数学

学习目标

- 理解数量积的定义 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$;
- 理解投影的概念, 知道投影可以是负数;
- 会根据夹角判断数量积的符号。

前置复习: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$ 。两个向量的夹角 θ 的取值范围是什么?

向量的夹角: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 把起点放到一起, 所成的角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 叫做两个向量的夹角。 $\theta = 90^\circ$ 时, 称 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

数量积的定义：已知两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，夹角为 θ ，数量 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**（内积），记作

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

规定：零向量与任何向量的数量积为 0。

数量积的符号（关键）： θ 锐角 $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ； $\theta = 90^\circ \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ （垂直）； θ 钝角 $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ； $\theta = 0^\circ$ （同向） $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ； $\theta = 180^\circ$ （反向） $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 。

投影： $|\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的**投影**。它是个**实数**（可为正、负、零），不是长度：锐角投影为正，钝角投影为**负**（落在 $\vec{a}$ 的反向延长线上），直角投影为零。于是 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times (\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 方向上的投影})$ 。

例题 1.7

（数量积与投影）

已知 $|\vec{a}| = 4$ ， $|\vec{b}| = 3$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta = 60^\circ$ 。

（1）求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ；（2）求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影；（3）若把夹角改为 120° ， $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 与投影各是多少？

解：（1） $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$ 。（2）投影 $= 3 \times \frac{1}{2} = 1.5$ （正）。（3） $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$ ；投影 $= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.5$ （**负数**！投影是实数，可为负，不能说“投影是长度”）。■

Try It 1.7：已知 $|\vec{a}| = 5$ ， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 -2 ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。

1.4.2 数量积的坐标表示与运算律：换成坐标直接算

学习目标

- 掌握数量积的坐标公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ ；
- 会用坐标求夹角、模、判定垂直；
- 知道数量积的运算律及其“不成立”的项（消去律、结合律）。

前置复习： $\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 4)$ ，用定义直接算麻烦在哪里？

数量积的坐标表示：设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

重要推论

- **模**： $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ （因为 $\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1^2 + y_1^2$ ）；
- **夹角**： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ ；

- 垂直: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
- 共线: $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 。

数量积的运算律: 交换律、分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 、 $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ 都成立。但要注意两条不成立的“假律”: 没有消去律 ($\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 推不出 $\vec{b} = \vec{c}$); 没有结合律 ($(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$)。

例题 1.8

(坐标式求夹角与垂直)

已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ 。

(1) 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦值; (3) 是否存在实数 t , 使 $\vec{a} + t\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直?

解: (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = 1$ 。(2) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ 。(3) $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 即 $1 + 10t = 0$, $t = -\frac{1}{10}$ 。■

Try It 1.8: 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 4)$ 。(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$ (2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直吗? 共线吗?

本节练习 (答案见章末)

- 判断正误: (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 则夹角一定是锐角; (2) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$; (3) 投影一定是非负数。
- 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, 夹角 120° , 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影。
- 已知 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (2, k)$ 。(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 k ; (2) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求 k 。

1.5 正弦定理与余弦定理: 解三角形的两把钥匙

1.5.1 正弦定理: 边与对角的正弦成正比

学习目标

- 理解正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$;
- 会用正弦定理解决“两角一边”求边、求角;
- 知道正弦定理与外接圆半径的关系: 比值为 $2R$ 。

前置复习: $\sin 30^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 各等于多少?

正弦定理: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 外接圆半径为 R , 则

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

证明思路：作 $\triangle ABC$ 的外接圆，过 B 作直径 BD ，则 $\angle BCD = 90^\circ$ ，且 $\angle D = \angle A$ （同弧所对圆周角相等），于是 $a = BC = BD \sin A = 2R \sin A$ 。■

How To：用正弦定理解三角形

- 给了两角一边（如 A 、 B 、 a ） $\rightarrow$ 先用内角和求第三个角，再用正弦定理求未知边；
- 求角时用 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ，再结合“大边对大角”判断取锐角还是钝角；
- 注意 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ （边的比等于对角正弦的比）。

例题 1.9

（正弦定理求边与外接圆半径）

在 $\triangle ABC$ 中， $A = 45^\circ$ ， $B = 60^\circ$ ， $a = 2$ 。

（1）求边 b ；（2）求外接圆半径 R 。

解：（1） $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ 。（2） $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 。■

Try It 1.9：在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ， $b = 2$ 。求 a 。

1.5.2 余弦定理：勾股定理的推广

学习目标

- 理解余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ；
- 会用余弦定理求边、求角；
- 会用余弦定理判断三角形形状。

前置复习：直角三角形中，勾股定理怎么表述？ $\cos 90^\circ = ?$

余弦定理：三角形中任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

求角形式（变形）： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ， $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ， $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 。

How To：判定三角形形状（用最大边）

- 找出**最大边** c （对最大角 C ）；
- 比较 c^2 与 $a^2 + b^2$ ：相等 $\rightarrow$ 直角； $c^2 < a^2 + b^2 \rightarrow$ 锐角； $c^2 > a^2 + b^2 \rightarrow$ 钝角。

例题 1.10

(余弦定理求边)

在 $\triangle ABC$ 中, $b = 3$, $c = 4$, $A = 60^\circ$. 求边 a 。

解: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13$, 故 $a = \sqrt{13}$. ■

Try It 1.10: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $c = 6$, $B = 120^\circ$. 求边 b 。

1.5.3 综合应用: SSA 的两解陷阱与面积公式**学习目标**

- 会判断 SSA 情形下三角形解的情况 (两解、一解、无解);
- 掌握“大边对大角”在取舍中的作用;
- 掌握面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ 。

前置复习: $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ——一个正弦值对应几个角?

How To: 处理 SSA (已知 a 、 b 、 A 求 B)

- 由正弦定理算 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$;
- 若 $\sin B > 1 \rightarrow$ 无解; 若 $\sin B = 1 \rightarrow B = 90^\circ$, 一解;
- 若 $0 < \sin B < 1 \rightarrow$ 可能两解: B_1 (锐角)、 $B_2 = 180^\circ - B_1$ (钝角)。**用内角和检查:** 若 $A + B_2 < 180^\circ$, 两解都成立; 否则只取锐角一解。
- 快速判断口诀: $a \geq b$ 时一解, $a < b$ 时要查。

面积公式: $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$ 。

例题 1.11

(SSA 两解讨论与面积)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $b = 6$, $A = 30^\circ$. 求角 B (保留到 0.1°), 并判断解的情况。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $b = 5$, $C = 60^\circ$, 求面积 S 。

解: (1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{5} = 0.6$. $B_1 = \arcsin 0.6 \approx 36.9^\circ$, $B_2 = 180^\circ - 36.9^\circ = 143.1^\circ$.
 检验内角和: B_1 时 $C_1 = 113.1^\circ > 0$ 成立; B_2 时 $C_2 = 6.9^\circ > 0$ **也成立**。所以 $B \approx 36.9^\circ$ 或 143.1° , **两解**。($a = 5 < b = 6$, 钝角 B 不违背“大边对大角”, 两解都保留。) ■ (2) $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ 。

Try It 1.11: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 6$, $b = 5$, $A = 30^\circ$. $\sin B = \frac{5}{12}$, B 有几解?

本节练习 (答案见章末)

- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$, $a = 6$ 。求边 b 。
- 在 $\triangle ABC$ 中, $b = 4$, $c = 5$, $A = 60^\circ$ 。求边 a 与面积 S 。
- 判断: 三边 $a = 3$ 、 $b = 4$ 、 $c = 6$ 的三角形是什么形状?
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $b = 5$, $A = 30^\circ$, 判断解的情况并求出所有可能的 B 。

1.6 解三角形的实际应用：测量世界的数学眼睛

1.6.1 测量问题：隔河测宽、测高、测距

学习目标

- 会把测量问题转化为解三角形模型；
- 理解仰角、俯角、方位角、方向角的概念；
- 能用正弦定理、余弦定理解决测距、测高问题。

前置复习：在直角三角形中, $\tan \theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$ 。正弦定理、余弦定理分别适合什么情形?

关键概念：角度语言

- **仰角 / 俯角：**视线与水平线所成的角，视线在水平线上方叫**仰角**，下方叫**俯角**；
- **方位角：**从正北方向**顺时针**转到目标方向线的水平角，范围 $0^\circ \sim 360^\circ$ ；
- **方向角：**目标方向线与正北或正南方向的夹角（锐角），如“北偏东 30° ”。

How To：解实际测量问题

- **先画示意图**，把已知长度、已知角标在图里（最容易省、也最容易错的一步）；
- 找出可解的三角形；
- 选定理：两角一边 $\rightarrow$ 正弦；夹角求边 $\rightarrow$ 余弦；
- 单位统一，答案带单位与“约等于”。

例题 1.12

（隔河测宽与方向角）

测量队在岸边 A 处，测得对岸目标 B 在正北方向。沿河岸向东走 50 m 到 C 处，测得 $\angle ACB = 60^\circ$ 。

(1) 求河宽 AB ; (2) 若从 C 看 B , 方向角如何描述? 方位角又是多少?

解: (1) **先画图:** $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AC = 50$. $\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 50 \tan 60^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86.6$ m. ■ (2) 从 C 看 B : BC 与正西方向夹角 60° , 即 B 在 C 的北偏西 30° ($90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$). 方位角从正北顺时针量: $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

Try It 1.12: 小明在楼底 A 处测得楼顶仰角 30° , 向楼走近 20 m 到 B 处测得仰角 60° , 求楼高 (精确到 0.1 m). (提示: 设楼底到 B 的水平距离为 x , 用两次 $\tan$ 列方程)

本节练习 (答案见章末)

- 方向角“南偏东 30° ”对应的方位角是多少? 方位角 225° 对应的方向角如何描述?
- 塔底 A 处测得塔顶仰角 45° , 走近 20 m 到 B 处测得仰角 60° , 求塔高 (精确到 0.1 m).
- 一艘船向正东航行, 10 时测得灯塔在正北方向; 10 时 30 分测得灯塔在北偏东 30° . 已知船速 20 km/h, 求此时船到灯塔的距离.

本章回顾

概念地图

· 向量: 既有大小又有方向的量 (记作 $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$); 模 $|\vec{a}|$: 大小; 零向量 $\vec{0}$ (方向任意)、单位向量、相等向量 (同向等长)、相反向量 (等长反向) · 平行 (共线) 向量: 方向相同或相反; $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq \vec{0} \iff$ 存在唯一 λ , $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ · 加法: 三角形法则 (首尾相接)、平行四边形法则 (共起点); $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; 减法: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, 共起点连终点、指向被减 · 数乘: $\lambda\vec{a}$, $\lambda > 0$ 同向、 $\lambda < 0$ 反向、 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ · 基本定理: 不共线 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 唯一表示 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ (基底) · 坐标: $\vec{a} = (x, y)$; $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$; $\overrightarrow{AB}$ 终点减起点; 中点坐标; $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ · 数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$; 结果为实数; 投影 $|\vec{b}|\cos\theta$ 可正可负; 垂直 $\iff$ 点积 = 0 · 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (两角一边求边、边角互化) · 余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (两边一夹角求边、三边求角、判形状看最大边) · 面积: $S = \frac{1}{2}ab\sin C$; 实际应用: 仰角/俯角、方位角 (北起顺时针)、方向角 (偏角); 先画图再选定理

关键公式速查

内容	公式
向量加减坐标	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$
向量模	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$
中点坐标	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
共线判定 (坐标)	$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$
数量积 (定义/坐标)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$
垂直判定	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
夹角余弦	$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
正弦定理	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
余弦定理	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
面积	$S = \frac{1}{2}ab\sin C$

分层练习

A 基础层

- 判断下列量哪些是向量：温度、位移、速度、路程、力、时间。
- 化简： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ 。
- 已知 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3)$, 求 $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$ 。
- 已知 $A(1, 2)$, $B(4, 6)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与中点坐标。
- 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, 夹角 60° , 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$, $a = 2$, 求 b 。

B 应用层

- 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, k)$ 。若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 k ; 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求 k 。
- 在 $\triangle ABC$ 中, $b = 5$, $c = 7$, $A = 60^\circ$, 求边 a 与面积 S 。
- 在 $\triangle ABC$ 中, 三边 $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, 判断三角形形状, 并求最大角的余弦值。

C 拓展层

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 4$, $b = 5$, $A = 30^\circ$, 求角 B 并判断解的个数。
- 用向量方法证明：平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 1.1: (1) 错——向量是抽象概念, 有向线段是它的几何表示, 只能说“向量可用有向线段表示”; (2) 错——模相等只说明大小相等, 方向可能不同; (3) 错——如 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, 模相等但既不等也不是相反向量。
- 1.2: 相等: $\overrightarrow{DE}$ (正六边形中与 AB 同向等长); 共线不相等: $\overrightarrow{BA}$ (反向等长, 是相反向量)。
- 1.3: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ 。
- 1.4: $\vec{b} = -2\vec{a}$ (反向, 系数为负)。
- 1.5: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{e}_1$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) = -\frac{1}{2}\vec{e}_2$ 。

- 1.6: (1) $\vec{a} + 2\vec{b} = (7, 6)$; $3\vec{a} - \vec{b} = (0, -10)$; (2) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ 。
- 1.7: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times (-2) = -10$ 。
- 1.8: (1) $1 \times (-2) + 2 \times 4 = 6 \neq 0$, 不垂直; (2) $1 \times 4 - 2 \times (-2) = 8 \neq 0$, 不共线。
- 1.9: $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$, $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$ 。
- 1.10: $b^2 = 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 91$, $b = \sqrt{91}$ 。
- 1.11: $a = 6 > b = 5$, B 必为锐角, 只有一解。(验算: $B_2 \approx 155.4^\circ$, $A + B_2 \approx 185.4^\circ > 180$, 舍去)
- 1.12: 设楼底到 B 的水平距离为 x 。 $h = \sqrt{3}x$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 20)$, 联立 $3x = x + 20$, $x = 10$, $h = 10\sqrt{3} \approx 17.3 \text{ m}$ 。

各节练习答案

- 1.1 节: 1. 位移、速度、力是向量; 温度、时间、质量、路程是标量。2. 不是一回事—— $\vec{a} = \vec{b}$ 要求大小、方向都相同; $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 只要求大小相同。3. $|\vec{a}| = 1 < 3 = |\vec{b}|$ 。
- 1.2 节: 1. $\vec{a} + 8\vec{b}$ 。2. 由系数唯一性: $2\lambda = 1$ 且 $-\lambda = 2$, 矛盾 $\rightarrow$ 无解 (两向量一定不共线)。3. 是一回事——向量可自由平移, 平行向量平移到同一直线上即共线。
- 1.3 节: 1. $\vec{a} + \vec{b} = (3, 2)$; $\vec{a} - \vec{b} = (1, -4)$; $2\vec{a} - 3\vec{b} = (1, -11)$; $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ 。2. $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$; 中点 $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ 。3. $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$ 。
- 1.4 节: 1. (1) 错——同向 (夹角 0°) 时也为正; (2) 错——没有结合律; (3) 错——钝角时投影为负。2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$; 投影 $= -2$ 。3. (1) $k = 1$; (2) $k = -4$ 。
- 1.5 节: 1. $b = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$ 。2. $a^2 = 21$, $a = \sqrt{21}$; $S = 5\sqrt{3}$ 。3. 最大边 $c = 6$, $c^2 = 36 > 25 \rightarrow$ 钝角三角形。4. $\sin B = \frac{5}{8}$, $B_1 \approx 38.7^\circ$, $B_2 \approx 141.3^\circ$, $A + B_2 = 171.3^\circ < 180 \rightarrow$ 两解。
- 1.6 节: 1. 南偏东 $30^\circ \rightarrow$ 方位角 150° ; 方位角 $225^\circ \rightarrow$ 南偏西 45° 。2. $h = x + 20$, $h = \sqrt{3}x$, $x = 10(\sqrt{3} + 1) \approx 27.3$, $h \approx 47.3 \text{ m}$ 。3. 船行 10 km , $\triangle$ 中 $\tan 60^\circ = \frac{AT}{AB}$, $AT = 10\sqrt{3}$, $BT = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 20 \text{ km}$ 。

分层练习答案

A1: 位移、速度、力是向量; 温度、路程、时间是标量。

A2: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ 。

A3: $\vec{a} + \vec{b} = (3, 2); 2\vec{a} - \vec{b} = (3, -5); |\vec{a}| = \sqrt{5}.$

A4: $\overrightarrow{AB} = (3, 4);$ 中点 $\left(\frac{5}{2}, 4\right).$

A5: $2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3.$

A6: $b = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$

B7: 垂直 $k = -\frac{3}{2};$ 平行 $k = 6.$

B8: $a^2 = 25 + 49 - 35 = 39, a = \sqrt{39}; S = \frac{35\sqrt{3}}{4}.$

B9: 最大边 $c = 7, 49 < 61 \rightarrow$ 锐角三角形; $\cos C = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}.$

C10: $\sin B = \frac{5}{8}, B_1 \approx 38.7^\circ, B_2 \approx 141.3^\circ, A + B_2 < 180^\circ \rightarrow$ 两解。

C11: 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2. \blacksquare$

第二章 数系的“最后一块拼图”：复数

章首情境

2.1 复数的概念： $x^2 = -1$ 逼出来的新数

2.1.1 虚数单位与复数的概念：给负数开平方

学习目标

- 理解虚数单位 i ，知道 $i^2 = -1$ ；
- 理解复数的概念，会求复数的实部与虚部；
- 会对复数分类（实数、虚数、纯虚数），知道纯虚数的条件。

前置复习 (Be Prepared)

- 方程 $x^2 = 4$ 的解是什么？ $x^2 = 0$ 呢？
- 一个数的平方能否为负？为什么实数做不到？
- 实数集 $\mathbb{R}$ 包含哪些数？

虚数单位

我们把平方等于 -1 的新数叫做**虚数单位**，记作 i ：

$$i^2 = -1$$

于是 i 可以参与运算，且 i 的更高次幂可由此化简： $i^1 = i$ ， $i^2 = -1$ ， $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ， $i^4 = (i^2)^2 = 1$ 。

复数的概念

形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数叫做**复数** (complex number)，记作 $z = a + bi$ 。其中：

- a 叫做复数 z 的**实部**，记作 $\operatorname{Re} z$ ；

- b 叫做复数 z 的**虚部**，记作 $\text{Im } z$ 。

复数的分类

- 当 $b = 0$ 时， $z = a$ ，是**实数**；
- 当 $b \neq 0$ 时， z 是**虚数**；
- 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时， $z = bi$ 是**纯虚数**。

$$z = a + bi \begin{cases} b = 0: & \text{实数} \\ b \neq 0: & \text{虚数} \begin{cases} a = 0: & \text{纯虚数} \\ a \neq 0: & \text{非纯虚数} \end{cases} \end{cases}$$

例题 2.1

(复数分类与实部虚部) 【对抗 M1、M2】

指出下列复数的实部与虚部，并说明它们属于哪一类：

- (1) $z = 3 + 2i$ ；(2) $z = -5i$ ；(3) $z = 4$ ；(4) 比较 $z_1 = 1 + 2i$ 与 $z_2 = 2 + i$ 的大小。

解：(1) 实部 3，虚部 2 (注意是 2，不是 $2i$) —— $b \neq 0$ 且 $a \neq 0$ ，是**虚数** (非纯虚数)。(2) $z = 0 + (-5)i$ ，实部 0，虚部 -5 —— $a = 0$ 且 $b \neq 0$ ，是**纯虚数**。(3) $z = 4 + 0i$ ，实部 4，虚部 0 —— 是**实数** (所有实数都是复数)。(4) **复数不能比较大小** —— $1 + 2i$ 与 $2 + i$ 谁大谁小没有意义，因为复数不是数轴上的点，而是平面上的点。能比较的只有模 (2.3 节学)。■

Try It 2.1: 指出 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的实部、虚部，并判断它是虚数还是纯虚数。

Q&A

- **问：** i 是“不存在”的数吗？

答：不是。 i 是**规定出来**的新数，就像分数、负数当年也是“规定”出来的。数学上“存在”指“逻辑上自洽、可运算”， i 完全满足。

- **问：**实部、虚部可以是无理数吗？

答：可以。实部、虚部都只需是实数， $\sqrt{2}$ 、 π 都行，如 $z = \sqrt{2} + \pi i$ 。

想一想： i^5 、 i^6 分别等于多少？(提示： $i^4 = 1$ ，每 4 次循环一次， $i^{4k+r} = i^r$)

2.1.2 复数相等与共轭复数：实部对实部、虚部对虚部

学习目标

- 掌握复数相等的充要条件；

- 理解共轭复数的概念；
- 会求共轭复数。

前置复习： $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 能相等吗？两数相等需要满足什么？

复数相等

如果两个复数 $a + bi$ 与 $c + di$ 的实部与虚部分别相等，那么这两个复数**相等**：

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ 且 } b = d$$

共轭复数

当两个复数的实部相等、虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**。复数 $z = a + bi$ 的共轭复数记作 $\bar{z}$ ：

$$\bar{z} = a - bi$$

例题 2.2

(复数相等求参数) 【对抗 M8】

已知 $(a + b) + (a - b)i = 6 + 2i$ ，求实数 a 、 b 的值。

解：由复数相等：实部相等且虚部相等，

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

两式相加得 $2a = 8$ ， $a = 4$ ；代入得 $b = 2$ 。检验： $(4 + 2) + (4 - 2)i = 6 + 2i$ ✓。■

Try It 2.2：已知 $(x - 1) + (y + 3)i = 2 + 0i$ ，求 x 、 y 。

Q&A

- **问：** $z = \bar{z}$ 说明什么？

答：说明虚部为 0，即 z 是**实数**。这是“判断一个复数是不是实数”的常用招。

- **问：** $z = -\bar{z}$ 说明什么？

答：说明实部为 0，即 z 是**纯虚数**（或 0）。

想一想： $z = 3 + 4i$ 的共轭是什么？ z 与 $\bar{z}$ 的实部、虚部各有什么关系？

本节练习（答案见章末）

- 求 i^{11} 的值。
- 已知 $z = (m - 1) + (m + 1)i$ ，当 m 取何值时 z 是实数？纯虚数？
- 已知 $(2x + y) + (x - 2y)i = 5 - 3i$ ，求 x 、 y 。

2.2 复数的四则运算：像多项式一样算

2.2.1 复数的加减法：对应部分相加减

学习目标

- 掌握复数的加减法运算法则；
- 理解复数加减法的运算律；
- 能化简含 i 的加减式子。

前置复习：多项式 $(2 + 3x) + (4 - 5x)$ 怎么合并？类比到 i 呢？

复数加减法

设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 则

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

运算律：加法满足交换律、结合律。

例题 2.3

(复数加减法)

计算：(1) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$ ；(2) $(3 - 2i) - (1 + 4i)$ 。

解：(1) 实部相加 $2 + 4 = 6$ ，虚部相加 $3 + (-5) = -2$ ，故原式 $= 6 - 2i$ 。(2) 实部相减 $3 - 1 = 2$ ，虚部相减 $-2 - 4 = -6$ ，故原式 $= 2 - 6i$ 。检验： $(6 - 2i) + (1 + 4i) = 7 + 2i$ ，而 $(3 - 2i) + (4 + 4i) = 7 + 2i$ ✓ (说明 $(3 - 2i) - (1 + 4i) = 2 - 6i$ 正确)。■

Try It 2.3：计算： $(5 - 3i) + (2 + i)$ 与 $(1 + i) - (1 - i)$ 。

想一想： $(a + bi) + (a - bi)$ 等于什么？这个结果提示 $z + \bar{z}$ 有什么性质？(提示：虚部抵消，只剩 $2a$)

2.2.2 复数的乘除法：分配律展开 $+ i^2 = -1$ 化简

学习目标

- 掌握复数乘法法则；
- 掌握复数除法法则（分母乘共轭）；
- 会用 i 的幂周期化简高次幂。

前置复习: $(x+2)(x+3)$ 怎么展开? $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 怎么把分母化成有理数?

复数乘法

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

复数除法

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

How To: 做复数除法

- 把分子、分母同乘分母的共轭;
- 分母变为实数 $c^2 + d^2$;
- 分子用乘法法则展开, 合并实部虚部;
- 分别除以分母, 写成 $a + bi$ 形式。

例题 2.4

(复数乘除法) 【对抗 M7】

(1) 计算 $(2+3i)(1-i)$; (2) 计算 $\frac{1+i}{1-i}$; (3) 计算 i^{2025} 。

解: (1) 展开: $2 \cdot 1 + 2 \cdot (-i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$ 。(2) 分子分母同乘 $1+i$: $\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$ 。(3) $2025 = 4 \times 506 + 1$, $i^{2025} = i^{4 \times 506 + 1} = (i^4)^{506} \cdot i = 1^{506} \cdot i = i$ 。检验: $(5+i)(1+i)^{-1} \dots \dots$ 改用验证法: $(5+i) = (2+3i)(1-i)$ 已直接展开得证; $\frac{1+i}{1-i} = i$ 两边乘 $1-i$: $i(1-i) = i - i^2 = 1 + i \checkmark$ 。■

Try It 2.4: 计算: $(1-i)(1+i)$ 与 $\frac{2}{1+i}$ 。

Q&A

- 问: $i^2 = -1$ 代入不彻底会怎样?

答: 会得出“带 i 的项没消掉”的错误结果。比如 $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, 若把 i^2 写成 1 就得 $2 + 2i$, 错了。

- 问: 复数乘法有“除法是乘法的逆运算”的性质吗?

答: 有。只要除数非零, $z_1 \div z_2$ 唯一确定, 且 $(z_1 \div z_2) \times z_2 = z_1$ 。

想一想: 计算 $\frac{1}{i}$, 你得到什么? 它等于 $-i$ 吗? (提示: 分子分母同乘 $-i$ 或 i 试试)

例题 2.5

(乘除法逆运算与共轭求模) 【对抗 M5、M7】

(1) 已知 $(1-2i)z = 5+i$, 求复数 z ; (2) 求 $\left| \frac{1+2i}{2-i} \right|$ 。

解: (1) $z = \frac{5+i}{1-2i}$ 。分子分母同乘 $1+2i$:

$$z = \frac{(5+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5+10i+i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{3+11i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$$

检验: $(1-2i)\left(\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i\right) = \frac{3+11i-6i-22i^2}{5} = \frac{3+5i+22}{5} = \frac{25+5i}{5} = 5+i \checkmark$ 。(2) 利

用 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$: $\left| \frac{1+2i}{2-i} \right| = \frac{|1+2i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ 。检验: 直接算 $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2+i+4i+2i^2}{5} = \frac{5i}{5} = i$, $|i| = 1 \checkmark$ 。■

本节练习 (答案见章末)

- 计算: $(3+4i) + (5-2i)$ 与 $(2-i)(3+i)$ 。
- 计算: $\frac{3+4i}{2-i}$ 。
- 求 i^{2023} 的值。

2.3 复数的几何意义: 平面上的点

2.3.1 复平面与模: 复数就是平面上的点

学习目标

- 理解复平面的概念, 会在复平面内标出复数对应的点;
- 掌握复数模的定义与求法;
- 知道 $|z|$ 的几何意义 (到原点的距离)。

前置复习: 平面直角坐标系中, 点 $(3, 4)$ 到原点的距离是多少? 怎么算的?

复平面

建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**, x 轴叫**实轴**, y 轴叫**虚轴**。复数 $z = a+bi$ 对应点 $Z(a, b)$, 也对应向量 $\overrightarrow{OZ}$ 。

复数的模

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度叫做复数 z 的**模** (或绝对值), 记作 $|z|$:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

例题 2.6

(复平面标点与求模) 【对抗 M4】

(1) 在复平面内标出 $z_1 = 3 + 4i$ 、 $z_2 = -2i$ 、 $z_3 = 3$ 对应的点；(2) 求 $|z_1|$ 、 $|z_2|$ 、 $|z_3|$ ；(3) 比较 $|3 + 4i|$ 与 $|3 + 4|$ 。

解：(1) z_1 对应 $(3, 4)$ ， z_2 对应 $(0, -2)$ ， z_3 对应 $(3, 0)$ 。(2) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ ； $|z_2| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ ； $|z_3| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$ 。(3) $|3 + 4i| = 5$ ，而 $|3 + 4| = |7| = 7$ ——模不是“去掉负号”的绝对值，它按 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 计算。■

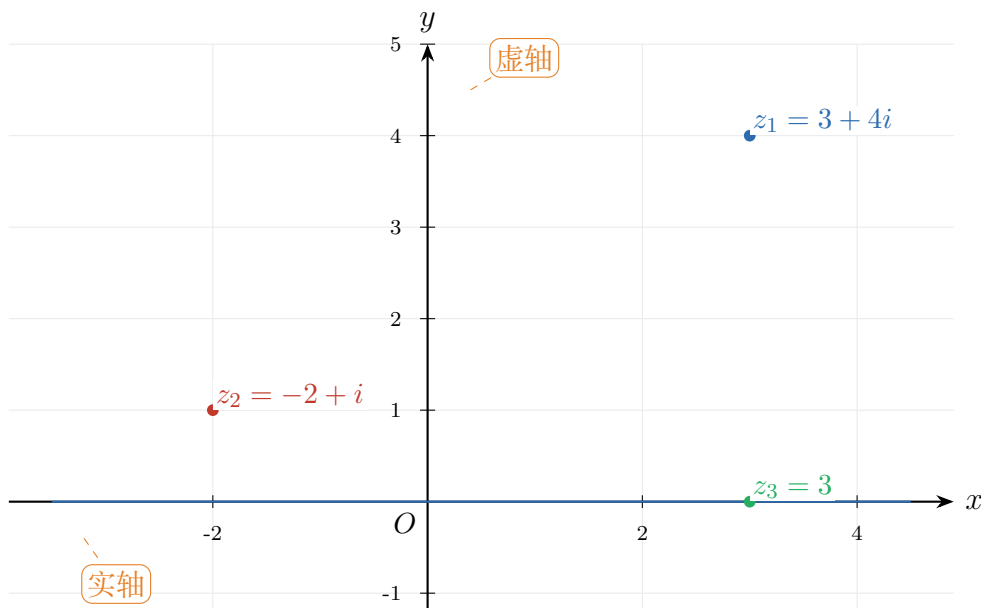


图 2.1: 复平面内标点

Try It 2.5: 求 $|1 + i|$ 、 $|-5i|$ 、 $|6|$ 的值。

Q&A

- 问： $z = 3 + 4i$ 与 $z' = 4 + 3i$ 的模相等吗？它们相同吗？

答：模都等于 5，相等；但 z 对应点 $(3, 4)$ ， z' 对应点 $(4, 3)$ ，是两个不同的复数——模相等不代表复数相等。

- 问：纯虚数在复平面的什么位置？

答：在虚轴 (y 轴) 上。实数在实轴 (x 轴) 上。

想一想： $|z| = 1$ 表示复平面内什么样的点集？(提示：到原点的距离都是 1)

2.3.2 共轭与模的性质：模是圆的半径

学习目标

- 掌握共轭的运算性质；

- 掌握 $z\bar{z} = |z|^2$ 及模的运算性质；
- 会把 $|z - z_0| = r$ 翻译成圆。

前置复习： $z = 1 + i$ ，求 $\bar{z}$ 、 $z\bar{z}$ 、 $|z|^2$ 、 z^2 。

共轭与模的性质

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (万能钥匙)；
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ ；
- 共轭对加减乘除的分配： $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ；
- 模对乘除： $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$)。

轨迹的几何意义

$|z - z_0| = r$ 表示复平面内以 z_0 为圆心、 r 为半径的圆——因为 z 到定点 z_0 的距离恒为 r 。

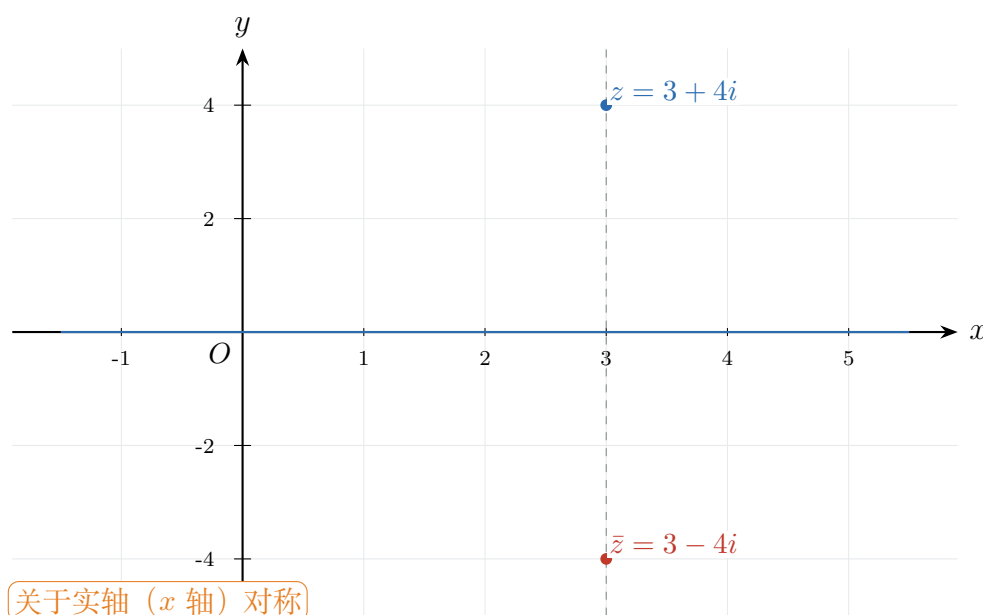


图 2.2: 共轭复数关于实轴对称

例题 2.7

(共轭与模的性质应用) 【对抗 M5、M6、M12】

已知 $z = 1 + i$ 。

(1) 求 $|z|$ 、 z^2 、 $z\bar{z}$ ，并验证 $z\bar{z} = |z|^2 \neq z^2$ ；(2) 已知 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$ ，验证 $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ；(3) 画出 $|z - 1| = 3$ 表示的图形。

解：(1) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|z|^2 = 2$; $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$; $z\bar{z} = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2$ 。故 $z\bar{z} = |z|^2 = 2$, 而 $z^2 = 2i \neq 2$ —— $|z|^2$ 与 z^2 不是一回事。(2) $z_1 z_2 = (2+i)(1+2i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$, $\overline{z_1 z_2} = -5i$; 而 $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (2-i)(1-2i) = 2 - 4i - i + 2i^2 = 2 - 5i - 2 = -5i$ ✓。(3) $|z-1| = 3$ 表示以 $z_0 = 1$ (点 (1, 0)) 为圆心、半径 3 的圆。检验：(1) 中 $|z| = \sqrt{2}$ 由勾股定理直接得 $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ✓。■

Try It 2.6: 已知 $z = 2 - 3i$, 求 $\bar{z}$ 、 $z\bar{z}$ 、 $|z|$, 并写出 $|z-i| = 2$ 表示的图形。

Q&A

• 问： $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 怎么证？

答：设 $z_1 = a + bi$ 、 $z_2 = c + di$, 展开 $|z_1 z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2$, 开方即得。

• 问： $|z - z_1| = |z - z_2|$ 是什么图形？

答：到两点距离相等的点的轨迹——两点的**垂直平分线**（中垂线）。

想一想： $|z| = |z - 4i|$ 表示的图形是什么？（提示：到原点和到 $4i$ 距离相等）

例题 2.8

（共轭与模求参数）【对抗 M8、M10】

已知复数 $z = (m+1) + (m-1)i$ ($m \in \mathbb{R}$)。

(1) 若 z 为纯虚数, 求 m ; (2) 若 $z\bar{z} = 6$, 求 m 。

解：(1) 纯虚数需实部为 0 且虚部不为 0: $m+1 = 0$ 得 $m = -1$, 此时虚部 $m-1 = -2 \neq 0$ ✓。故 $m = -1$ 。(2) $z\bar{z} = |z|^2 = (m+1)^2 + (m-1)^2 = 6$ 。展开: $(m^2 + 2m + 1) + (m^2 - 2m + 1) = 2m^2 + 2 = 6$, 得 $m^2 = 2$, $m = \pm\sqrt{2}$ 。检验: $m = \sqrt{2}$ 时 $|z|^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$ ✓; $m = -\sqrt{2}$ 同理 ✓。■

本节练习（答案见章末）

- 求 $|2 - 2i|$ 、 $|-3 + 4i|$ 、 $|5|$ 。
- 已知 $z = 1 - 2i$, 求 $z\bar{z}$ 与 $|z|$ 。
- 画出 $|z+2| = 1$ 表示的图形, 并写出圆心与半径。

2.4 复数的三角表示：旋转的语言

2.4.1 复数的三角形式：模 + 辐角

学习目标

- 理解复数的三角形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$;
- 掌握复数乘法与除法在三角形式下的几何意义;
- 会用三角形式解释“乘 i 旋转 90° ”。

前置复习：点 $P(1,1)$ 到原点距离是多少？ OP 与 x 轴夹角是多少？

复数的三角形式

设复数 $z = a + bi$ 对应点 $Z(a, b)$, $r = |z|$, θ 是以 x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的角 ($0 \leq \theta < 2\pi$), 则

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

其中 r 叫**模**, θ 叫**辐角**。 θ 用弧度表示时, 上式就是复数的**三角形式**。

几何意义

- $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$;
- 复数乘法：**模相乘、辐角相加**—— $(r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$;
- 乘 i : $i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, 模为 1、辐角 $\frac{\pi}{2}$, 所以乘 i 就是把复数**绕原点逆时针旋转 90°** 。

例题 2.9

(复数三角形式)

(1) 把 $z = 1 + i$ 化为三角形式; (2) 把 $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ 化为 $a + bi$ 形式; (3) 用三角形式解释 $i^2 = -1$ 。

解： (1) $r = |1 + i| = \sqrt{2}$, 辐角 $\theta = \frac{\pi}{4}$ (点 $(1,1)$ 在第一象限角平分线), 故 $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ 。 (2) $2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$ 。 (3) i 的三角形式是 $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ (模 1、辐角 $\frac{\pi}{2}$)。 i^2 即辐角相加 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ 、模 $1 \times 1 = 1$, 对应 $\cos \pi + i \sin \pi = -1$ ——**旋转 90° 两次, 正好掉头成 -1** 。检验: (1) $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$ ✓。 ■

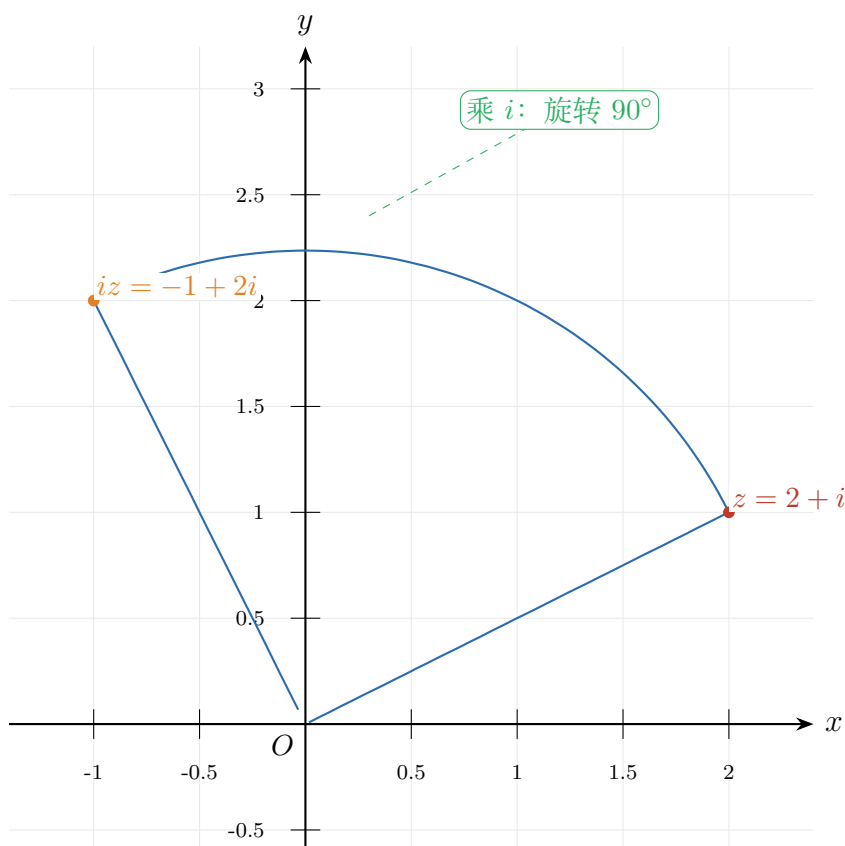


图 2.3: 乘 i 的几何意义: 逆时针旋转 90°

Try It 2.7: 把 $z = -1$ 化为三角形式; 把 $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ 化为 $a + bi$ 形式。

Q&A

- **问:** 每个复数都有唯一的三角形式吗?

答: 模唯一; 辐角不唯一 (可相差 2π 的整数倍)。规定 $0 \leq \theta < 2\pi$ 时取 “主辐角”, 表示就唯一了。 $z = 0$ 的辐角不定。

- **问:** 为什么要学三角形式?

答: 坐标形式擅长加减, 三角形式擅长乘除。物理里交流电、振动合成都用 “模 + 相位 (辐角)”, 三角形式是它们的数学语言。

想一想: $z = i$ 的三角形式是什么? 乘 z 一次, 点 $(1, 0)$ 会转到哪? (提示: $1 \times i = i$)

本节练习 (答案见章末)

- 把 $z = 1 - i$ 化为三角形式。
- 把 $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ 化为 $a + bi$ 形式。
- 用三角形式说明: $(1 + i)(1 + i) = 2i$ 。(提示: $(1 + i)$ 的模为 $\sqrt{2}$ 、辐角 $\frac{\pi}{4}$)

本章回顾

概念地图

· 虚数单位: $i^2 = -1$; i 的幂每 4 次循环: $i, -1, -i, 1$ · 复数: $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$); 实部 a 、虚部 b (**不是** bi) · 分类: $b = 0$ 实数; $b \neq 0$ 虚数; $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 纯虚数 · 复数相等: $a + bi = c + di \iff a = c$ 且 $b = d$; 复数不可比大小 · 共轭: $\bar{z} = a - bi$; $z\bar{z} = |z|^2$; $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ · 加减法: $(a \pm c) + (b \pm d)i$ (实部虚部分别合并) · 乘法: $(ac - bd) + (ad + bc)i$, 遇 i^2 换 -1 · 除法: 分子分母同乘分母共轭, 分母实数化 · 复平面: 实轴、虚轴; $z \leftrightarrow$ 点 $Z(a, b) \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$ · 模: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (到原点距离); $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ · 轨迹: $|z - z_0| = r$ 为圆; $|z - z_1| = |z - z_2|$ 为中垂线 · 三角形式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; 乘法 = 模相乘、辐角相加

关键公式速查

内容	公式
虚数单位	$i^2 = -1, i^{4k} = 1$
复数相等	$a + bi = c + di \iff a = c$ 且 $b = d$
加减法	$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
乘法	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
除法	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$
共轭	$\bar{z} = a - bi; z\bar{z} = z ^2$
模	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}; z_1 z_2 = z_1 z_2 $
三角形式	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

分层练习

A 基础层

- 指出 $z = 2 - 7i$ 的实部、虚部, 并判断类别。
- 求 i^{50} 的值。
- 计算: $(3 - 5i) + (2 + 3i)$ 与 $(1 + 2i)(3 - i)$ 。
- 计算: $\frac{2 - i}{1 + i}$ 。
- 求 $|3 - 4i|$ 、 $|1 + i|$ 、 $|-2|$ 。
- 已知 $z = 1 + i$, 求 $z\bar{z}$ 与 $\bar{z}$ 。

B 应用层

- 已知 $z = (a - 1) + (a + 1)i$ 是纯虚数, 求实数 a 。
- 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $(x + y) + (x - y)i = 4 - 2i$, 求 x 、 y 。

- 在复平面内, 画出满足 $|z - 2| = 3$ 的点集, 并说明图形的圆心与半径。

C 拓展层

- 已知 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, 求 $z_1 z_2$ 与 $\frac{z_1}{z_2}$, 并求 $|z_1^4|$ 。
- 证明: 对任意复数 z , $|z + \bar{z}| = 2|\operatorname{Re} z|$ 。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 2.1:** 实部 $-\frac{1}{2}$, 虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ —— $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 是虚数 (非纯虚数)。
- 2.2:** $x - 1 = 2$ 且 $y + 3 = 0$, 故 $x = 3$, $y = -3$ 。
- 2.3:** $(5 - 3i) + (2 + i) = 7 - 2i$; $(1 + i) - (1 - i) = 2i$ 。
- 2.4:** $(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2$; $\frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ 。
- 2.5:** $|1 + i| = \sqrt{2}$; $|-5i| = 5$; $|6| = 6$ 。
- 2.6:** $\bar{z} = 2 + 3i$; $z\bar{z} = 4 + 9 = 13$; $|z| = \sqrt{13}$; $|z - i| = 2$ 表示以 i (点 $(0, 1)$) 为圆心、半径 2 的圆。
- 2.7:** $z = -1$ 的模 1、辐角 π , 三角形式 $\cos \pi + i \sin \pi$; $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$ 。

各节练习答案

- 2.1 节:** 1. $i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3 = -i$ 。2. z 为实数需 $m + 1 = 0$, 即 $m = -1$; 为纯虚数需 $m - 1 = 0$ 且 $m + 1 \neq 0$, 即 $m = 1$ 。3. $2x + y = 5$, $x - 2y = -3$, 解得 $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ 。
- 2.2 节:** 1. $(3 + 4i) + (5 - 2i) = 8 + 2i$; $(2 - i)(3 + i) = 6 + 2i - 3i - i^2 = 7 - i$ 。2. $\frac{3 + 4i}{2 - i} = \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 8i + 4i^2}{5} = \frac{2 + 11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$ 。3. $2023 = 4 \times 505 + 3$, $i^{2023} = i^3 = -i$ 。
- 2.3 节:** 1. $|2 - 2i| = 2\sqrt{2}$; $|-3 + 4i| = 5$; $|5| = 5$ 。2. $z\bar{z} = 1 + 4 = 5$, $|z| = \sqrt{5}$ 。3. $|z + 2| = 1$ 即 $|z - (-2)| = 1$: 以 $(-2, 0)$ 为圆心、半径 1 的圆。
- 2.4 节:** 1. $|1 - i| = \sqrt{2}$, 辐角 $\frac{7\pi}{4}$ (即 $-\frac{\pi}{4}$), $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ 。2. $3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ 。3. $(1 + i)$ 模 $\sqrt{2}$ 、辐角 $\frac{\pi}{4}$, 平方后模 2、辐角 $\frac{\pi}{2}$, 即 $2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$ ✓。

分层练习答案

A1: 实部 2, 虚部 -7 , $b \neq 0$ 且 $a \neq 0 \rightarrow$ 虚数 (非纯虚数)。

A2: $i^{50} = i^{4 \times 12 + 2} = i^2 = -1$ 。

A3: $(3 - 5i) + (2 + 3i) = 5 - 2i$; $(1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$ 。

A4: $\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{2} = \frac{2-2i-i+i^2}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ 。

A5: $|3 - 4i| = 5$; $|1 + i| = \sqrt{2}$; $|-2| = 2$ 。

A6: $\bar{z} = 1 - i$; $z\bar{z} = (1 + i)(1 - i) = 2$ 。

B7: 纯虚数需 $a - 1 = 0$ 且 $a + 1 \neq 0$, 故 $a = 1$ 。

B8: $x + y = 4$, $x - y = -2$, 解得 $x = 1$, $y = 3$ 。

B9: $|z - 2| = 3$: 圆心 $(2, 0)$ 、半径 3 的圆。

C10: $z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i) = 2$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = i$; $|z_1^4| = |z_1|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$ 。

C11: 设 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$, 故 $|z + \bar{z}| = |2a| = 2|a| = 2|\operatorname{Re} z|$ 。■

第三章 空间到底长什么样：立体几何初步

章首情境

3.1 基本立体图形：三维世界的“词汇表”

3.1.1 多面体：棱柱、棱锥、棱台

学习目标

- 理解多面体、旋转体的概念，能说出棱柱、棱锥、棱台的结构特征；
- 会用结构特征判断一个几何体是什么体；
- 掌握正棱柱、正棱锥、正棱台的特殊结构，能进行基本量（侧棱、斜高、表面积、体积）的计算。

前置复习 (Be Prepared)

- 长方形沿一条边旋转一周，形成什么几何体？
- 三角形、矩形、圆的面积公式分别是什么？
- 正方形的对角线与其边长的关系是什么？

情境引入：装薯片的筒、金字塔模型、切掉尖的“蛋糕塔”——它们分别对应圆柱、棱锥、棱台。观察这三个实物，说出它们的共同点与不同点。

多面体的概念

由若干个**平面多边形**围成的封闭几何体叫做**多面体**。多面体的面（多边形）、棱（相邻面的公共边）、顶点（棱与棱的公共点）——这三个词是描述多面体“长相”的基本词汇。

棱柱：有两个面互相平行且全等（底面），其余各面都是平行四边形，并且每相邻两个四边形的公共边互相平行（侧棱）。侧棱平行且相等。

棱锥：有一个面是多边形（底面），其余各面都是有一个公共顶点的三角形（侧面）。

棱台：用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫做棱台。棱台的侧棱延长后必交于一点（还原成一个棱锥）。

How To: 判定一个多面体是棱柱、棱锥还是棱台

- 找“最像底”的两个面（或一个面），看其余各面的形状；
- 其余各面全是平行四边形且侧棱平行 → 棱柱；其余各面是共顶点的三角形 → 棱锥；
- 上下两个面平行、侧面是梯形 → 再验：侧棱延长线是否交于一点——交于一点是棱台，不交则是“斜柱”或别的体；
- 只要侧面是平行四边形却声称是棱台 → 直接判错。

例题 3.1

（判定几何体类型）下列几何体分别是什么体？说明理由。

（1）两个面互相平行且全等，其余各面都是平行四边形的多面体；（2）一个面是五边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形的多面体；（3）用一个平行于圆锥底面的平面截圆锥，截面与底面之间的部分。

解：（1）棱柱——底面互相平行且全等，侧面都是平行四边形，满足棱柱定义。（2）棱锥——底面是多边形，其余各面是共公共顶点的三角形，这正是棱锥的结构特征。（3）圆台——用一个平行于底面的平面去截圆锥得到的部分，是旋转体中的圆台（不是棱台，因为底面是圆）。

Try It 3.1：判断：底面是平行四边形的四棱柱叫什么名字？（提示：看两个底面与四条侧棱能否“平移对得上”）

例题 3.2

（棱台辨析，对抗 M8）判断下列说法是否正确，并说明理由。

（1）有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体一定是棱台；（2）棱台的侧棱延长线必交于一点；（3）棱台的侧面都是平行四边形。

解：（1）错。反例：把两个平行但大小相差很大的四边形随意叠放，用四边形侧面“缝”起来，侧棱不平行也不交于一点，它既不是棱柱也不是棱台——“其余各面都是四边形”远不够判棱台。（2）对。棱台由棱锥用平行于底面的平面截出，还原即得原棱锥，侧棱延长后正是原棱锥的侧棱，必交于顶点。（3）错。棱台的侧面是梯形（截得棱锥后，侧面的三角形被截掉尖角变成梯形）。■

Try It 3.2：有一个几何体，两个底面是平行且相似的四边形，侧面是梯形，且四条侧棱延长后交于一点。它是棱台吗？为什么？

想一想：正三棱柱与三棱柱有什么区别？“正”字加了什么条件？（提示：底面要正多边形，且侧棱要垂直于底面）

3.1.2 旋转体：圆柱、圆锥、圆台、球

学习目标

- 理解旋转体（圆柱、圆锥、圆台、球）的形成过程与结构特征；
- 掌握圆柱、圆锥、圆台的轴、底面、侧面、母线等概念；
- 掌握常见多面体与旋转体的表面积、体积公式并能计算。

前置复习：矩形、直角三角形、直角梯形、半圆绕一条边（或直径）旋转一周，各得到什么体？

旋转体的概念

- **圆柱：**矩形绕其一边所在直线旋转一周形成；两个底面是互相平行且全等的圆，侧面是曲面，母线都相等。
- **圆锥：**直角三角形绕其一直角边所在直线旋转一周形成；底面是圆，顶点到圆周上任意一点的母线都相等。
- **圆台：**直角梯形绕其垂直于底边的腰所在直线旋转一周形成（也可看作圆锥被平行于底面的平面截得的上下两段）。
- **球：**半圆绕其直径所在直线旋转一周形成。球面上任意一点到球心的距离都等于半径 r 。

例题 3.3

（正棱锥与旋转体的基本量计算）

（1）正四棱锥的底面边长为 4，高为 6。求它的斜高、侧棱长、表面积与体积；（2）圆锥的底面半径为 3，高为 4。求它的侧面积、表面积与体积。

解：（1）设底面中心为 O ，顶点为 P ， E 为底面一边 AB 的中点。底面边心距 $OE = 2$ ，高 $PO = 6$ ，故斜高

$$PE = \sqrt{PO^2 + OE^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

底面中心到顶点 A 的距离（底面正方形外接圆半径） $OA = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ，故侧棱长

$$PA = \sqrt{PO^2 + OA^2} = \sqrt{36 + 8} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

底面积 $S_{\text{底}} = 4^2 = 16$ ，四个侧面每个面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$ ，侧面积 $16\sqrt{10}$ ，表面积

$$S = 16 + 16\sqrt{10}.$$

体积

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{底}} \cdot h = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 = 32.$$

（2）母线长 $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi r l = 15\pi$ ，表面积 $S = \pi r^2 + \pi r l = 9\pi + 15\pi = 24\pi$ ，体积

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi.$$

Try It 3.3：球的半径为 3，求球的体积与表面积。再算：圆柱底面半径 3、高 4 的体积与表面积。（提示：这两个结果很“对称”）

Q&A

- **问：**圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图分别是什么？

答：圆柱的侧面展开是矩形（宽为底面周长 $2\pi r$ ，高为母线长）；圆锥的侧面展开是扇形（弧长为 $2\pi r$ ，半径为母线长 l ，圆心角 $\frac{2\pi r}{l}$ ）；圆台的侧面展开是扇环。

- **问：**正棱锥一定是“侧棱都相等”的吗？

答：是的。正棱锥要求底面是正多边形且顶点在底面中心的投影，由此可证所有侧棱都相等（每个直角三角形 POA 、 POB 的直角边 PO 相等、 $OA = OB$ ，故斜边相等）。反过来，“侧棱相等”**推不出**“正棱锥”——还要底面是正多边形。

练一练：判断正误——“底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥。”（提示：想一个底面正但顶点歪到一边的棱锥）

本节练习（答案见章末）

- 判断正误：（1）棱台的侧棱延长线必交于一点；（2）各面都是三角形的多面体一定是棱锥；（3）球的任意截面都是圆。
- 圆锥底面半径为 3，母线长为 5，求它的侧面积与体积。
- 正三棱柱的底面边长为 2，高为 3，求它的表面积与体积。
- 半径为 2 的球，其体积与表面积之比是多少？

3.2 立体图形的直观图与三视图：怎么画得像

3.2.1 斜二测画法：一张纸上的“透视魔法”

学习目标

- 掌握斜二测画法的规则，能画水平放置的平面图形与简单立体图形的直观图；
- 掌握直观图与原图面积的换算关系 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ ；
- 理解斜二测画法“保平行、保横向长度、纵向减半”的本质。

前置复习：画一个边长为 2 的正方形，再画一个边长为 2 的正三角形，标出它们的高。

情境引入：你拍照时，近处的桌子腿看起来比远处的高——那是透视变形。数学里要“画得标准、量得准”，反而不能随便透视，必须遵守固定规则。

斜二测画法的规则

- 在已知图形中取互相垂直的 x 轴、 y 轴，画直观图时，把它们画成夹角为 45° （或 135° ）的 x' 轴、 y' 轴；

- x' 轴方向（横向）的长度**不变**；
- y' 轴方向（纵向）的长度**变为原来的一半**；
- 竖直的 z 轴方向长度不变（画立体时使用）。

How To: 画水平放置的平面图形的直观图

- 在原图中建立直角坐标系，标出关键点的坐标；
- 画 x' 、 y' 轴成 45° ；
- 把每个点按“横坐标不变、纵坐标减半”搬到新坐标系；
- 顺次连接各点，擦去辅助线。

例题 3.4

（斜二测画法求直观图面积，对抗 M2）

画出水平放置的边长为 4 的正三角形 ABC 的直观图，并求直观图的面积。

解：以 BC 所在直线为 x 轴、 BC 的中点 O 为原点建立坐标系， A 的纵坐标为 $2\sqrt{3}$ （正三角形高）。画直观图时， B' 、 C' 在 x' 轴上，长度不变： $B'C' = 4$ ； A' 的纵坐标减半： $2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ ，且 OA' 与 x' 轴成 45° 。 A' 到底边 $B'C'$ 所在直线的实际垂直距离为

$$\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故直观图面积

$$S' = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

另解（用面积公式）：原图面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$ ，由 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ 得 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 4\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ，结果一致。■

Try It 3.4: 画出水平放置的边长为 4 的正方形的直观图，并求其面积。（原面积 16，直观图面积应为多少？）

例题 3.5

（由直观图面积反求原面积，对抗 M12）

一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个面积为 $3\sqrt{2}$ 的平行四边形，求原图形的面积。

解：直观图与原图的面积关系为 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ ，故

$$S = \frac{4}{\sqrt{2}}S' = \frac{4}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2} = 12.$$

原图形的面积为 12。

Try It 3.5: 一个平面图形的直观图面积为 $2\sqrt{2}$ ，原图形的面积是多少？

想一想：斜二测画法是“三视图的俯视图”吗？为什么？（提示：俯视图是正交投影——视线垂直向下，长度比例不变；斜二测是 45° 方向的斜投影，纵向减半）

3.2.2 三视图：从三个方向给立体“拍照”

学习目标

- 理解三视图（正视图、侧视图、俯视图）的投影原理；
- 掌握“长对正、高平齐、宽相等”三对关系，能由两个视图补第三个；
- 会由三视图还原直观图，并求几何体的体积与表面积；
- 掌握虚实线规则：看得见的轮廓画实线，被遮挡的画虚线。

前置复习：一个长 3、宽 2、高 2 的长方体，从正面、左面、上面看，各是什么形状？尺寸各是多少？

三视图的概念

把物体放在三个互相垂直的投影面之间，分别从正前方（正视图）、正左方（侧视图）、正上方（俯视图）作**正交投影**（视线垂直于投影面），得到的三个视图统称三视图。

三对对应关系：

- **长对正：**正视图与俯视图的**长**相等；
- **高平齐：**正视图与侧视图的**高**相等；
- **宽相等：**俯视图与侧视图的**宽**相等。

画法规则：看得见的轮廓线画**实线**，被遮挡的轮廓线画**虚线**。

How To：由三视图还原直观图

- 先用“长对正、宽相等、高平齐”反推几何体的长、宽、高（三个尺寸）；
- 看三个视图的形状，判断是由哪些基本体（柱、锥、台、球）组合或切割而成；
- 用虚实线判断“是挖了洞还是凸了块”：某处有虚线 → 有被挡住的凹陷或挖空；
- 想象出直观图，再计算体积与表面积。

例题 3.6

（三视图还原与计算，对抗 M1、M7）

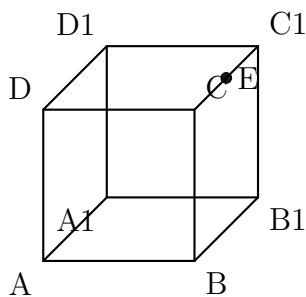


图 3.1: 配图

某几何体的三视图如图所示：正视图是边长为 2 的正方形，侧视图是边长为 2 的正方形，俯视图是直径为 2 的圆。求该几何体的体积与表面积。

解：由三对关系：正视图与俯视图“长对正”给出底面直径 2，正视图与侧视图“高平齐”给出高 2，俯视图是圆说明底面是圆——这是一个**圆柱**，底面半径 $r = 1$ ，高 $h = 2$ 。体积

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 1 \times 2 = 2\pi.$$

表面积

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi + 4\pi = 6\pi.$$

Try It 3.6: 某几何体的三视图全是边长为 2 的正方形，它是什么几何体？体积、表面积各是多少？

Q&A

- **问：**为什么三视图里被遮挡的边要画虚线？

答：因为从那个方向看，它被前面的面挡住了、看不见，但确实存在。虚线就是提醒你“这里还藏着一条棱”。还原直观图时，虚实线是判断挖空与否的最重要线索。

- **问：**三视图一定能唯一确定一个几何体吗？

答：不一定。比如正视图、侧视图都是三角形、俯视图是圆的可以是圆锥，也可能是一些更怪的组合体。考试题一般限定“由常见几何体组合而成”。

练一练：一个正方体（棱长 2）从正上方挖去一个棱长为 1 的小正方体，贯穿到底（截面是 1×1 的正方形，位于上底面中心）。画出它的俯视图（提示：中间的小正方形轮廓线是实线还是虚线？），并求出剩余几何体的体积与表面积。（答案见章末）

本节练习（答案见章末）

- 画出水平放置的边长为 4 的正方形的直观图，并求其面积。
- 一个平面图形的斜二测直观图面积为 $2\sqrt{2}$ ，求原图形的面积。

- 某几何体的三视图中，正视图与侧视图都是底边为 2、高为 4 的等腰三角形，俯视图是半径为 1 的圆。求该几何体的体积。

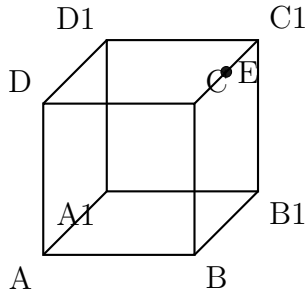


图 3.2: 三视图

- 一个圆柱（底面半径 1，高 2）放在桌面上，从正前方、正左方、正上方看，各是什么图形？画出三视图的草图并标注尺寸。

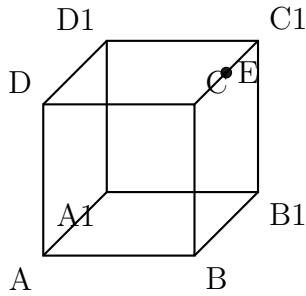


图 3.3: 三视图

3.3 空间中点线面的位置关系：空间的“语法”

3.3.1 平面与公理：空间秩序的“游戏规则”

学习目标

- 理解四个公理：直线在平面内的判定、确定平面的条件、两平面交线唯一、平行传递性；
- 掌握空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系分类；
- 能判断并说出空间元素间的位置关系。

前置复习：在平面几何中，两条直线的位置关系有哪两种？（平行、相交）到空间里，这个结论还成立吗？

四个公理

- 公理 1：**如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内；

- **公理 2：不共线**的三个点确定一个平面（推论：一直线及线外一点确定一个平面；两条相交直线确定一个平面；两条平行直线确定一个平面）；
- **公理 3**：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条**过该点的公共直线**（交线）；
- **公理 4**：平行于同一条直线的两条直线互相平行（平行传递性）。

位置关系总表

对象	位置关系	判定要点
线与线	平行 / 相交 / 异面	异面：不共面且不相交
线与面	在面内 / 相交（含垂直） / 平行	有无公共点 + 是否共面
面与面	平行 / 相交	无公共点即平行，交线是直线

例题 3.7

（位置关系辨析，对抗 M6）

在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列各对棱的位置关系：

(1) AB 与 D_1C_1 ；(2) AB 与 A_1D_1 ；(3) AA_1 与 BC ；(4) AC 与 BD ；(5) AB 与 A_1B_1 。

解：(1) **平行**—— $AB \parallel DC$, $DC \parallel D_1C_1$ ，由公理 4 得 $AB \parallel D_1C_1$ 。(2) **异面**——它们不共面： AB 在底面 $ABCD$ 内， A_1D_1 在上底面内，且方向一横一纵，不可能相交，也不共面。(3) **异面**—— AA_1 垂直于底面， BC 在底面内，两者不共面、不相交。(4) **相交**—— AC 与 BD 都在底面 $ABCD$ 内，且正方形对角线相交于中心。(5) **平行**——两条侧棱都垂直于底面且方向相同。

Try It 3.7：在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，判断 A_1B_1 与 AD 、 A_1C_1 与 BD 的位置关系。

想一想：经过空间任意三点，能确定几个平面？（提示：分“三点共线”与“不共线”讨论）

3.3.2 异面直线与空间角：两条“擦肩而过”的直线

学习目标

- 理解异面直线的定义，会判断两条直线是否异面；
- 掌握平移法求异面直线所成角；
- 了解空间角（线面角、二面角）的直观定义，为第 4 章向量法做铺垫。

前置复习：余弦定理： $\triangle ABC$ 中 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

异面直线所成角

已知两条异面直线 a 、 b ，经过空间任一点 O 分别作直线 $a' \parallel a$ 、 $b' \parallel b$ ，则 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（**夹角**）。

How To：求异面直线所成角（平移法）

- 选一条直线，找一条与它平行且“离另一条近”的线段（常取中位线、面对角线）；
- 把角“搬到”一个三角形里；
- 用余弦定理（或特殊三角形）求角。

例题 3.8

（求异面直线所成角）

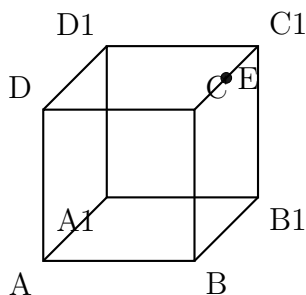


图 3.4: 配图

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值。

解：平移法。因为 $A_1B \parallel D_1C$ （四边形 A_1BCD_1 是平行四边形），把 A_1B 平移到 D_1C ，则所求角等于 $\angle AD_1C$ 。在 $\triangle AD_1C$ 中， $AD_1 = D_1C = AC = 2\sqrt{2}$ （三条都是面对角线），故 $\triangle AD_1C$ 是等边三角形， $\angle AD_1C = 60^\circ$ 。所以异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Try It 3.8：在上题的正方体中，求异面直线 A_1B 与 B_1C_1 所成角的余弦值。（提示： $B_1C_1 \parallel BC$ ， A_1B 与 BC 所成角就是 A_1B 与底面边的角）

Q&A

- **问：**异面直线所成角为什么取锐角（或直角）而不取钝角？

答：这是人为约定——“所成角”总取两条直线夹出的那个较小的角，这样每个异面直线对所成的角唯一确定，范围 $[0, 90^\circ]$ 。

- **问：**线面角、二面角在第 3 章只学“直觉”，精确计算在哪一章？

答：线面角是斜线与它在平面内射影的夹角；二面角是沿棱“展开”后两个半平面所成的角。本章先把“角长在哪、怎么找”看懂，第 4 章用空间向量把它们全部算出来。

练一练：正方体棱长为 2，求异面直线 A_1D 与 B_1C 的位置关系与所成角。（提示：这两条线之间有条面对角线可以平移）

本节练习（答案见章末）

- 判断正误：(1) 空间中任意两条直线要么平行要么相交；(2) 经过空间任意两点有且只有一条直线；(3) 三个不共线的点确定一个平面。
- 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， AB 与 C_1D_1 是什么关系？ AB 与 B_1C_1 呢？
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 D_1C_1 所成角的余弦值。

3.4 空间中的平行与垂直：判定与证明

3.4.1 线面平行：三条件，一个都不能少

学习目标

- 掌握线面平行的判定定理与性质定理，能规范书写证明过程；
- 会通过构造中位线、平行四边形制造平行线来证明线面平行；
- 理解面面平行的判定与性质，会用“线面互化”思想解题。

前置复习：三角形的中位线有什么性质？平行四边形的判定方法有哪些？

线面平行的判定定理

如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行。即

$$a \not\subset \alpha, \quad b \subset \alpha, \quad a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha.$$

线面平行的性质定理

如果一条直线与一个平面平行，那么过该直线的任意平面与此平面的交线与该直线平行。即

$$a \parallel \alpha, \quad a \subset \beta, \quad \alpha \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b.$$

面面平行

- 判定定理：一个平面内的**两条相交直线**都平行于另一个平面，则这两个平面平行；
- 性质定理：两个平面平行，则其中一个平面内的任意直线都平行于另一个平面；两个平行平面与第三个平面相交，交线平行。

How To：证明线面平行（标准四步）

- **找：**在平面内找一条与直线 a 平行的直线 b （常用中位线、平行四边形对边、已知平行线）；
- **证：**证明 $a \parallel b$ ；
- **查：**确认 $a \not\subset \alpha$ （直线不在面内）且 $b \subset \alpha$ ；
- **写：**按判定定理写出结论。

例题 3.9

(线面平行证明, 对抗 M3)

四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, E 为棱 PD 的中点。求证: $PB \parallel$ 平面 AEC 。

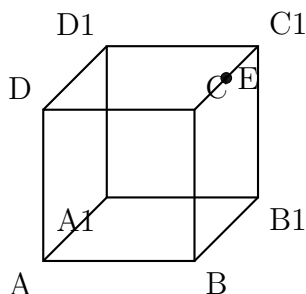


图 3.5: 配图

证明: 连接 BD 交 AC 于点 O 。因为底面 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 O 是 BD 的中点 (平行四边形对角线互相平分)。在 $\triangle PBD$ 中, E 是 PD 的中点, O 是 BD 的中点, 故 EO 是 $\triangle PBD$ 的中位线, $EO \parallel PB$ 。又 $EO \subset$ 平面 AEC , 且 $PB \not\subset$ 平面 AEC ($P \notin$ 平面 AEC), 由线面平行判定定理, $PB \parallel$ 平面 AEC 。■

Try It 3.9: 三棱锥 $P-ABC$ 中, D 、 E 分别是棱 AB 、 AC 的中点。求证: $DE \parallel$ 平面 PBC 。

想一想 (对抗 M3): 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 a 是底面 $ABCD$ 内与 AB 平行的一条直线。有人说 “ $a \parallel AB$, $AB \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $a \parallel$ 底面 $ABCD$ ” ——这个推理对吗? 错在哪一步? (提示: a 已经落在底面里了, 第 (1) 个条件 $a \not\subset \alpha$ 不满足。判定定理只管 “平面外” 的直线)

3.4.2 线面垂直与面面垂直: 两条相交直线的分量

学习目标

- 掌握线面垂直的判定定理与性质, 能规范书写证明;
- 掌握面面垂直的判定定理与性质定理, 正确使用 “垂直于交线” 这个关键前提;
- 会利用垂直关系求简单几何体中的距离 (等体积法)。

前置复习: 两条直线垂直的定义; 正方形、矩形、菱形的对角线性质。

线面垂直

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直, 则称 l 垂直于平面 α , 记作 $l \perp \alpha$ 。

- 判定定理: 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么该直线与此平面垂直:

$$l \perp m, \quad l \perp n, \quad m \subset \alpha, \quad n \subset \alpha, \quad m \cap n = O \Rightarrow l \perp \alpha.$$

- 性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行。

面面垂直

- 判定定理：一个平面过另一个平面的**垂线**，则这两个平面垂直：

$$l \perp \alpha, \quad l \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

- 性质定理：两个平面垂直，则一个平面内**垂直于交线**的直线垂直于另一个平面：

$$\alpha \perp \beta, \quad \alpha \cap \beta = a, \quad b \subset \beta, \quad b \perp a \Rightarrow b \perp \alpha.$$

How To： 证明线面垂直（标准步骤）

- 在平面内找**两条相交直线** m 、 n ；
- 分别证明 $l \perp m$ 、 $l \perp n$ （常用：正方形对角线垂直、线面垂直推出线线垂直、勾股逆定理）；
- 写清“ m 与 n 相交于 O ”；
- 由判定定理下结论。

例题 3.10

（线面垂直证明，对抗 M5）正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，求证： $BD_1 \perp$ 平面 ACB_1 。

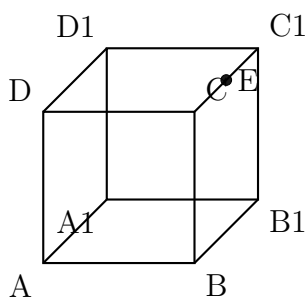


图 3.6: 配图

证明：((1) 证 $BD_1 \perp AC$) 连接 BD 。在底面 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ （正方形对角线互相垂直）；又 $DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 底面，故 $DD_1 \perp AC$ 。于是 AC 垂直于平面 BDD_1 内两条相交直线 BD 、 DD_1 ，所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ，从而 $AC \perp BD_1$ 。((2) 证 $BD_1 \perp AB_1$) 连接 A_1B 。在侧面 ABB_1A_1 中， $AB_1 \perp A_1B$ （正方形对角线互相垂直）；又 $A_1D_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ， $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，故 $AB_1 \perp A_1D_1$ 。于是 AB_1 垂直于平面 A_1BD_1 内两条相

交直线 A_1B 、 A_1D_1 ，所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD_1 ，从而 $AB_1 \perp BD_1$ 。((3) 合并) 由 $BD_1 \perp AC$ 、 $BD_1 \perp AB_1$ ，且 $AC \cap AB_1 = A$ ，两条直线相交，由线面垂直判定定理， $BD_1 \perp$ 平面 ACB_1 。■

Try It 3.10: 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，求证： $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D 。(提示： A_1B_1 与面内哪两条相交直线垂直?)

例题 3.11

(面面垂直判定 + 等体积法求距离，对抗 M4)

四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = AB = 2$ ， $AD = 4$ 。(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 PAB ；(2) 求点 C 到平面 PBD 的距离。

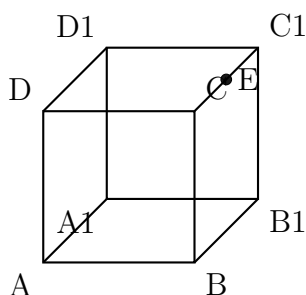


图 3.7: 配图

证明 (1): 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 底面，故 $PA \perp BC$ ；又矩形中 $AB \perp BC$ ，所以 BC 垂直于平面 PAB 内两条相交直线 PA 、 AB ，故 $BC \perp$ 平面 PAB 。又 $BC \subset$ 平面 PBC ，由面面垂直判定定理，平面 $PBC \perp$ 平面 PAB 。■

解 (2): 用等体积法。设点 C 到平面 PBD 的距离为 d 。先算三棱锥 $C-PBD$ 的体积 (换成以 $\triangle BCD$ 为底、 PA 的高线不太好直接换，用 $P-BCD$ 体积相等)：

$$V_{C-PBD} = V_{P-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}.$$

再算 $\triangle PBD$ 的面积。 $PB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ， $PD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ， $BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 。 $\triangle PBD$ 是等腰三角形，底边 BD 上的高

$$h_{\triangle} = \sqrt{PD^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{20 - 2} = 3\sqrt{2},$$

故 $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$ 。由 $V_{C-PBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBD} \cdot d$ 得

$$d = \frac{3 \times \frac{8}{3}}{6} = \frac{4}{3}.$$

点 C 到平面 PBD 的距离为 $\frac{4}{3}$ 。

Try It 3.11: 例题 3.11 的图形中, 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 PCD 。(提示: 找一条线同时垂直于两个面的交线)

Q&A

- **问:** 面面垂直, 能推出 “一个面内任意直线垂直于另一个面” 吗?

答: 不能! 性质定理要求这条直线**垂直于交线**。正方体中平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$ (交线 AB), 但面 $ABCD$ 内与 AB 平行的直线 CD 并不垂直于面 ABB_1A_1 。**先找交线, 再找“垂直交线的线”**——这是面面垂直性质使用的不二法门。

- **问:** 线面垂直判定为什么必须是 “两条相交直线”, 两条平行线不行吗?

答: 两条平行线只 “管” 一个方向, 不能确定平面的方向。反例: 旗杆 l 垂直于地面内一条线 m , 再找一条与 m 平行的 n , l 未必垂直于 n 。“**相交**” 二字是判定定理的灵魂。

练一练: 判断: 一个平面内两条平行线分别平行于另一个平面, 则这两个平面平行。(提示: 两条平行线能不能 “锁死” 平面的方向?)

本节练习 (答案见章末)

- 三棱锥 $P-ABC$ 中, D 、 E 分别是棱 AB 、 AC 的中点, 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC 。
- 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求证: $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D 。
- 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$ 。求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC 。
- 判断正误: 一个平面内的两条平行线分别平行于另一个平面, 则这两个平面一定平行。

本章回顾

概念地图

· 基本立体图形: 多面体 (棱柱/棱锥/棱台) · 旋转体 (圆柱/圆锥/圆台/球) · 棱柱: 侧棱平行且相等 · 棱锥: 侧面共顶点三角形 · 棱台: 侧棱延长交于一点 · 正棱锥: 底面正多边形 + 顶点投影在底面中心 · 直观图 (斜二测): 横不变、纵减半、平行不改变 · $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ · 三视图: 长对正、高平齐、宽相等 · 实线可见、虚线遮挡 · 位置关系: 线线 (平行/相交/异面) · 线面 (在面内/相交/平行) · 面面 (平行/相交) · 平行链: 线线 $\parallel \rightarrow$ (判定) $\rightarrow$ 线面 $\parallel \rightarrow$ (判定) $\rightarrow$ 面面 $\parallel$, 性质定理反向递推 · 垂直链: 线线 $\perp \rightarrow$ (判定, 需相交) $\rightarrow$ 线面 $\perp \rightarrow$ (判定) $\rightarrow$ 面面 $\perp$ · 线面垂直性质: 面面垂直时 “垂直于交线的线” 垂直另一面 · 空间角直觉: 异面角 (平移) · 线面角 (射影) · 二面角 (沿棱展开) ——第 4 章统一用向量算 · 度量: $V_{\text{柱}} = Sh$ · $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$ · $V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h$ · $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ · $S_{\text{球}} = 4\pi r^2$

关键公式速查

内容	要点
斜二测	横不变、纵减半、 z 不变；面积 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$
三视图	长对正（正/俯）、高平齐（正/侧）、宽相等（俯/侧）
线面平行	判定： $a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$ ；性质： $a \parallel \alpha, a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$
面面平行	判定：面内两条相交直线平行于另一面；性质：一面内任意直线平行于另一面
线面垂直	判定： l 垂直面内两条相交直线；性质：垂直于同一平面的两直线平行
面面垂直	判定：面过另一面的垂线；性质：垂直交线的线垂直另一面
正棱锥计算	高、边心距、斜高成直角三角形；高、外接圆半径、侧棱成直角三角形
体积	$V_{\text{柱}} = Sh, V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh, V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$
表面积	$S_{\text{球}} = 4\pi r^2, S_{\text{锥侧}} = \pi rl, S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rh$

分层练习

A 基础层

- 判断正误：（1）棱台的侧面是平行四边形；（2）圆锥的所有母线相等；（3）球的截面都是圆。
- 画出水平放置的边长为 4 的正三角形的直观图，并求直观图的面积。
- 某几何体的三视图全是边长为 2 的正方形，求该几何体的体积与表面积。

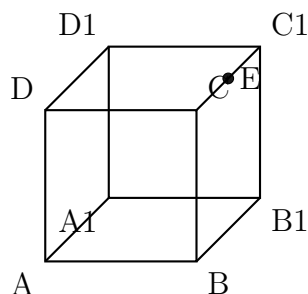


图 3.8: 三视图

- 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，指出 AB 与 A_1D_1 、 AA_1 与 BC 、 AC 与 BD 的位置关系。
- 四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， E 、 F 分别是棱 PA 、 PC 的中点。求证： $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，求证： $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D 。
- 正四棱锥的底面边长为 6，高为 4，求它的斜高与体积。

B 应用层

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 、 G 分别是棱 A_1B_1 、 B_1C_1 、 BB_1 的中点。求证: 平面 $EFG \parallel$ 平面 ACD_1 。
- 一个棱长为 2 的正方体, 从上底面中心向下挖去一个 $1 \times 1 \times 2$ 的贯穿柱 (截面为 1×1 正方形)。求剩余几何体的体积与表面积, 并说明俯视图中该正方形轮廓线是实线还是虚线。

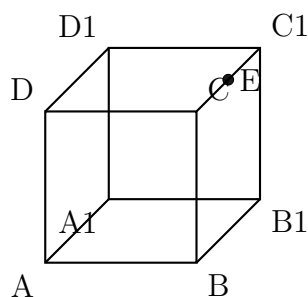


图 3.9: 配图

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$ (交线为 AB)。判断: 平面 $ABCD$ 内与 AB 平行的直线是否垂直于平面 ABB_1A_1 ? 为什么?
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值。

C 拓展层

- 棱长为 a 的正四面体, 求它的体积。(提示: 先求底面积与高)
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 用一个过棱 AB 与棱 C_1D_1 的平面去截正方体, 截面是什么形状? 截面面积是多少? 再想一想: 过一个顶点与一条体对角线的平面截正方体, 截面可能是几边形?

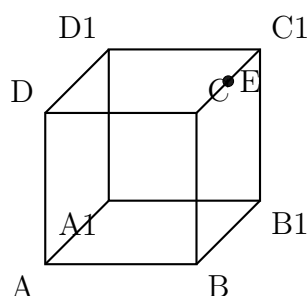


图 3.10: 配图

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- **3.1:** 平行六面体——把底面沿侧棱方向平移，四个侧棱与底面对边围成的都是平行四边形。
- **3.2:** 是棱台——两个底面平行且相似、侧面是梯形、侧棱延长交于一点，三条全中。
- **3.3:** 球: $V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$, $S = 4\pi \times 9 = 36\pi$ 。圆柱: $V = \pi \times 9 \times 4 = 36\pi$, $S = 2\pi \times 9 + 2\pi \times 3 \times 4 = 18\pi + 24\pi = 42\pi$ 。(球的体积与表面积在 $r = 3$ 时数值恰好相等)
- **3.4:** 正方形边长为 4, 原面积 16, 直观图面积 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 16 = 4\sqrt{2}$ 。(也可用底 4、高 $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ 直接算: $4\sqrt{2}$)
- **3.5:** $S = \frac{4}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = 8$ 。
- **3.6:** 正方体, $V = 8$, $S = 24$ 。
- **3.7:** A_1B_1 与 AD 异面; A_1C_1 与 BD 异面 (平移后相交于中心上方, 方向一“撇”一“捺”)。
- **3.8:** $B_1C_1 \parallel BC$, 所求角即 A_1B 与 BC 所成角 $= \angle A_1BC$ 。 $\triangle A_1BC$ 中 $A_1B = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$, $A_1C = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$, 由余弦定理

$$\cos \angle A_1BC = \frac{A_1B^2 + BC^2 - A_1C^2}{2 \cdot A_1B \cdot BC} = \frac{8 + 4 - 12}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2} = \frac{0}{8\sqrt{2}} = 0,$$

所成角为 90° , 余弦值为 0。

- **3.9:** DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $DE \parallel BC$; $BC \subset$ 平面 PBC , $DE \not\subset$ 平面 PBC , 故 $DE \parallel$ 平面 PBC 。
- **3.10:** $A_1B_1 \perp B_1B$ (正方形相邻边), $A_1B_1 \perp B_1D_1$ (上底面正方形对角线), B_1B 与 B_1D_1 相交于 B_1 , 故 $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D 。
- **3.11:** $CD \perp AD$ (矩形), $CD \perp PA$ ($PA \perp$ 底面), 故 $CD \perp$ 平面 PAD ; 又 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以平面 $PCD \perp$ 平面 PAD 。

各节练习答案

- **3.1 节:** 1. (1) 对 (侧棱延长交于一点); (2) 错 (两个棱锥底面贴底面拼出的体, 侧面三角形分属两个顶点); (3) 对。2. 母线 5, 侧面积 $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$, 高 4, 体积 $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$ 。3. 底面积 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$, 表面积 $2\sqrt{3} + 3 \times 2 \times 3 = 2\sqrt{3} + 18$, 体积 $\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 。4. $V = \frac{32}{3}\pi$, $S = 16\pi$, 比值为 $\frac{2}{3}$ 。

• **3.2 节**: 1. $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 16 = 4\sqrt{2}$. 2. $S = 8$. 3. 圆锥 (半径 1, 高 4), $V = \frac{1}{3}\pi \times 1 \times 4 = \frac{4\pi}{3}$. 4. 从正前方看是矩形 (宽 2、高 2), 从正左方看是矩形 (宽 1、高 2), 从正上方看是圆 (直径 2); 俯视图中圆的轮廓是实线, 圆柱的上下两圆从正上方看重合为一圆。

• **3.3 节**: 1. (1) 错 (还有异面); (2) 对 (两点确定一条直线); (3) 对 (公理 2). 2. AB 与 C_1D_1 平行 ($AB \parallel CD \parallel C_1D_1$); AB 与 B_1C_1 异面. 3. $D_1C_1 \parallel DC$, 所求角即 A_1B 与 DC 所成角 $= \angle A_1BC$. $\triangle A_1BC$ 中 $A_1B = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$, $A_1C = 2\sqrt{3}$, $\cos \angle A_1BC = \frac{8+4-12}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2} = 0$, 余弦值为 0 (所成角 90°).

• **3.4 节**: 1. $DE \parallel BC$ (中位线), $BC \subset$ 平面 PBC , $DE \not\subset$ 平面 PBC , 故 $DE \parallel$ 平面 PBC . 2. $AC \perp BD$ (底面正方形对角线), $AC \perp BB_1$ ($BB_1 \perp$ 底面), BD 与 BB_1 相交于 B , 故 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D . 3. $BC \perp AB$ (矩形)、 $BC \perp PA$ ($PA \perp$ 底面), 故 $BC \perp$ 平面 PAB ; $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PBC \perp$ 平面 PAB . 4. 错. 两条平行线只能“锁住”一个方向, 不能确定平面的方向; 需面内两条相交直线分别平行于另一面才够。

A1: (1) 错 (棱台侧面是梯形); (2) 对 (母线都等于定长); (3) 对 (平面截球面得圆)。

A2: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = 4\sqrt{3}$, $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 4\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

A3: 正方体, $V = 8$, $S = 24$.

A4: 异面; 异面; 相交 (AC 与 BD 在底面相交于中心)。

A5: E 、 F 是 $\triangle PAC$ 两边中点, $EF \parallel AC$; $AC \subset$ 平面 $ABCD$, $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, 故 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$.

A6: $AC \perp BD$ (正方形对角线), $AC \perp BB_1$ ($BB_1 \perp$ 底面), BD 与 BB_1 相交, 故 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D .

A7: 边心距 3, 斜高 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; 体积 $\frac{1}{3} \times 36 \times 4 = 48$.

B8: EF 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 中位线, $EF \parallel A_1C_1$, 又 $A_1C_1 \parallel AC$, 故 $EF \parallel AC$, $EF \parallel$ 平面 ACD_1 ; EG 是 $\triangle A_1B_1B$ 中位线, $EG \parallel A_1B$, 又 $A_1B \parallel D_1C$, 故 $EG \parallel CD_1$, $EG \parallel$ 平面 ACD_1 ; EF 与 EG 相交于 E , 由面面平行判定定理, 平面 $EFG \parallel$ 平面 ACD_1 .

B9: 体积 $V = 2^3 - 1 \times 1 \times 2 = 6$. 表面积: 外表面上下底面各剩 $4 - 1 = 3$, 四个外侧面各 4, 共 $2 \times 3 + 4 \times 4 = 22$; 内壁为 $1 \times 1 \times 2$ 柱的四壁, 每壁面积 $1 \times 2 = 2$, 共 8. $S = 22 + 8 = 30$. 俯视图中该小正方形轮廓是实线 (从上往下能直接看到挖出的洞, 不被遮挡)。

B10: 不垂直. 面面垂直性质定理要求“垂直于交线”, 而这条直线与交线 AB 平行. 垂直于平面 ABB_1A_1 的是面 $ABCD$ 内垂直于 AB 的那些直线 (如 AD 、 BC).

B11: $v_1 = \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, $v_2 = \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$, $\cos \theta = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1||v_2|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. (几何法: 平移 A_1B 至 D_1C , $\triangle AD_1C$? 平移后为 $\triangle D_1AC$, 在 $\triangle AD_1C$ 中 $AD_1 = AC = 2\sqrt{2}$, $D_1C = 2\sqrt{2}$, 等边三角形, 角 60° , 余弦 $\frac{1}{2}$, 两法一致)

C12: 底面是正三角形, 底面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 底面中心到顶点的距离 (外接圆半径) 为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 。
正四面体的高

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

故体积

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

C13: 截面是矩形 ABC_1D_1 ($AB \parallel C_1D_1$, $AD_1 \parallel BC_1$)。 $AB = 2$, $AD_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 面积 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 。过一个顶点与体对角线的平面截正方体, 截面是矩形 (如过 A 、 C_1 与体对角线 AC_1 的平面截得矩形 ABC_1D_1) ; 进一步探究可知正方体截面可能是三角形、四边形、五边形或六边形。

第四章 给空间装上坐标：空间向量与立体几何

章首情境

4.1 空间向量及其运算：平面向量的“升维复制”

4.1.1 空间向量的概念与线性运算：从平面升到三维

学习目标

- 理解空间向量的概念及其线性运算（加法、减法、数乘）；
- 掌握空间向量的坐标表示与模长公式；
- 掌握空间向量共线（平行）的坐标判定。

前置复习 (Be Prepared)

- 平面向量 $\vec{a} = (2, 3)$ 的模是多少？ $\vec{a} = 2\vec{b}$ 说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是什么关系？
- 平面向量加法、减法的坐标运算规则是什么？
- 长方体中从一个顶点出发的三条棱，能否“表示”体对角线？

情境引入：雷达屏上是一架飞机的三维坐标 (x, y, z) 。从塔台到飞机的位移，是一个带方向的量——空间向量。它的加减、缩放（数乘），就是“导航计算”的底层算术。

空间向量的概念

在空间中，既有大小又有方向的量叫做**空间向量**。向量 $\vec{a}$ 的模记作 $|\vec{a}|$ ；与平面向量一样，规定零向量、单位向量、相等向量、相反向量。

空间向量的线性运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, λ 为实数：

- 加法： $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ；

- 减法: $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;
- 数乘: $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$;
- 模长: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ——勾股定理从平面升到三维。

共线(平行)的坐标判定

$\vec{a} \parallel \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ 存在实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 即对应分量成比例。

How To: 判断两向量是否共线

- 观察分量是否成比例(写成分式比较, 或找 λ);
- 若存在 λ 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b} \rightarrow$ 共线;
- 三点共线问题: 转化为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线。

例题 4.1

(线性运算与模长)

已知 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 0)$ 。求:

(1) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; (2) $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$; (3) $\vec{a} - 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 是否共线?

解: (1) $2\vec{b} = (-2, 0, 4)$, 故

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (1 - 2 - 2, 2 + 0 + 1, 3 + 4 - 0) = (-3, 3, 7).$$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$ 。(3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1 + 2, 2 - 0, 3 - 4) = (3, 2, -1)$ 。若 $\vec{a} - 2\vec{b} = \lambda \vec{c}$, 则 λ 须同时满足 $3 = 2\lambda$ ($\lambda = \frac{3}{2}$)、 $2 = -\lambda$ ($\lambda = -2$), 矛盾, 故不共线。

Try It 4.1: 已知 $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, 2)$, 求 $2\vec{a} - \vec{b}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (下一节学)、 $|\vec{a}|$ 。

4.1.2 数量积: 角度与长度的“算术封装”

学习目标

- 掌握空间向量数量积的定义、坐标公式与运算律;
- 会用数量积求两向量夹角、判断垂直;
- 会用 $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2$ 等公式进行模的运算。

前置复习: 平面向量夹角公式 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 成立的条件是什么?

数量积的定义

已知两个非零空间向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，它们的夹角为 θ ($\theta \in [0, \pi]$)，则数量积为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

坐标公式： $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ 。

由数量积可以推出：

- 夹角公式： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ ；
- 垂直判定： $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ；
- 模长： $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ，且 $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 。

How To： 用数量积求夹角

- 写出两向量的坐标（起点相同点法：终点减起点）；
- 计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ ；
- 代入 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。

例题 4.2

（数量积、垂直与夹角）（1）已知 $\vec{a} = (2, 1, -2)$ ， $\vec{b} = (1, 0, 1)$ ，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；（2）已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (x, -1, 2)$ 互相垂直，求 x 。

解：（1） $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 - 2 = 0$ ，故 $\cos \theta = 0$ ， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，两向量垂直。（2）由 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x - 2 + 4 = x + 2 = 0$ ，解得 $x = -2$ 。

Try It 4.2： 已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1, 0)$ ，求 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 。

Q&A

- 问： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 能推出 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ 吗？

答：不能。比如 $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, -1, 0)$ ，点积为零但两个都不为零——这正是“垂直”的代数特征。

- 问： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 能推出 $\vec{b} = \vec{c}$ 吗？

答：不能。移项得 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ ，只说明 $\vec{b} - \vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 垂直。向量没有除法，也没有“消去律”。

想一想：空间向量的加法满足交换律、结合律、分配律吗？（提示：平面向量的运算律在空间逐分量照搬，全部成立）

本节练习（答案见章末）

- 已知 $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, 2)$, 求 $2\vec{a} - \vec{b}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $|\vec{a}|$ 。
- 已知 $\vec{a} = (2, -1, 1)$ 与 $\vec{b} = (1, x, -1)$ 垂直, 求 x 。
- 判断 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 与 $\vec{b} = (2, 4, 5)$ 是否共线。
- 已知 $A(1, 2, 0)$, $B(3, 2, 1)$, $C(5, 2, 2)$, 判断三点是否共线。

4.2 空间向量基本定理与坐标化：给空间装上“尺子和量角器”

4.2.1 空间向量基本定理：三根“尺子”卡出整个空间

学习目标

- 理解空间向量基本定理与共面向量定理；
- 会用共面向量定理判断四点共面；
- 理解基底的概念，能选择合适的基底表示向量。

前置复习：平面向量基本定理的内容是什么？“平面向量 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ”里， $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 需要满足什么条件？

空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ **不共面**，那么空间中任意一个向量 $\vec{p}$ 都可以**唯一**地表示为

$$\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

其中 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 叫做空间的一个**基底**， x, y, z 叫做 $\vec{p}$ 在基底下的坐标。

共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线，则向量 $\vec{p}$ 与 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在**唯一**的有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 。

四点共面的坐标判定：四点 A 、 B 、 C 、 D 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 x, y ，使

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

How To：判断四点共面

- 固定一点（通常取 A ），写出 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ （或 $\overrightarrow{AP}$ ）；
- 解方程 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ （三元一次方程组）；
- 有解 $\rightarrow$ 共面；无解 $\rightarrow$ 不共面。

例题 4.3

(共线共面判定, 对抗 M8)

(1) 判断 $\vec{a} = (2, 4, 6)$ 与 $\vec{b} = (1, 2, 3)$ 是否共线; (2) 已知四点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(1, 0, 1)$, 判断四点是否共面。

解: (1) $\vec{a} = 2(1, 2, 3) = 2\vec{b}$, 故共线。(2) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 1)$ 。设 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 即

$$x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) = (x, x + y, y) = (1, 0, 1).$$

由第三分量 $y = 1$, 由第二分量 $x + y = 0$ 得 $x = -1$, 代回第一分量 $x = -1 \neq 1$, 矛盾, 故方程组无解, 四点**不共面**。(几何验证: 这四点恰是一个正四面体的四个顶点, 两两距离相等, 当然不共面。) ■

Try It 4.3: 已知 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(1, 2, 1)$, 判断四点是否共面。

想一想 (对抗 M8): 若 P 与 A 重合 (即 $P = A$), “ $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ” 还成立吗? 它能否说明 A, B, C, P 共面? (提示: $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$, 取 $x = y = 0$ 即成立, 但四个点“退化”成三个点——这是退化情形, 不能当真共面来用)

4.2.2 建系三原则: 坐标系怎么选, 成绩差一半

学习目标

- 掌握建系三原则: 找两两垂直的三线交于一点, 让点落在轴上、优先用底边/高线当轴;
- 能规范书写“建系 + 写点坐标”;
- 掌握求平面法向量的标准算法。

前置复习: 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 从顶点 A 出发的三条棱, 能不能建立空间直角坐标系? 坐标轴分别是什么?

建系三原则

- **找交点:** 找到三条两两垂直的直线, 让它们交于一点作为原点;
- **让点落轴:** 尽量让关键点落在坐标轴上 (坐标简单);
- **优先天然轴:** 长方体的三条棱、直棱柱的底面边与高、正棱锥的底面中心连线与底面两条对角线——都是现成的坐标系。

例题 4.4

(建系与写点坐标, 对抗 M5)

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧棱长 4。建立空间直角坐标系，写出各顶点的坐标。

解：以 A 为原点， $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $Axyz$ 。各顶点坐标： $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$,

$$A_1(0,0,4), B_1(2,0,4), C_1(2,2,4), D_1(0,2,4).$$

例题 4.5

(求法向量，对抗 M6)

在例题 4.4 的坐标系中，求平面 A_1BD 的一个法向量。

解：面 A_1BD 内取两个不共线向量：

$$\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -4), \quad \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -4).$$

设法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 2x - 4z = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 2y - 4z = 0.$$

解得 $x = 2z$, $y = 2z$ 。取 $z = 1$ ，得 $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 。■

Try It 4.4: 在例题 4.4 的坐标系中，求平面 B_1D_1C 的一个法向量。

Q&A

- 问：法向量可以随便取吗？取不同倍数会影响后面算角、算距离的结果吗？

答：取法向量只要乘非零常数，分子分母同时缩放，点积公式、距离公式结果不变。放心取，但做题时全卷用一个固定的取法，免得改来改去抄错。

- 问：所有平面都有法向量吗？

答：有。任何平面都有两个方向的法向量（互为相反数），而且任意非零倍数也算——“法向量”是平面这个“胖对象”在向量语言里的化身。

本节练习（答案见章末）

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，以 A 为原点建系，写出体对角线 AC_1 的方向向量与中点 O 的坐标。
- 在例题 4.4 的直四棱柱中，求平面 B_1BDD_1 的一个法向量。
- 判断四点 $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$, $D(1,0,1)$ 是否共面。
- 平面 α 过 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,1)$ ，平面 β 过 O 、 $C(0,1,0)$ 、 $D(0,0,1)$ 。分别求 α 、 β 的法向量，并判断两平面是否垂直。

4.3 用向量研究位置关系：把判定定理“算法化”

学习目标

- 理解直线的方向向量、平面的法向量的含义；
- 掌握用向量判定线面平行、线面垂直、面面垂直的方法；
- 能规范书写“向量法”证明过程（含“直线不在面内”的检查）。

前置复习：回顾第 3 章线面平行判定定理的三个条件；线面垂直判定定理要求平面内几条相交直线？

方向向量与法向量

- 与直线 l 平行的非零向量叫做 l 的**方向向量**（直线 $\longleftrightarrow$ 方向向量，一维对象一个向量就够了）；
- 与平面 α 垂直的非零向量叫做 α 的**法向量**（平面 $\longleftrightarrow$ 法向量，平面太“胖”，用垂直于它的向量来描述）。

位置关系的向量判定

位置关系	向量条件
线面平行 $l \parallel \alpha$	方向向量 $\vec{v}$ 与法向量 $\vec{n}$ 满足 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ，且 l 不在 α 内
线面垂直 $l \perp \alpha$	$\vec{v} \parallel \vec{n}$ （分量成比例）
面面平行 $\alpha \parallel \beta$	法向量 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
面面垂直 $\alpha \perp \beta$	法向量 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

How To：向量法证明线面平行

- 建系，写出直线 l 上两点的坐标，得方向向量 $\vec{v}$ ；
- 求平面 α 的法向量 $\vec{n}$ ；
- 验证 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ；
- 关键一步：**取 l 上一点代入平面方程（或说明该点不在面内），确认 $l \not\subset \alpha$ 。

例题 4.6

（向量法证线面平行，对抗 M7）

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2， E 为棱 CC_1 的中点。用向量法证明： $AC_1 \parallel$ 平面 BDE 。

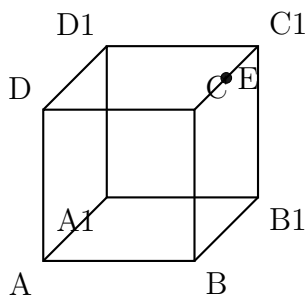


图 4.1: 配图

证明: 以 A 为原点建立坐标系, 则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $C_1(2,2,2)$, $E(2,2,1)$ 。直线 AC_1 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AC_1} = (2,2,2)$ 。平面 BDE 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{BE} = (0,2,1)$ 。设法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y.$$

取 $x = 1$, 得 $\vec{n} = (1,1,-2)$ 。验证 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 + 2 - 4 = 0$ 。再检查直线不在面内: 平面 BDE 过点 $B(2,0,0)$, 其方程由 $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{BX}) = 0$ 得 $(x-2) + y - 2z = 0$, 即 $x + y - 2z = 2$ 。代入 $A(0,0,0)$ 得 $0 \neq 2$, 故 $A \notin$ 平面 BDE , $AC_1 \not\subset$ 平面 BDE 。由向量判定条件, $AC_1 \parallel$ 平面 BDE 。■

Try It 4.5: 在例题 4.6 的正方体中, F 为棱 AA_1 的中点, 用向量法判断直线 B_1F 与平面 BDE 是否平行。

例题 4.7

(向量法证线面垂直与面面垂直, 对抗 M10)

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 4。求证: $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ; 并判断平面 A_1C_1C 与平面 BDD_1B_1 是否垂直。

证明: 沿用例题 4.4 的坐标系。 A_1C_1 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{A_1C_1} = (2,2,0)$ 。平面 BDD_1B_1 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0,0,4)$ 。设法向量 $\vec{n}_1 = (x,y,z)$:

$$-2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x, \quad 4z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

取 $\vec{n}_1 = (1,1,0)$ 。则 $\vec{v} = 2\vec{n}_1$, 即 $\vec{v} \parallel \vec{n}_1$, 故 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 (且 A_1C_1 穿过该面, 中点在面内, A_1C_1 确为该面的垂线)。■ 平面 A_1C_1C 内取 $\overrightarrow{A_1C} = (2,2,-4)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2,2,0)$ 。设法向量 $\vec{n}_2 = (x,y,z)$:

$$2x + 2y - 4z = 0, \quad 2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

代回得 $z = 0$, 取 $\vec{n}_2 = (1,-1,0)$ 。则 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 = 0$, 两法向量垂直, 故平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。■

Try It 4.6: 在例题 4.7 的直四棱柱中, 用向量法判断直线 A_1C 与平面 C_1BD 的位置关系 (提示: A_1C 方向 $(2,2,-4)$, C_1BD 法向量 $(1,1,-1)$)。

练一练：把两个条件并排写：线面平行 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 与线面垂直 $\vec{v} \parallel \vec{n}$ 。判断：直线 l 的方向向量 $\vec{v} = (2, -1, 3)$ ，平面 α 的法向量 $\vec{n} = (4, -2, 6)$ ， l 与 α 是什么关系？（提示： $\vec{n} = 2\vec{v}$ ，成比例 $\rightarrow$ 垂直）

本节练习（答案见章末）

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2， E 为棱 CC_1 的中点，用向量法证明 $AC_1 \parallel$ 平面 BDE 。
- 在例题 4.7 的直四棱柱中，用向量法判断直线 A_1C 与平面 C_1BD 的位置关系。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，用向量法证明：平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。

4.4 空间角：线线角、线面角、二面角

4.4.1 线线角与线面角：正弦等于余弦，别搞反

学习目标

- 掌握线线角的向量公式： $\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$ （取绝对值）；
- 掌握线面角的向量公式： $\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$ ；
- 明确三种角的范围：线线角、线面角 $\in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，二面角 $\in [0, \pi]$ 。

前置复习：异面直线所成角的范围；线面角的定义（斜线与射影的夹角）。

线线角

设直线 l_1 、 l_2 的方向向量为 $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ ，则 l_1 与 l_2 所成角 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

线面角

设直线 l 的方向向量为 $\vec{v}$ ，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$ ， $\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 φ ，则 l 与 α 所成角 θ 满足

$$\sin \theta = |\cos \varphi| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

例题 4.8

（线线角，对抗 M2）

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值。

解：以 A 为原点建系， $A_1(0,0,2)$ ， $B(2,0,0)$ ， $D_1(0,2,2)$ 。方向向量 $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1B} = (2,0,-2)$ ， $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AD_1} = (0,2,2)$ 。

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 + 0 - 4 = -4, \quad |\vec{v}_1| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_2| = 2\sqrt{2}.$$

线线角取锐角，加绝对值：

$$\cos \theta = \frac{|-4|}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

所以所成角的余弦值为 $\frac{1}{2}$ （即 60° ）。（与第 3 章平移法的结果一致，一题双解互相印证）■

Try It 4.7: 正方体棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值。

例题 4.9

（线面角，对抗 M1）

正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，顶点到底面的高为 3。求侧棱 PA 与底面所成角的正弦值。

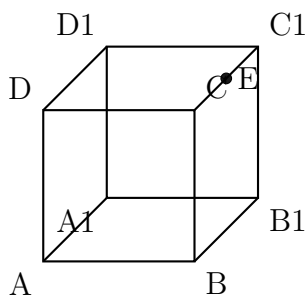


图 4.2: 配图

解：设底面中心为 O ，以 O 为原点， OP 为 z 轴建立坐标系。则 $P(0,0,3)$ ， $A(1,1,0)$ （底面边长 2，中心到顶点距离 $\sqrt{2}$ ，取坐标 $(1,1,0)$ ）。侧棱 PA 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{PA} = (1,1,-3)$ ，底面的法向量 $\vec{n} = (0,0,1)$ 。

$$\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

（几何验证： $AO = \sqrt{2}$ ， $PO = 3$ ， $\tan \theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ，故 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$ ，结果一致。）

■

Try It 4.8: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求直线 A_1B 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值。

想一想：若直线 l 在平面 α 内， l 与 α 所成角是多少？若 $l \perp \alpha$ 呢？（提示：面内线所成角为 0，垂线为 $\frac{\pi}{2}$ ，正好是 $\sin \theta$ 的两个端点）

4.4.2 二面角：相等还是互补，判号定生死

学习目标

- 理解二面角与两个法向量夹角“相等或互补”的关系；
- 掌握二面角余弦值的判号方法（观察法 / 平面角验证 / 法向量指向）；
- 会求二面角的余弦值与正弦值。

前置复习：二面角的平面角怎么作？它的范围是多少？

二面角的向量公式

设二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个半平面的法向量为 $\vec{n}_1$ 、 $\vec{n}_2$ ， $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角为 φ ，则二面角 θ 与 φ **相等或互补**：

$$\cos \theta = \pm |\cos \varphi| = \pm \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

判号三法：

- **观察法：**看图估计二面角是锐角还是钝角；
- **平面角验证：**在棱上取点作平面角，用三角形算一次；
- **法向量指向：**一个法向量指向面内侧、另一个指向面外侧 $\rightarrow$ 二面角与 φ 相等；两个同向（都指向内侧或都指向外侧） $\rightarrow$ 互补。

例题 4.10

（二面角判号，对抗 M3、M11）

直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AA_1 = 4$ 。求平面 A_1BC 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值。

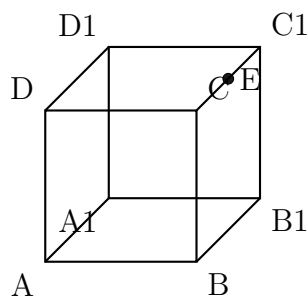


图 4.3: 配图

解：以 C 为原点， CA 、 CB 、 CC_1 分别为 x 、 y 、 z 轴建系。则 $A(3, 0, 0)$ ， $B(0, 4, 0)$ ， $A_1(3, 0, 4)$ ， $C(0, 0, 0)$ 。平面 ABC 就是 xOy 面，取法向量 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ 。平面 A_1BC 内取 $\vec{CA_1} = (3, 0, 4)$ ， $\vec{CB} = (0, 4, 0)$ 。设法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ ：

$$3x + 4z = 0, \quad 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

取 $x = 4, z = -3$, 得 $\vec{n}_2 = (4, 0, -3)$ 。计算 $|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |-3| = 3, |\vec{n}_1| = 1, |\vec{n}_2| = 5$, 故

$$|\cos \varphi| = \frac{3}{5}.$$

判号：由三垂线定理， $A_1C \perp BC$ (A_1C 在底面射影 $AC \perp BC$)，故平面角为 $\angle A_1CA$ 。在 $\triangle A_1CA$ 中 $A_1C = 5, AC = 3, A_1A = 4, \cos \angle A_1CA = \frac{AC}{A_1C} = \frac{3}{5}$ ，为锐角。所以二面角的余弦值 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ (取正号)。(注意：直接算 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -3$ ，若把它当成答案会得到 $-\frac{3}{5}$ ，这就错了——因为 $\vec{n}_1$ 指向上方、 $\vec{n}_2 = (4, 0, -3)$ 指向下方，一内一外，二面角与 φ 互补， $\cos \theta = -(-|\cos \varphi|)$ 应取正。) ■

Try It 4.9：正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值。

Q&A

- **问：**为什么线线角、线面角都取 $[0, \frac{\pi}{2}]$ ，二面角却是 $[0, \pi]$ ？

答：线线、线面角的定义里就规定了取锐角（或直角）；二面角是“两个半平面张开的程度”，可以超过 90° （比如翻开的书页几乎摊平，二面角接近 π ）。正因如此，二面角才需要“判号”。

- **问：**判号判错了怎么办？有保险的做法吗？

答：最保险的是**平面角验证**——在棱上取一点，用几何法算出平面角的余弦，再与向量法的绝对值对照。解答题里写出这一步，既保证正确又体现“几何直觉 + 代数计算”双轨。

练一练：两个法向量夹角为 60° 。二面角可能是多少度？各在什么情况下取到？（提示：相等取 60° ，互补取 120° ——正是 M11 要你警惕的情形）

本节练习（答案见章末）

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值。
- 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 2 的正方形，侧棱长 4。求直线 A_1C 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值。
- 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, AC = 3, BC = 4, AA_1 = 4$ 。求平面 A_1BC 与平面 ABC 所成二面角的正弦值。
- 正四棱锥底面边长为 2，侧棱 PA 与底面所成角的正弦值为 $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ，求该正四棱锥的高。

4.5 空间距离：点到面、点到线、异面直线

4.5.1 点到平面的距离：一条公式通吃三类距离

学习目标

- 掌握点到平面距离公式 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}$ 及其推导；

- 明确 $\overrightarrow{PA}$ 的写法 (A 在面内、 P 在面外, $\overrightarrow{PA} = A - P$);
- 掌握等体积法验算点面距离。

点到平面的距离

设平面 α 的法向量为 $\vec{n}$, A 是平面内一点, P 是平面外一点, 则点 P 到平面 α 的距离为

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}.$$

How To: 求点到平面的距离

- 求平面的法向量 $\vec{n}$ (解方程, 取整数分量);
- 在平面内取一点 A , 写出 $\overrightarrow{PA}$ (P 为面外点);
- 代入公式 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}$;
- 用等体积法 (或几何法) 验算。

例题 4.11

(点到平面距离, 对抗 M4)

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 4。求点 C_1 到平面 A_1BD 的距离。

解: 沿用例题 4.4 的坐标系。平面 A_1BD 的法向量在例题 4.5 中已求出: $\vec{n} = (2, 2, 1)$, $|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$ 。取面内点 $A_1(0, 0, 4)$, 面外点 $C_1(2, 2, 4)$, 则 $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$ 。

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 4 + 4 + 0 = 8,$$

故

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{8}{3}.$$

等体积法验算: 四面体 $C_1 - A_1BD$ 的体积 V , 用行列式或补形得 $V = \frac{16}{3}$; $\triangle A_1BD$ 中 $A_1B = A_1D = 2\sqrt{5}$, $BD = 2\sqrt{2}$, 其面积

$$S_{\triangle A_1BD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6.$$

由 $V = \frac{1}{3} Sd$ 得 $d = \frac{3 \times \frac{16}{3}}{6} = \frac{8}{3}$, 与向量法一致。■

Try It 4.10: 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求点 A_1 到平面 B_1BDD_1 的距离。

4.5.2 点到直线与异面直线距离: 叉积与投影

学习目标

- 掌握点到直线的距离公式（叉积法）；
- 掌握异面直线距离的向量投影法；
- 理解“距离 = 法方向上的投影”的统一思想。

前置复习： 向量叉积的几何意义； $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 表示什么？（平行四边形的面积）

点到直线的距离

设点 P ，直线上两点 A, B ，则 P 到直线 AB 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

（分子是 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 张成的平行四边形面积，除以底边 AB 得高。）

异面直线的距离

设异面直线 l_1, l_2 的方向向量为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ，取公法向量 $\vec{n} \perp \vec{v}_1$ 且 $\vec{n} \perp \vec{v}_2$ ，在 l_1, l_2 上分别取点 P, Q ，则 l_1 与 l_2 的距离为

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}.$$

例题 4.12

（点到直线距离，对抗 M9）

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求点 A 到直线 B_1D_1 的距离。

解： 以 A 为原点建系， $A(0,0,0)$ ， $B_1(2,0,2)$ ， $D_1(0,2,2)$ 。

$$\overrightarrow{AB_1} = (2, 0, 2), \quad \overrightarrow{AD_1} = (0, 2, 2), \quad \overrightarrow{B_1D_1} = (-2, 2, 0).$$

先算叉积（行列式展开）：

$$\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -4, 4).$$

其模 $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1}| = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$ ，而 $|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ ，故

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1}|}{|\overrightarrow{B_1D_1}|} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

（几何验证： $AB_1 = AD_1 = B_1D_1 = 2\sqrt{2}$ ， $\triangle AB_1D_1$ 是等边三角形， A 到边 B_1D_1 的高 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$ ，一致。）■

Try It 4.11： 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求异面直线 AB 与 A_1D_1 的距离。（提示：公法向量是 AA_1 方向 $(0,0,1)$ ）

Q&A

- 问：线面距离、面面距离怎么求？

答：前提是“平行”（线面平行 / 面面平行）。此时线（或面）上任意一点到另一平面的距离都相等，取一个“顺眼”的点，转成点到平面距离，用同一条公式。

- 问：异面直线距离的公法向量怎么求？

答：解方程组： $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = 0$ 且 $\vec{n} \cdot \vec{v}_2 = 0$ （这正是求平面法向量的老办法），再取 l_1 、 l_2 上各一点 P 、 Q 代入投影公式。

想一想（对抗 M9）：求异面直线距离时，若你“画”出的公垂线段不是垂直于其中一条直线，问题出在哪？向量法为什么能绕开这个坑？（提示：向量法不找公垂线段，直接算投影——这是几何直觉不足时的“保险丝”）

本节练习（答案见章末）

- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求点 C_1 到平面 A_1BD 的距离。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求点 A 到直线 B_1D_1 的距离。
- 三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = 2$ ， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 1$ 。用等体积法求点 A 到平面 PBC 的距离。

本章回顾

概念地图

· 空间向量：既有大小又有方向的量 · 坐标 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ · 线性运算：加减/数乘逐分量 · 模 $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ · 数量积： $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ · 平行/垂直坐标语言： $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}$ （成比例）· $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ · 基本定理：三个不共面向量组成基底，任意向量可唯一线性表示 · 共面向量： $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \iff$ 四点共面 · 建系三原则：两两垂直三线交于一点 · 点落轴 · 底边/高线作轴 · 方向向量 $\longleftrightarrow$ 直线 · 法向量 $\longleftrightarrow$ 平面（ n 不唯一） · 位置关系向量判定：线面平行 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 且线不在面内 · 线面垂直 $\vec{v} \parallel \vec{n}$ · 面面垂直 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ · 角：线线角 $\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$ · 线面角 $\sin\theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$ · 二面角 $\cos\theta = \pm \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ （判号） · 距离：点面 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PA}|}{|\vec{n}|}$ · 点线 $d = \frac{|\vec{PA} \times \vec{PB}|}{|\vec{AB}|}$ · 异面直线投影法 · 统一视角：距离 = 法方向上的投影 · 三种角 = 同一“点积公式”的三个变体

关键公式速查

内容	要点
向量运算	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$, $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
模与数量积	$ \vec{a} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
平行/垂直	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
线线角	$\cos \theta = \frac{ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 }{ \vec{v}_1 \vec{v}_2 }$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
线面角	$\sin \theta = \frac{ \vec{v} \cdot \vec{n} }{ \vec{v} \vec{n} }$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
二面角	$\cos \theta = \pm \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 }$, $\theta \in [0, \pi]$, 判号用观察/平面角/指向
点到面距离	$d = \frac{ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} }{ \vec{n} }$ (A 在面内)
点到线距离	$d = \frac{ \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} }{ \overrightarrow{AB} }$
异面直线距离	公法向量 $\vec{n} \perp \vec{v}_1, \vec{v}_2$, $d = \frac{ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} }{ \vec{n} }$

分层练习

A 基础层

- 已知 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, -1)$, 求 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。
- 判断 $\vec{a} = (-2, 1, 4)$ 与 $\vec{b} = (6, -3, -12)$ 是否共线。
- 判断四点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(1, 2, 1)$ 是否共面。
- 平面过 $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 2)$, 求它的一个法向量。
- 已知 $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, 0, -2)$, 判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否垂直。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求直线 A_1B 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求点 A_1 到平面 B_1BDD_1 的距离。

B 应用层

- 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 2 的正方形, 侧棱长 4。用向量法证明: 平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的正弦值。
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 求异面直线 AB 与 A_1D_1 的距离。

C 拓展层

- 已知 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, 若 $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, 且 $|\vec{c}| = \sqrt{6}$, 求 $\vec{c}$ 。

- 三棱锥 $O-ABC$ 中, OA 、 OB 、 OC 两两垂直且都等于 a 。用向量法求平面 ABC 的法向量与点 O 到平面 ABC 的距离, 并用等体积法验证。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 4.1: $2\vec{a} - \vec{b} = (2, 4, -2) - (0, 3, 2) = (2, 1, -4)$; $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0+6-2=4$ 。
- 4.2: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2+2+0=4$, $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4}=3$, $|\vec{b}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, $\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$ 。
- 4.3: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 1)$ 。 $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (x, x+y, y) = (1, 2, 1)$: $x=1$, $y=1$, $x+y=2$, 三式全部成立, 故四点共面。(事实上 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$)
- 4.4: 面 B_1D_1C 内取 $\overrightarrow{B_1D_1} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{B_1C} = (0, 2, -4)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$: $-2x+2y=0 \Rightarrow y=x$; $2y-4z=0 \Rightarrow z=\frac{y}{2}$ 。取 $x=2$: $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 。
- 4.5: $F(0, 0, 1)$, B_1F 方向向量 $\vec{v} = (2, 0, 1)$; 面 BDE 法向量 $\vec{n} = (1, 1, -2)$ (例题 4.6)。 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2+0-2=0$ 。取 $B_1(2, 0, 2)$ 代入面方程 $x+y-2z=2$: $2+0-4=-2 \neq 2$, 不在面内。故 $B_1F \parallel$ 平面 BDE 。
- 4.6: A_1C 方向 $(2, 2, -4)$, 面 C_1BD 法向量 $(1, 1, -1)$ (由 $\overrightarrow{C_1B} = (0, -2, -2)$ 、 $\overrightarrow{C_1D} = (-2, 0, -2)$ 解得)。 $(2, 2, -4) = 2(1, 1, -2)$ 与 $(1, 1, -1)$ 不成比例; $(2, 2, -4) \cdot (1, 1, -1) = 2+2+4=8 \neq 0$ 。故 A_1C 与面 C_1BD 相交 (既不平行也不垂直)。
- 4.7: $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$ 。 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4$, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 2\sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 。
- 4.8: $\vec{v} = \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, 底面法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 。 $\sin\theta = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- 4.9: 面 A_1BD 法向量 $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$; 面 C_1BD 法向量 $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ (由 $\overrightarrow{C_1B} = (0, -2, -2)$ 、 $\overrightarrow{C_1D} = (-2, 0, -2)$ 解得)。 $|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |1+1-1|=1$, $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = \sqrt{3}$, $|\cos\varphi| = \frac{1}{3}$ 。取 BD 中点 $O(1, 1, 0)$ 作平面角验证: $A_1O = C_1O = \sqrt{6}$, $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$, $\cos\angle A_1OC_1 = \frac{6+6-8}{2 \times 6} = \frac{1}{3}$, 为锐角。故二面角余弦值为 $\frac{1}{3}$ 。
- 4.10: 面 B_1BDD_1 即 $x+y=2$, 法向量 $\vec{n} = (1, 1, 0)$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$ 。取面内点 $B(2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BA_1} = (-2, 0, 2)$ 。 $d = \frac{|-2+0+0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 。

- 4.11: AB 方向 $(1, 0, 0)$, A_1D_1 方向 $(0, 1, 0)$, 公法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ (AA_1 方向)。取 $P = A(0, 0, 0)$, $Q = A_1(0, 0, 2)$, $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 2)$ 。 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{1} = 2$ 。(几何上即棱 AA_1 的长 2)

各节练习答案

- 4.1 节: 1. $2\vec{a} - \vec{b} = (2, 1, -4)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 6 - 2 = 4$; $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ 。 2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - x - 1 = 0$, $x = 1$ 。 3. 不成比例 ($\frac{1}{2} \neq \frac{2}{4}$ 或直接验证无 λ), 不共线。 4. $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 0, 2) = 2\overrightarrow{AB}$, 共线。
- 4.2 节: 1. $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2)$, O 为 AC_1 中点 $O(1, 1, 1)$ 。 2. 面 B_1BDD_1 : 取 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 4)$, 法向量 $\vec{n} = (1, 1, 0)$ 。 3. 不共面 (例题 4.3 已证: 方程组无解)。 4. α 法向量: $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 1)$, 解得 $\vec{n}_\alpha = (0, 1, -1)$; β : $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OD} = (0, 0, 1)$, 解得 $\vec{n}_\beta = (1, 0, 0)$ 。 $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$, 两平面垂直。
- 4.3 节: 1. 同例题 4.6 完整过程: $\vec{v} = (2, 2, 2)$, $\vec{n} = (1, 1, -2)$, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 且 $A(0, 0, 0)$ 不满足面方程 $x + y - 2z = 2$, 故平行。 2. $A_1C = (2, 2, -4)$, 面 C_1BD 法向量 $(1, 1, -1)$, $(2, 2, -4)$ 与 $(1, 1, -1)$ 不成比例且点积 $8 \neq 0$, 故 A_1C 与面 C_1BD 相交。 3. 面 A_1C_1C 法向量 $(1, -1, 0)$, 面 BDD_1B_1 法向量 $(1, 1, 0)$, 点积 0, 两平面垂直。
- 4.4 节: 1. $\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ 。 2. $A_1C = (2, 2, -4)$, 底面法向量 $(0, 0, 1)$, $\sin \theta = \frac{4}{\sqrt{4+4+16}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。 3. 例题 4.10 已求余弦 $\frac{3}{5}$, 故正弦 $\frac{4}{5}$ 。 4. $AO = \sqrt{2}$, $\tan \theta = \frac{h}{\sqrt{2}}$, $\sin \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$, 解得 $\frac{h^2}{h^2+2} = \frac{9}{11}$, $h = 3$ 。
- 4.5 节: 1. 面 A_1BD 法向量 $(1, 1, 1)$ (由 $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -2)$ 解得), $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$, $d = \frac{|2+2+0|}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。 2. $d = \sqrt{6}$ (例题 4.12)。 3. 等体积法: $V_{A-PBC} = V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$ 。 $S_{\triangle PBC}$: $PB = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$, $PC = \sqrt{5}$, $BC = 1$, $\cos B = \frac{6+1-5}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\sin B = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 1 \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。 $d = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。(向量法验证: 面 PBC 法向量 $(2, 0, -1)$, $\overrightarrow{CA} = (1, 0, 0)$, $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 一致)

A1: $2\vec{a} - 3\vec{b} = (2, -2, 4) - (6, 0, -3) = (-4, -2, 7)$; $|\vec{a}| = \sqrt{6}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 - 2 = 0$ (垂直)。

A2: $\vec{b} = -3\vec{a}$, 共线。

A3: $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1)$, 故 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 四点共面。

A4: $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 2)$ 。 设 $\vec{n} = (x, y, z)$: $-x + y = 0$, $-x + 2z = 0$ 。 取 $x = 2$: $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 。

A5: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 0 - 6 = 0$, 垂直。

A6: $\vec{v} = \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, 底面法向量 $(0, 0, 1)$, $\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

A7: 面 B_1BDD_1 法向量 $(1, 1, 0)$, $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 。

B8: 面 A_1C_1C 法向量 $(1, -1, 0)$, 面 BDD_1B_1 法向量 $(1, 1, 0)$, 点积为零, 两平面垂直。

B9: $|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{3}$, 平面角验证为锐角, 二面角余弦值 $\frac{1}{3}$ 。

B10: 面 A_1B_1CD 法向量 $\vec{n} = (0, 1, 1)$ (由 $\overrightarrow{A_1B_1} = (2, 0, 0)$ 、 $\overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -2)$ 解得), $\vec{v} = (2, 0, -2)$, $\sin \theta = \frac{|-2|}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ 。

B11: $d = 2$ (Try It 4.11)。

C12: $\vec{c} \cdot \vec{a} = x + y = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = y + z = 0$, 故 $x = -y$, $z = -y$, $\vec{c} = y(-1, 1, -1)$, $|\vec{c}| = |y|\sqrt{3} = \sqrt{6}$, $y = \pm\sqrt{2}$, $\vec{c} = \pm\sqrt{2}(-1, 1, -1)$ 。

C13: 以 O 为原点建系, $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ 。 $\overrightarrow{AB} = (-a, a, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, a)$, 解得面 ABC 法向量 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 。 $\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$, $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}|}{|\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 。等体积验证:

$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a = \frac{a^3}{6}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $d = \frac{3V}{S} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, 一致。

第五章 用方程画世界：直线与圆的方程

章首情境

5.1 直线的倾斜角与斜率：给直线装“指纹”

学习目标

- 理解倾斜角的定义，知道其取值范围 $[0, \pi)$ ；
- 掌握斜率的定义 $k = \tan \alpha$ ，会求直线的斜率；
- 知道斜率不存在（倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ ）的情形，并能正确处理。

前置复习 (Be Prepared)

- 在直角三角形中， $\tan 30^\circ$ 、 $\tan 45^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 分别等于多少？
- 一次函数 $y = 2x + 1$ 的图象上， x 每增加 1， y 增加多少？这个数是什么？
- 过两点 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 6)$ ，横坐标增加 2 时纵坐标增加多少？它们的比值是多少？

5.1.1 倾斜角与斜率：陡不陡，一个数说清

情境引入：三条滑梯，起点高度相同，落点一个比一个远。哪条最陡？直觉告诉你“越接近竖直越陡”。数学要把它变成数：先定一条标准线—— x 轴，再看直线与 x 轴正向的夹角。

倾斜角的定义

当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴**正向**为基准，直线 l 向上的方向与 x 轴正向所成的角 α 叫做直线 l 的**倾斜角**。当直线与 x 轴平行或重合时，规定倾斜角为 0。倾斜角的取值范围是

$$\alpha \in [0, \pi)$$

斜率的定义

一条直线的**倾斜角** α 的**正切值**叫做这条直线的**斜率**，通常用小写字母 k 表示，即

$$k = \tan \alpha \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$$

两点间的斜率公式

已知直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，则

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

How To: 由两点求斜率

- 检查 $x_1 \neq x_2$ (若 $x_1 = x_2$ ，则斜率不存在，直线垂直于 x 轴，先判断再代公式)；
- 纵坐标之差作分子，横坐标之差作分母；
- 计算比值，必要时化简。

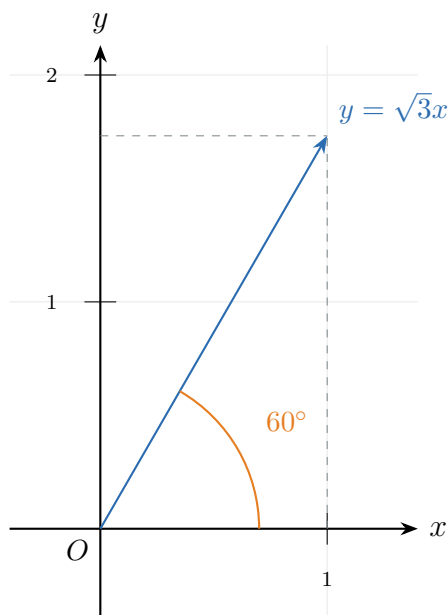


图 5.1: 直线的倾斜角与斜率

例题 5.1

(由两点求斜率与倾斜角)

求下列直线的斜率；若斜率存在，再判断倾斜角是锐角还是钝角：

(1) 过 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 6)$ 的直线；(2) 过 $C(-1, 3)$ 、 $D(-1, 7)$ 的直线；(3) 过 $E(0, 1)$ 、 $F(2, 0)$ 的直线。

解：(1) $x_1 \neq x_2$, $k = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 > 0$ 。斜率大于 0，倾斜角为锐角 (约 63.4°)。 (2) $x_1 = x_2 = -1$ ——两点横坐标相同，直线垂直于 x 轴，**斜率不存在**，倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 。 (3) $k = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2} < 0$ 。斜率小于 0，倾斜角为钝角 (约 153.4°)。

Try It 5.1: 求过 $P(2, -1)$ 、 $Q(5, 3)$ 的直线的斜率，并判断倾斜角是锐角还是钝角。

例题 5.2

(由倾斜角求斜率)

求倾斜角为下列各值的直线的斜率：

(1) $\alpha = 60^\circ$; (2) $\alpha = 150^\circ$; (3) $\alpha = 0$ 。

解: 直接用 $k = \tan \alpha$: (1) $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$; (2) $k = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; (3) $k = \tan 0 = 0$ (水平直线)。

Try It 5.2: 求倾斜角为 120° 与 135° 的直线的斜率。

Q&A

- **问:** 斜率越大，直线就一定越陡吗？

答: 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内“越大越陡”成立；但一跨过 90° ，斜率变负，数值上反而“更小”却更陡（如 $-\sqrt{3}$ 比 1 陡）。所以准确说法是：**斜率绝对值越大，直线越陡。**

- **问:** 为什么倾斜角不用“与 y 轴的夹角”？

答: 约定俗成以 x 轴正向为基准，好处是水平直线的倾斜角整齐地为 0，且斜率 $k = \tan \alpha$ 与“纵坐标变化量比横坐标变化量”（即一次函数的系数）完全一致。

想一想: 两条直线，一条斜率是 2，一条斜率是 -2 ，它们谁更“陡”？（提示：比的是绝对值，不看符号）

本节练习（答案见章末）

- 求过 $(0, 1)$ 、 $(2, 5)$ 两点的直线的斜率。
- 倾斜角为 135° 的直线的斜率是多少？
- 过 $M(3, 4)$ 、 $N(3, -2)$ 两点的直线斜率存在吗？倾斜角是多少？
- 若直线 l 的倾斜角为 α ，且 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，求 α 。

5.2 直线方程的五种形式：身份证的五个版本

学习目标

- 掌握直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式；
- 会求直线的方程（条件灵活给）；

- 能进行五种形式的互化，熟练化为一般式。

前置复习

- 斜率为 2、过点 $(1, 3)$ 的直线，当 x 取 0、1、2 时 y 分别是多少？
- 过两点 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 6)$ 的直线，其斜率是多少？
- 满足“过点 $(1, 3)$ 且斜率为 2”的直线有多少条？只满足“斜率为 2”的直线呢？

5.2.1 点斜式与斜截式：抓住一个点，抓住整个方向

情境引入：无人机从 $(1, 3)$ 起飞，以斜率 2 的方向直线爬升。问：它飞到横坐标 x 时高度是多少？直觉：高度差 = $2 \times$ 水平位移，即 $y - 3 = 2(x - 1)$ 。这就是点斜式。

点斜式

已知直线过点 $P_0(x_0, y_0)$ ，斜率为 k ，则直线上任意一点 $P(x, y)$ 都满足

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

这个方程叫直线的**点斜式方程**。

斜截式

把点斜式中取 $x_0 = 0$ （即直线与 y 轴的交点为 $(0, b)$ ），得

$$y = kx + b$$

其中 b 是直线在 y 轴上的**截距**，这个方程叫**斜截式方程**。

例题 5.3

（用点斜式、斜截式写方程）

（1）求过点 $(1, 2)$ 且斜率为 3 的直线方程；（2）求过点 $(2, 3)$ 且垂直于 x 轴的直线方程；（3）已知直线 $y = kx + b$ 过点 $(0, -1)$ 与 $(2, 5)$ ，求 k 、 b 。

解：（1）由点斜式： $y - 2 = 3(x - 1)$ ，即 $y = 3x - 1$ ，化为一般式 $3x - y - 1 = 0$ 。（2）垂直于 x 轴的直线斜率不存在，不能写点斜式——**直接写** $x = 2$ 。检验： $x = 2$ 恒成立，点 $(2, 3)$ 在线上 $\checkmark$ 。（3）过 $(0, -1)$ 说明 $b = -1$ ；代入 $(2, 5)$ ： $5 = 2k - 1$ ， $k = 3$ 。故 $y = 3x - 1$ 。

Try It 5.3：求过点 $(2, -1)$ 且斜率为 -2 的直线方程，并化为一般式。

5.2.2 两点式与截距式：两个点，或两个截距

情境引入：一块三角形广告牌的两个顶点落在两坐标轴上。工人要沿第三边锯开——这条边的方程怎么写？横截距和纵截距都摆在图纸上，写 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 即可。

两点式

过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$) 的直线方程:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

截距式

直线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 a 、 b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) 时:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

例题 5.4

(截距式, 注意负截距)

求过点 $A(-2, 0)$ 与 $B(0, 3)$ 的直线方程, 并指出两个截距的符号。

解: x 截距 $a = -2$, y 截距 $b = 3$, 由截距式

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

化为一般式: 两边乘 -6 , 得 $3x - 2y + 6 = 0$ 。检验: 代入 $A(-2, 0)$: $-6 + 0 + 6 = 0$ ✓; 代入 $B(0, 3)$: $0 - 6 + 6 = 0$ ✓。截距符号: x 截距为负 (-2), y 截距为正 (3) —— **截距是代数值, 不是长度。**

Try It 5.4: 求过 $(-1, 4)$ 、 $(3, -2)$ 两点的直线方程 (两点式), 并化为一般式。

5.2.3 一般式: 无死角的标准结算货币

情境引入: 点斜式不能写竖直线, 截距式不能写过原点的线——每种形式都有死角。但把它们全部化成 $Ax + By + C = 0$, 就**没有任何直线会漏掉**。所有格式都能兑成这一种“标准货币”。

一般式

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ 不同时为零})$$

其中 A 、 B 、 C 为常数。所有直线都能写成一般式; 反过来, 任何一个一般式都表示一条直线。

How To: 一般式与斜截式互化

- 一般式 $\rightarrow$ 斜截式: 移项、除以 B ($B \neq 0$), 得 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 斜率 $k = -\frac{A}{B}$;
- 斜截式 $\rightarrow$ 一般式: 移项使右边为 0。

例题 5.5

(一般式与斜截式互化)

(1) 把直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 化为斜截式，并求其斜率；(2) 把 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 化为一般式；(3) 求过点 $(3, -2)$ 且垂直于 x 轴的直线的一般式。

解：(1) 移项： $-3y = -2x - 6$ ，两边除以 -3 ： $y = \frac{2}{3}x + 2$ 。斜率 $k = \frac{2}{3}$ ——即 $-\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ ✓。(2) 两边乘 2： $2y = -x + 6$ ，移项： $x + 2y - 6 = 0$ 。(3) 垂直于 x 轴 $\rightarrow$ 方程形如 $x = x_0$ ，过 $(3, -2) \rightarrow x = 3$ ，即 $x - 3 = 0$ (写成一般式)。

Try It 5.5: 把 $3x + 4y - 12 = 0$ 化为斜截式；把 $y = 2x - 1$ 化为一般式。

Q&A

- 问：五种形式到底该用哪一种？

答：看条件——给点 + 斜率用点斜式，给斜率 + 截距用斜截式，给两点用两点式，给两截距用截距式，求完方程统一写一般式。考试书写格式统一用一般式最稳妥。

- 问： $y = kx + b$ 里 b 可以是负数吗？

答：可以。 b 是直线与 y 轴交点的纵坐标，是代数值。如 $y = 2x - 3$ 的 y 截距为 -3 。

想一想 (对抗 M1): 过点 $(2, 3)$ 且垂直于 x 轴的直线，能写成 $y = kx + b$ 的形式吗？为什么？(提示：竖直线没有斜率，点斜式、斜截式全都“失效”，只有 $x = x_0$ 能描述它)

本节练习 (答案见章末)

- 求过原点且斜率为 2 的直线方程。
- 求过 $(4, 0)$ 、 $(0, -2)$ 两点的直线的截距式方程，并化为一般式。
- 求过点 $(2, 3)$ 且垂直于 x 轴的直线方程。(对抗 M1)
- 把 $3x + 4y - 12 = 0$ 化为斜截式，并指出斜率与 y 截距。

5.3 两条直线的位置关系：平行、垂直，一个方程看穿

学习目标

- 掌握两条直线平行、垂直的判定条件 (斜率式与一般式两套)；
- 会求两条直线的交点坐标；
- 会用平行线系、垂直线系写方程。

前置复习

- 两条直线平行时，它们的斜率有什么关系？垂直时呢？

- 方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ 的解是多少？这个解在几何上意味着什么？
- 直线 $y = 2x + 1$ 与 $y = 2x - 3$ 会不会相交？为什么？

5.3.1 平行与垂直的代数判据

情境引入：地图上两条路，一条沿山坡 $y = 2x + 1$ ，一条沿山谷 $y = 2x - 3$ 。它们会相交吗？画一下就知：斜率相同，永不相交。“斜率相同”就是两条直线平行的代数签名。

平行与垂直的判定（斜率式）

设直线 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$:

- **平行：** $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ ；若 $b_1 = b_2$ 则两直线重合；
- **垂直：** $k_1k_2 = -1$ （两直线斜率都存在时）。

一般式判定（无死角）

设 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

- **平行：** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ （系数成比例，但常数项不成比例）；
- **垂直：** $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ ——此式对竖直、水平直线一律有效。

例题 5.6

(判定平行与垂直)

判断下列各组直线的位置关系：

(1) $l_1: 2x + 3y - 1 = 0$, $l_2: 2x + 3y + 7 = 0$; (2) $l_3: 2x + 3y - 1 = 0$, $l_4: 3x - 2y + 5 = 0$; (3) $l_5: x = 2$, $l_6: y = 3$ 。

解：(1) 系数成比例 $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1$ ，而 $\frac{-1}{7} \neq 1 \rightarrow$ **平行**。(2) $A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ **垂直**。验证斜率： $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_4 = \frac{3}{2}$, $k_1k_4 = -1 \checkmark$ 。(3) 竖直线 $x = 2$ 与水平线 $y = 3$ 。斜率式法失效（竖直线无斜率），用一般式： $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ **垂直**。■

Try It 5.6: 判断 $l_1: x - y + 1 = 0$ 与 $l_2: x - y - 3 = 0$ ，以及 l_1 与 $l_3: x + y = 0$ 的位置关系。

5.3.2 交点坐标与直线系

情境引入：两条路在地图上交叉出一个路口——这个路口就是两个方程组的公共解。两条直线的交点坐标，就是两方程联立方程组的解。

例题 5.7

(求交点)

求直线 $x + y - 5 = 0$ 与 $2x - y - 4 = 0$ 的交点坐标。

解：联立

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

两式相加： $3x = 9$, $x = 3$ ；代入第一式： $y = 2$ 。交点为 $(3, 2)$ 。检验： $3 + 2 = 5 \checkmark$, $2 \times 3 - 2 = 4 \checkmark$ 。

直线系

- 与 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系： $Ax + By + C' = 0$ (C' 待定)；
- 与 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线系： $Bx - Ay + C' = 0$ ——**互换 A 、 B 并给其中一个变号**。

例题 5.8

(垂直直线系过定点)

求过点 $(1, 2)$ 且与直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 垂直的直线方程。

解：设所求直线为 $4x + 3y + C' = 0$ (互换 3、-4 为 4、3，给 y 项变号)。代入 $(1, 2)$ ： $4 + 6 + C' = 0$, $C' = -10$ 。故直线为 $4x + 3y - 10 = 0$ 。检验： $A_1A_2 + B_1B_2 = 3 \times 4 + (-4) \times 3 = 0 \checkmark$ ；过点 $(1, 2)$ ： $4 + 6 - 10 = 0 \checkmark$ 。

Try It 5.8：求过点 $(0, 3)$ 且与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行的直线方程。

Q&A

- 问**：两条直线相交、平行、重合，方程组分别对应什么情形？

答：相交 $\rightarrow$ 方程组有**唯一解**；平行 $\rightarrow$ 方程组**无解** (系数成比例、常数不成比例)；重合 $\rightarrow$ 方程组有**无穷多解** (整条直线都是解)。

- 问**：含参数的直线 $l: (m+1)x + (m-1)y + 2 = 0$ 与直线 $x + y = 0$ 垂直， m 是多少？

答：垂直要求 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ ： $(m+1) \times 1 + (m-1) \times 1 = 2m = 0$, $m = 0$ 。

想一想：一条直线经过点 $(2, 3)$ ，你能写出它的方程吗？能写出多少条？如果再加上“它与 x 轴平行”呢？(提示：过一点有无数条直线——一个条件不够，两个条件通常才够)

本节练习 (答案见章末)

- 判断 $y = 3x + 2$ 与 $y = 3x - 1$ 的位置关系。
- 判断 $x + 2y = 4$ 与 $2x - y = 1$ 的位置关系。
- 求过 $(0, 3)$ 且与 x 轴平行的直线方程。
- 求直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与 $2x + y - 8 = 0$ 的交点坐标。

5.4 三种距离公式：测量的标尺

学习目标

- 掌握两点间距离公式与中点坐标公式；
- 掌握点到直线的距离公式，注意分母 $\sqrt{A^2 + B^2}$ ；
- 掌握两条平行线间的距离公式，注意“先统一系数”。

前置复习

- 直角三角形两直角边为 3、4，斜边多长？这个结论叫什么定理？
- 点 $(1, 2)$ 到直线 $x = 5$ 的水平距离是多少？到直线 $y = -1$ 的竖直距离呢？

5.4.1 两点间距离与中点坐标

情境引入：你在 $(1, 2)$ ，朋友在 $(4, 6)$ ，直线距离多少？把两点之间的线段当作直角三角形的斜边，横差 3、纵差 4——勾股定理一算，答案 5。这就是两点距离公式的由来。

两点间距离公式

平面内两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

中点坐标公式

线段 P_1P_2 的中点坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

例题 5.9

(两点距离与中点)

已知 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$ 。

(1) 求 $|AB|$ ；(2) 求 AB 的中点坐标；(3) 在 x 轴上找一点 P ，使 $|PA| = |PB|$ 。

解：(1) $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ 。(2) 中点 $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 4 \right)$ 。(3) 设 $P(x, 0)$ 。 $|PA|^2 = (x-1)^2 + 4$ ， $|PB|^2 = (x-4)^2 + 36$ 。令相等： $(x-1)^2 + 4 = (x-4)^2 + 36 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 8x + 16 + 36 \rightarrow 6x = 47 \rightarrow x = \frac{47}{6}$ 。故 $P\left(\frac{47}{6}, 0\right)$ 。检验： $|PA|^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2 + 4 = \frac{1825}{36}$ ， $|PB|^2 = \left(\frac{23}{6}\right)^2 + 36 = \frac{1825}{36}$ ✓ 相等。

Try It 5.9: 已知 $A(-2, 1)$ 、 $B(3, 4)$, 求 $|AB|$ 与中点坐标。

5.4.2 点到直线的距离

情境引入: 施工队要在场地中央立一根旗杆, 要求它到一条参考线的垂直距离不小于某值。测量“垂直距离”就是做垂线——解析几何把这条垂线段长度写成了公式, 点只要代进去就能算。

点到直线的距离公式

点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

例题 5.10

(点到直线距离, 防分母丢失)

求点 $(1, 2)$ 到直线 $3x + 4y - 1 = 0$ 的距离。

解: 直线已是一般式。 $d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + 8 - 1|}{5} = \frac{10}{5} = 2$ 。

Try It 5.10: 求原点 $(0, 0)$ 到直线 $5x - 12y + 26 = 0$ 的距离。

两平行线间的距离公式

两条平行线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

例题 5.11

(两平行线距离, 先归一)

求两条直线 $x + y - 1 = 0$ 与 $2x + 2y + 3 = 0$ 之间的距离。

解: 第二条系数是第一条的 2 倍, **先归一:** 把第二条化为 $x + y + \frac{3}{2} = 0$ 。 $d = \frac{\left| -1 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ 。复核: 取第一条上一点 $(1, 0)$, 算它到第二条的距离: $\frac{|2 \times 1 + 2 \times 0 + 3|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ 。
✓ 一致。

Try It 5.11: 求 $3x + 4y - 10 = 0$ 与 $3x + 4y + 5 = 0$ 之间的距离 (两式系数已相同)。

Q&A

- **问:** 点到直线的距离公式, 分子为什么带绝对值?

答: 距离是长度, 必须非负。分子 $|Ax_0 + By_0 + C|$ 保证结果为正; 去掉绝对值符号则给出“带符号距离” (点在直线两侧符号相反), 那是后续判断位置用的, 不是距离。

- 问：点恰好在直线上，距离是多少？

答：0——代入后分子为 0。这也是检验计算是否正确的好方法。

想一想：两条平行线 l_1 、 l_2 的距离，和“ l_1 上任一点到 l_2 的距离”有什么关系？（提示：平行线上任意点到另一条的距离都相等——所以公式只与 $C_1 - C_2$ 有关）

本节练习（答案见章末）

- 求点 $(-1, 3)$ 到直线 $4x - 3y + 3 = 0$ 的距离。
- 求两平行线 $y = 2x$ 与 $y = 2x + 5$ 之间的距离。
- 已知 $A(-2, 1)$ 、 $B(3, 4)$ ，求 $|AB|$ 。
- 求点 $(2, 1)$ 到 x 轴的距离。（对抗 M4：注意分母是 $\sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ ，别把公式写变形）

5.5 圆的方程：对称的代数面孔

学习目标

- 掌握圆的标准方程，能由圆心、半径直接写出；
- 掌握圆的一般方程，能配方化为标准式；
- 知道一般方程表示圆的条件 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 。

前置复习

- 到点 $O(0, 0)$ 的距离等于 3 的点 (x, y) 满足什么方程？
- 把 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 展开，得到什么式子？
- 配方： $x^2 + 4x + 3$ 可以写成什么形式？

5.5.1 标准方程：一眼读出圆心半径

情境引入：公园有一个圆形花坛，园丁要你在图纸上标出“花坛边界”。花坛中心在 $(2, -1)$ ，半径 3 米。边界上任意一点 (x, y) 到中心的距离恒等于 3——这就是标准方程的来源：**距离为定值**。

圆的标准方程

以 (a, b) 为圆心、 r 为半径的圆的方程：

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

特别地，圆心在原点时： $x^2 + y^2 = r^2$ 。

例题 5.12

(由圆心半径写方程)

(1) 圆心 $(2, -1)$, 半径 3, 求圆的方程, 并化为一般式; (2) 圆心在原点, 且经过点 $(3, 4)$, 求圆的方程。

解: (1) 标准式 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 。展开: $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$, 即 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 。(2) 半径 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 方程 $x^2 + y^2 = 25$ 。

Try It 5.12: 求以 $(0, 0)$ 为圆心、 $\sqrt{5}$ 为半径的圆的方程; 判断点 $(1, 2)$ 是否在圆上。

5.5.2 一般方程: 配方变回标准式

情境引入: 有时圆心半径不直接给你, 方程却长得一团乱麻—— $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ 。别怕, 把 x 项与 y 项分别配方, 圆心半径就“现形”了。**配方是解析几何最常用的整容术。**

圆的一般方程

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

配方后:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

- 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$: 表示圆, 圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$;
- 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$: 表示一个点 (点圆);
- 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$: 不表示任何图形。

例题 5.13

(一般式配方求圆心半径)

求圆 $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ 的圆心与半径。

解: 配方: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 3 + 9 + 4$, 即 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ 。圆心 $(3, -2)$, 半径 4。用一般式公式验证: $D = -6$, $E = 4$, $F = -3$, $D^2 + E^2 - 4F = 36 + 16 + 12 = 64$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$ ✓。

例题 5.14

(表示圆的条件, 对抗 M10)

判断方程 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0$ 是否表示圆; 若表示, 求圆心与半径。

解：配方： $(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0$ ，即 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = -5$ 。右边为负数——不存在到定点距离为“负”的点，故**不表示圆**。用公式检验： $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 16 - 40 = -20 < 0$ ，不是圆 ✓。

例题 5.15

(三点确定一个圆)

求过 $A(0,0)$ 、 $B(4,0)$ 、 $C(0,2)$ 三点的圆的方程。

解：设圆的一般式为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，代入三点： $A: F = 0$ ； $B: 16 + 4D = 0$ ， $D = -4$ ； $C: 4 + 2E = 0$ ， $E = -2$ 。圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 。配方： $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ，圆心 $(2,1)$ ，半径 $\sqrt{5}$ 。检验：三点到圆心距离均为 $\sqrt{5}$ ✓。

Try It 5.13：求圆 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ 的圆心与半径。

Q&A

- 问：求圆的方程，什么时候用标准式，什么时候用一般式？

答：给圆心（或半径）→ 用标准式（条件直接读出）；给三个点 → 用一般式（解三元方程组，待定 D 、 E 、 F ）。

- 问：为什么一般方程要求 x^2 、 y^2 系数相同？

答：系数不同（如 $2x^2 + 3y^2 + \dots = 0$ ）时配方出来是椭圆而不是圆——圆要求到圆心距离处处相等，体现在方程上就是两个平方项系数必须相同。

想一想（对抗 M10 深化）： $x^2 + y^2 = 0$ 表示什么图形？（提示：只有 $(0,0)$ 满足——这是点圆；而 $x^2 + y^2 = -1$ 则无解，两者都不是通常意义上的圆）

本节练习（答案见章末）

- 求圆心 $(3,4)$ 、且经过原点 $(0,0)$ 的圆的方程。
- 求 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 的圆心与半径。
- 判断 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ 是否表示圆。（对抗 M10）
- 求过 $A(0,0)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(0,3)$ 三点的圆的方程。

5.6 直线与圆的位置关系：相离、相切还是相交

学习目标

- 掌握直线与圆位置关系的几何判据（ d 与 r 比较）与代数判据（ Δ ）；

- 会求相交弦长；
- 会求圆的切线方程（过圆上一点、过圆外一点两类）；
- 会求圆上的点到直线的距离最值。

前置复习

- 点到直线的距离公式是什么？
- 直线与圆最多有几个交点？最少呢？
- 圆的切线有什么性质？（提示：过切点的半径垂直于切线）

5.6.1 位置判定与弦长

情境引入：台球桌上，一个圆形桌垫被球杆沿直线划过。直线是“擦着圆边过”（相切）、“切进去两段”（相交）还是“完全没碰到”（相离）？判断只看一件事：**圆心到直线的垂线段长度 d 与半径 r 谁大谁小。**

直线与圆的三种位置关系

设圆心到直线 l 的距离为 d ，圆的半径为 r ：

位置	判据（几何）	判据（代数：联立消元后的判别式）	交点个数
相离	$d > r$	$\Delta < 0$	0
相切	$d = r$	$\Delta = 0$	1
相交	$d < r$	$\Delta > 0$	2

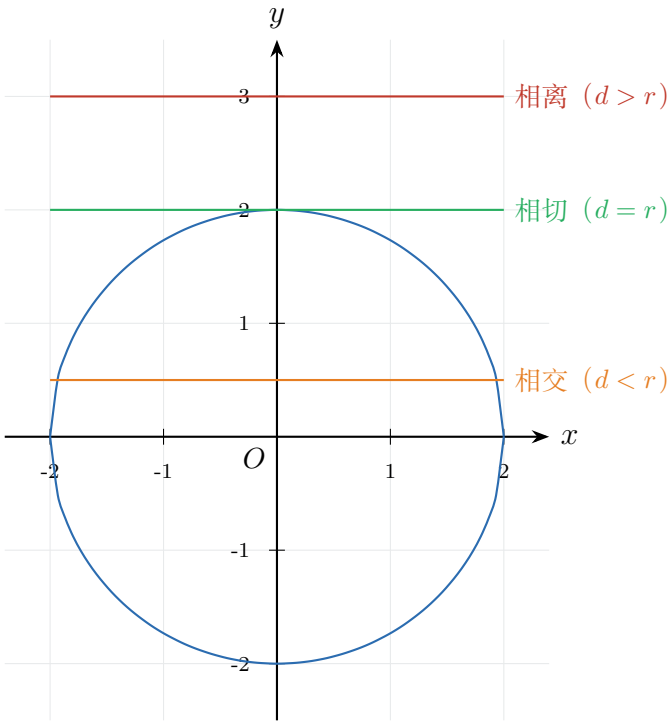


图 5.2: 直线与圆的三种位置关系

弦长公式 (垂径定理)

当直线与圆相交于 A, B 两点时, 设弦心距 (圆心到弦的距离) 为 d , 则

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

(弦心距 d 、半弦 $\frac{|AB|}{2}$ 、半径 r 构成直角三角形。)

例题 5.16

(位置判定: 几何代数双法对照)

判断直线 $x + y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的位置关系; 若相交, 求交点与弦长。

解: (几何法) 圆心 $(0, 0)$, 半径 $r = 2$ 。圆心到直线距离 $d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 \rightarrow$
相交。(代数法) 直线化为 $y = 2 - x$, 代入 $x^2 + y^2 = 4$: $x^2 + (2 - x)^2 = 4 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0$
 $\rightarrow 2x(x - 2) = 0$, $x = 0$ 或 $x = 2$, $\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ **相交**, 结论一致。交点: $x = 0$ 时 $y = 2$;
 $x = 2$ 时 $y = 0$, 即 $(0, 2)$ 、 $(2, 0)$ 。弦长: $|AB| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = 2\sqrt{2}$; 用垂径定理:
 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - 2} = 2\sqrt{2} \checkmark$ 一致。

例题 5.17

(弦长计算)

求圆 $x^2 + y^2 = 25$ 被直线 $3x + 4y - 15 = 0$ 截得的弦长。

解: 圆心 $(0, 0)$, 半径 $r = 5$ 。弦心距 $d = \frac{|0 + 0 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$ 。弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} =$
 $2\sqrt{25 - 9} = 2 \times 4 = 8$ 。复核: 解联立, $y = \frac{15 - 3x}{4}$ 代入 $x^2 + y^2 = 25$: $x^2 + \frac{(15 - 3x)^2}{16} = 25$
 $\rightarrow 25x^2 - 90x - 175 = 0 \rightarrow 5x^2 - 18x - 35 = 0$, $\Delta = 324 + 700 = 1024 = 32^2$ 。 $x = \frac{18 \pm 32}{10}$:
 $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{7}{5}$ 。 $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{24}{5}$ 。 两点 $(5, 0)$ 、 $(-\frac{7}{5}, \frac{24}{5})$ 间距离 $\sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2 + \left(-\frac{24}{5}\right)^2} =$
 $\frac{40}{5} = 8 \checkmark$ 。

Try It 5.16: 判断圆 $x^2 + y^2 = 9$ 与直线 $3x - 4y + 15 = 0$ 的位置关系。

5.6.2 切线方程: 过圆上一点, 过圆外一点

情境引入: 车轮与地面只有一个接触点, 这个接触点的“贴地切线”就是路面的方向。写圆的切线方程, 有两类问题: **过圆上的点** (一条切线) 与 **过圆外的点** (两条切线) —— 后者最经典的错误是只算出一条。

切线的两条性质

- 过切点的半径垂直于切线;
- 过圆上一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的切线方程:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

例题 5.18

(过圆上一点的切线，从“垂直”推导)

已知圆 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ ，点 $P(2, 1)$ 在圆上。求过 P 的切线方程。

解：先验证 P 在圆上： $(2 - 1)^2 + (1 + 1)^2 = 1 + 4 = 5$ ✓。法一（半径垂直切线）：圆心 $C(1, -1)$ ，半径 CP 的方向向量为 $(2 - 1, 1 + 1) = (1, 2)$ 。切线垂直于 CP ，故切线的法向量为 $(1, 2)$ ，过 $P(2, 1)$ ： $1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) = 0$ ，即 $x + 2y - 4 = 0$ 。法二（公式）： $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ ： $(2 - 1)(x - 1) + (1 + 1)(y + 1) = 5$ ，即 $(x - 1) + 2(y + 1) = 5 \rightarrow x + 2y - 4 = 0$ ✓ 一致。检验： P 到直线距离 $= \frac{|2 + 2 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = 0$ （在线上）；圆心 $(1, -1)$ 到切线距离 $= \frac{|1 - 2 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$ ✓。

例题 5.19

(过圆外一点的两条切线，防漏竖直线)

求过点 $P(1, 2)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切的直线方程。

解： P 到原点距离 $\sqrt{5} > 1$ ，是圆外点，切线应有**两条**。(1) 设切线为 $y - 2 = k(x - 1)$ ，即 $kx - y + (2 - k) = 0$ 。由 $d = r$ ： $\frac{|k \cdot 0 - 0 + 2 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ，即 $|2 - k| = \sqrt{k^2 + 1}$ 。两边平方： $(2 - k)^2 = k^2 + 1 \rightarrow 4 - 4k = 1 \rightarrow k = \frac{3}{4}$ 。对应切线： $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$ ，即 $3x - 4y + 5 = 0$ 。(2) 竖直线 $x = 1$ ：到原点的距离 $= 1 = r$ ，且过 $P(1, 2) \rightarrow$ **是切线**。这条是设斜率 k 时永远算不出来的（斜率不存在）。答：两条切线为 $x = 1$ 与 $3x - 4y + 5 = 0$ 。复核： $3x - 4y + 5 = 0$ 到原点距离 $= \frac{5}{5} = 1$ ✓，过 P ： $3 - 8 + 5 = 0$ ✓； $x = 1$ 到原点距离 $= 1$ ✓。

Try It 5.19：求过点 $(3, 0)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切的直线方程。（提示：先判断过这个圆外点的竖直线 $x = 3$ 是不是切线）

5.6.3 圆上的点到直线的距离最值

情境引入：信号塔以自身为圆心发射信号，你沿一条公路骑车。路上离信号塔最近和最远的点在哪？沿“圆心到公路的垂线方向”走到圆的两端，答案就出来了。

圆上点到直线的距离最值

设圆心到直线 l 的距离为 d ，半径为 r ：

- 若直线不过圆 ($d \neq 0$ 的常见情形)：圆上的点到直线距离最小值为 $|d - r|$ ，最大值为 $d + r$ （沿法向方向走到圆的两端）；
- 若直线与圆相交 ($d < r$)：最小值为 0（交点），最大值仍为 $d + r$ 。

例题 5.20

(最值定位)

求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的距离的最大值与最小值，并指出取到最值的点。

解：圆心 $(0, 0)$ 到直线距离 $d = \frac{|0 + 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2.4 > 2 = r$ ，直线在圆外。最大值 $= d + r = \frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5}$ ；最小值 $= d - r = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$ 。最值点定位：直线的单位法向量为 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (指向直线一侧)。从圆心沿此方向走半径到达 $Q\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ ——这是离直线最近的点，验证： $3 \times \frac{6}{5} + 4 \times \frac{8}{5} = \frac{18 + 32}{5} = 10$ ， $d_Q = \frac{|10 - 12|}{5} = \frac{2}{5} \checkmark$ 。反向走半径到达 $R\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ ——离直线最远的点，验证： $3\left(-\frac{6}{5}\right) + 4\left(-\frac{8}{5}\right) = -10$ ， $d_R = \frac{|-10 - 12|}{5} = \frac{22}{5} \checkmark$ 。

Try It 5.20: 求圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 的距离的最大值。

Q&A

- 问：判断直线与圆的位置关系，几何法 (d 与 r) 和代数法 (Δ) 哪个更好？

答：几何法算得快、不容易出错，是首选；代数法在“求交点坐标、求弦长”时必须用。掌握两种方法并能互相检验，是本章基本功。

- 问：过圆外一点作切线，怎么判断要不要补竖直线？

答：先看“过该点的竖直线到圆心的距离是否等于半径”。等于 $\rightarrow$ 有竖切线；不等于 $\rightarrow$ 没有。画草图能帮你快速判断。

想一想 (对抗 M11 情境化): 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点到直线 $x + y - 10 = 0$ 的距离最大值是多少？(提示：这条直线离圆很远， $d = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7.07$ ，最大值是 $d + r$ 还是 $d - r$ ？画图看看离直线最远的点在哪一侧)

本节练习 (答案见章末)

- 判断圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = x + 2$ 的位置关系。
- 求圆 $x^2 + y^2 = 10$ 上点 $(1, 3)$ 处的切线方程。
- 求圆 $x^2 + y^2 = 13$ 被直线 $x + y - 4 = 0$ 截得的弦长。(对抗 M12)
- 求圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 的距离最大值。(对抗 M11)

5.7 圆与圆的位置关系：两个圆，五种姿势

学习目标

- 掌握两圆五种位置关系及其判据；
- 会求两圆的公共弦方程与公共弦长；
- 能解决含参圆的基本问题。

前置复习

- 圆的半径、圆心距分别是什么？
- 两个圆的位置有哪几种？试着用手比划。
- 两点确定一条直线，两个圆的交点确定什么？（提示：一条直线——公共弦）

5.7.1 五种位置关系的判据

情境引入：一枚硬币和一枚纽扣在桌上滚动接近。从互不相碰（外离）到擦肩而过（外切），到互相穿行（相交），到一圆包住另一圆刚碰到内壁（内切），再到完全包住（内含）——五个阶段，判据全是“圆心距与半径的和差比大小”。

两圆位置关系判据

设两圆圆心距为 d ，半径分别为 r_1 、 r_2 ($r_1 \geq r_2$):

位置	判据	公共点
外离	$d > r_1 + r_2$	0
外切	$d = r_1 + r_2$	1（切点在连心线上）
相交	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2
内切	$d = r_1 - r_2$	1
内含	$0 \leq d < r_1 - r_2$	0

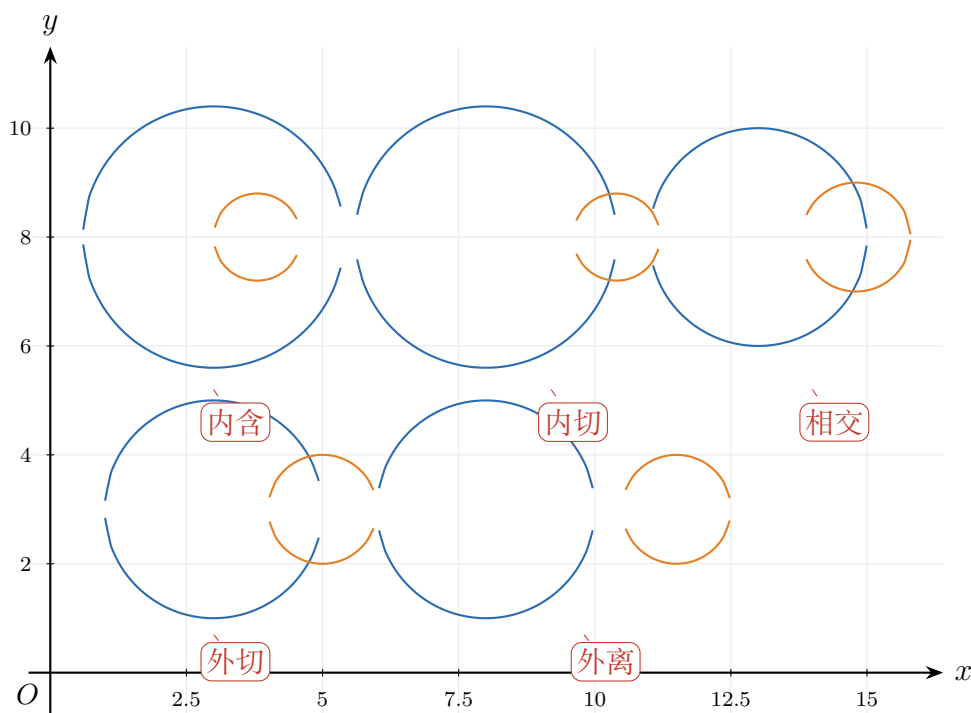


图 5.3: 两圆的五种位置关系

例题 5.21

(五种位置判定)

判断下列各组两圆的位置关系：

(1) $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 4$, $C_2 : (x+2)^2 + y^2 = 1$; (2) $C_3 : x^2 + y^2 = 9$, $C_4 : (x-2)^2 + y^2 = 1$; (3) $C_5 : x^2 + y^2 = 16$, $C_6 : (x-4)^2 + y^2 = 4$ 。

解：(1) 圆心 $(1,0)$ 与 $(-2,0)$, $d=3$; $r_1=2$, $r_2=1$, $r_1+r_2=3=d \rightarrow$ **外切**。切点为连心线上距 $(1,0)$ 为 2 的点 $(-1,0)$, 验证: $(-1-1)^2 = 4 \checkmark$, $(-1+2)^2 = 1 \checkmark$ 。(2) 圆心距 $d=2$; $r_3=3$, $r_4=1$, $r_3-r_4=2=d \rightarrow$ **内切**。切点 $(3,0)$ 。(3) 圆心距 $d=4$; $r_5=4$, $r_6=2$, $r_5-r_6=2$, $r_5+r_6=6$, $2 < 4 < 6 \rightarrow$ **相交**。

Try It 5.21: 判断 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 与 $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 的位置关系。

5.7.2 公共弦方程

情境引入：两个相交的圆像一副眼镜的两片镜片，重叠部分的“双弓形”共用一段弦——**公共弦**。怎么求它所在的直线？把两个圆方程相减：二次项 $x^2 + y^2$ 恰好抵消，剩下的是一次方程，正好就是公共弦。

公共弦方程

两圆 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 相交时，两式**相减**（消去二次项）所得的直线方程，就是公共弦所在直线方程：

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

例题 5.22

(公共弦方程与弦长)

已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 求公共弦 AB 所在直线的方程与公共弦长。

解: 先把 C_2 写成一般式: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 。两式相减: $(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 4x) = 4 - 0$, 即 $4x = 4, x = 1$ 。公共弦所在直线为 $x = 1$ 。求交点: 代入 $C_1: 1 + y^2 = 4, y = \pm\sqrt{3}$ 。交点 $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$, 公共弦长 $= 2\sqrt{3}$ 。位置检验: 圆心距 $d = 2, r_1 = r_2 = 2, 0 < 2 < 4 \rightarrow$ 相交, 与“有公共弦”一致 $\checkmark$ 。

Try It 5.22: 已知两圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 相交, 求公共弦所在直线的方程与公共弦长。

Q&A

- **问:** 两圆外切时, 公共弦方程还成立吗?

答: 两圆相减得到的直线(数学上叫“根轴”)此时退化为过切点的一条直线——切点是两圆的唯一公共点, 它必在这条直线上。真正意义上的公共弦只在相交时有。

- **问:** 两圆内含(一个包住另一个)时, 相减得到的直线还有意义吗?

答: 几何上它仍是根轴, 是一条与两圆均无交点的直线(两圆无公共点, 故无公共弦)。基础阶段知道“相交时才叫公共弦”即可。

想一想: 三个圆两两相交, 三条公共弦所在的直线有什么位置关系?(提示: 试试 $C_1: x^2 + y^2 = 4, C_2: (x-2)^2 + y^2 = 4, C_3: x^2 + (y-2)^2 = 4$ ——三条公共弦是 $x = 1, y = 1, x + y = 2$, 观察它们是否交于一点)

本节练习 (答案见章末)

- 判断 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的位置关系。
- 求两圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 的公共弦所在直线的方程与公共弦长。
- 已知圆 $x^2 + y^2 = 9$ 与 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 相交, 求公共弦所在直线的方程。

本章回顾

概念地图

· 直线: 倾斜角 $\alpha \in [0, \pi)$, 斜率 $k = \tan \alpha$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时不存在) · 两点斜率: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(先判 $x_1 \neq x_2$) · 五种方程: 点斜式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ · 斜截式 $y = kx + b$ · 两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ · 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ · 一般式 $Ax + By + C = 0$ (无死角) · 位置关系: 平行 $k_1 =$

k_2 (或系数成比例) · 垂直 $k_1 k_2 = -1$ (或 $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$) · 交点 = 方程组解 · 距离: 两点 $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ · 点线 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ · 平行线 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ · 圆: 标准式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ · 一般式 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$ 才是圆) · 直线与圆: d 与 r 比 (相离/相切/相交) · 弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ · 切线 (过圆上点用公式 / 过圆外点设 $k + d = r$ + 补竖直线) · 最值 $d \pm r$ · 圆与圆: d 与 $r_1 + r_2$ 、 $|r_1 - r_2|$ 比 (外离/外切/相交/内切/内含) · 公共弦: 两式相减

关键公式速查

内容	要点
倾斜角范围	$\alpha \in [0, \pi)$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时斜率不存在
斜率	$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$)
五种形式互化	一律以一般式 $Ax + By + C = 0$ 为“标准货币”
一般式斜率	$k = -\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$; $B = 0$ 为竖直线)
平行/垂直 (一般式)	平行: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; 垂直: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$
点到直线距离	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (先化一般式)
平行线距离	$d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (先统一系数)
圆的一般式	圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$
直线与圆	几何: d 与 r ; 代数: Δ ; 弦长 $2\sqrt{r^2 - d^2}$
圆上切线	过圆上点: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$; 过圆外点: 设 $k + d = r$, 补竖直线
两圆位置	d 与 $r_1 + r_2$ 、 $ r_1 - r_2 $ 比较; 公共弦 = 两式相减

分层练习

A 基础层

- 求过 $(-1, 3)$ 、 $(2, -3)$ 两点的直线的斜率, 并判断倾斜角是锐角还是钝角。
- 把直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 化为斜截式, 并求它与两坐标轴围成的三角形的面积。
- 判断直线 $2x - 4y + 1 = 0$ 与 $x - 2y - 3 = 0$ 的位置关系。
- 求点 $(2, -3)$ 到直线 $3x + 4y - 9 = 0$ 的距离。
- 求以 $(-2, 3)$ 为圆心、且与 x 轴相切的圆的方程。
- 判断直线 $x + 2y - 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 的位置关系。
- 求圆 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 的圆心与半径。

B 应用层

- 求过点 $(-1, 2)$ 且与直线 $2x - 3y + 5 = 0$ 垂直的直线方程。

- 已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 与直线 $4x - 3y + 10 = 0$ 相切, 求 r 。
- 求圆 $x^2 + y^2 = 8$ 被直线 $x - y - 2 = 0$ 截得的弦长。
- 求与直线 $y = x$ 平行、且与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 相切的直线方程。

C 拓展层

- 已知直线 $l: (2m+1)x + (m-1)y + 3m - 4 = 0$ (m 为参数)。证明: l 恒过定点 P , 并求 P 的坐标。
- 圆 C 过点 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$, 且圆心在直线 $x - y + 2 = 0$ 上, 求圆 C 的方程。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 5.1: $k = \frac{3 - (-1)}{5 - 2} = \frac{4}{3} > 0 \rightarrow$ 倾斜角为锐角。
- 5.2: $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$; $\tan 135^\circ = -1$ 。
- 5.3: $y + 1 = -2(x - 2)$, 即 $y = -2x + 3$, 一般式 $2x + y - 3 = 0$ 。
- 5.4: $k = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$, $y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 1)$, 一般式 $3x + 2y - 5 = 0$ 。检验: $(-1, 4)$: $-3 + 8 - 5 = 0$ ✓; $(3, -2)$: $9 - 4 - 5 = 0$ ✓。
- 5.5: $3x + 4y - 12 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$; $y = 2x - 1 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$ 。
- 5.6: l_1 与 l_2 : $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{-3} \rightarrow$ 平行; l_1 与 l_3 : $1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 \rightarrow$ 垂直。
- 5.8: 设 $2x + y + C' = 0$, 代入 $(0, 3)$: $C' = -3$, 即 $2x + y - 3 = 0$ 。
- 5.9: $|AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{34}$; 中点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 。
- 5.10: $d = \frac{|0 + 0 + 26|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2$ 。
- 5.11: 系数已相同, $d = \frac{|-10 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$ 。
- 5.12: $x^2 + y^2 = 5$; 点 $(1, 2)$: $1 + 4 = 5$, 在圆上。
- 5.13: 配方 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 圆心 $(-2, 3)$, 半径 1。
- 5.16: $d = \frac{|0 - 0 + 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3 = r \rightarrow$ 相切。

- **5.19:** 竖直线 $x = 3$ 到原点距离 $3 \neq 2$, 不是切线。设 $y = k(x - 3)$: $d = \frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \rightarrow 9k^2 = 4k^2 + 4 \rightarrow k = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。切线: $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 3)$ 。
- **5.20:** $d = \frac{|0 + 0 - 10|}{5} = 2$, $d_{\max} = 2 + 1 = 3$ 。
- **5.21:** 圆心距 $d = 3$, $r_1 + r_2 = 2$, $3 > 2 \rightarrow$ 外离。
- **5.22:** $C_2: x^2 + y^2 - 4y = 0$, 相减得 $4y = 4$, $y = 1$; 公共弦 $y = 1$ 。交点 $(\pm\sqrt{3}, 1)$, 公共弦长 $2\sqrt{3}$ 。

各节练习答案

- **5.1 节:** 1. $k = \frac{5-1}{2-0} = 2$ 。2. $k = \tan 135^\circ = -1$ 。3. 横坐标相同 $\rightarrow$ 斜率不存在, 倾斜角 $\frac{\pi}{2}$ 。4. $\alpha \in [0, \pi)$ 且 $\tan \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$ 。
- **5.2 节:** 1. $y = 2x$ 。2. 截距式 $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$, 一般式 $x - 2y - 4 = 0$ (检验: $(4, 0)$: $4 - 4 = 0$ ✓; $(0, -2)$: $0 + 4 - 4 = 0$ ✓)。3. $x = 2$ 。4. $y = -\frac{3}{4}x + 3$, 斜率 $-\frac{3}{4}$, y 截距 3。
- **5.3 节:** 1. 斜率同为 3 $\rightarrow$ 平行。2. $1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0 \rightarrow$ 垂直。3. $y = 3$ 。4. 联立: $x = 2y - 1$ 代入 $2x + y - 8 = 0$: $4y - 2 + y - 8 = 0 \rightarrow y = 2$, $x = 3$, 交点 $(3, 2)$ 。
- **5.4 节:** 1. $d = \frac{|4 \times (-1) - 3 \times 3 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$ 。2. 归一为 $2x - y = 0$ 与 $2x - y + 5 = 0$: $d = \frac{5}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$ 。3. $\sqrt{34}$ 。4. $d = \frac{|0 \times 2 + 1 \times 1|}{\sqrt{0 + 1}} = 1$ (x 轴方程 $y = 0$, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$)。
- **5.5 节:** 1. 半径 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 方程 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 。2. 配方 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, 圆心 $(1, -2)$, 半径 3。3. $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 16 - 24 = -4 < 0 \rightarrow$ 不表示圆。4. 设一般式, $F = 0$, $B: 4 + 2D = 0 \rightarrow D = -2$; $C: 9 + 3E = 0 \rightarrow E = -3$ 。方程 $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$, 配方 $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$, 圆心 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 。
- **5.6 节:** 1. $d = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} > 1 \rightarrow$ 相离。2. 切线 $x + 3y = 10$ (验证: 圆心 $(0, 0)$ 到直线距离 $\frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = r$ ✓)。3. $d = \frac{|0 + 0 - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $r = \sqrt{13}$, 弦长 $= 2\sqrt{13 - 8} = 2\sqrt{5}$ 。4. $d = \frac{10}{5} = 2$, $d_{\max} = 2 + 1 = 3$ 。
- **5.7 节:** 1. 圆心距 $d = 1$, $r_1 - r_2 = 1 \rightarrow$ 内切。2. $C_2: x^2 + y^2 - 4y = 0$, 相减得 $y = 1$; 交点 $(\pm\sqrt{3}, 1)$, 公共弦长 $= 2\sqrt{3}$ 。3. C_2 一般式 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, 相减: $(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x + 12) = 0 \rightarrow 8x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{21}{8}$, 公共弦 $x = \frac{21}{8}$ 。复核: 交点 $y^2 = 9 - \left(\frac{21}{8}\right)^2 = \frac{576 - 441}{64} = \frac{135}{64}$, 到 $(4, 0)$ 距离 $^2 = \left(4 - \frac{21}{8}\right)^2 + \frac{135}{64} = \frac{121 + 135}{64} = 4$ ✓ 在 C_2 上。

A1: $k = \frac{-3-3}{2-(-1)} = -2 < 0 \rightarrow$ 倾斜角为钝角。

A2: $y = \frac{2}{3}x + 2$ 。与两轴交点 $(0, 2)$ 、 $(-3, 0)$ ，面积 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ 。

A3: $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = 2$ ，而 $\frac{1}{-3} \neq 2 \rightarrow$ 平行。

A4: $d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times (-3) - 9|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$ 。

A5: 与 x 轴相切 $\rightarrow$ 半径 = 圆心到 x 轴距离 = 3。方程 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 。

A6: $d = \frac{|0+0-5|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} = r \rightarrow$ 相切。

A7: 配方 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ ，圆心 $(2, -3)$ ，半径 4。

B8: 垂直直线系 $3x + 2y + C' = 0$ ，代入 $(-1, 2)$ ： $-3 + 4 + C' = 0$ ， $C' = -1$ ，即 $3x + 2y - 1 = 0$ 。

B9: 相切 $\rightarrow d = r$ ： $r = \frac{|0+0+10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$ 。

B10: $d = \frac{|0-0-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ ，弦长 $= 2\sqrt{8-2} = 2\sqrt{6}$ 。复核： $x = y + 2$ 代入圆： $(y+2)^2 + y^2 = 8 \rightarrow y^2 + 2y - 2 = 0$ ， $|y_1 - y_2| = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$ ，弦长 $= \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \checkmark$ 。

B11: 设 $y = x + b$ ，即 $x - y + b = 0$ ，相切： $d = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$ ， $|b| = 4$ ， $b = \pm 4$ 。直线 $y = x + 4$ 与 $y = x - 4$ 。

C12: 整理： $m(2x + y + 3) + (x - y - 4) = 0$ 。令 $2x + y + 3 = 0$ 且 $x - y - 4 = 0$ ：相加得 $3x - 1 = 0$ ， $x = \frac{1}{3}$ ， $y = -\frac{11}{3}$ 。 l 恒过定点 $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ 。检验： $2 \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{11}{3}\right) + 3 = \frac{2-11+9}{3} = 0 \checkmark$ ； $\frac{1}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) - 4 = \frac{12}{3} - 4 = 0 \checkmark$ 。

C13: 圆心在弦 $(1, 0)-(3, 0)$ 的中垂线 $x = 2$ 上；又在直线 $x - y + 2 = 0$ 上，故 $y = x + 2 = 4$ ，圆心 $(2, 4)$ 。半径 $r = \sqrt{(2-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$ 。圆 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 17$ 。检验 $(3, 0)$ ： $1 + 16 = 17 \checkmark$ 。

第六章 怎么用“和、差、等”画尽天下曲线：圆锥曲线的方程

章首情境

6.1 椭圆：一根绳与两颗图钉画出的曲线

学习目标

- 理解椭圆的定义（到两定点距离之和为常数 $2a$ ）；
- 掌握椭圆的标准方程及其推导思路；
- 会由标准方程求 a 、 b 、 c 与焦点、顶点坐标，会判定焦点所在的轴；
- 掌握离心率 $e = \frac{c}{a}$ 与通径公式，理解 $a^2 = b^2 + c^2$ （ a 最大）。

前置复习

- 圆的标准方程是什么？“到定点的距离等于定长”用方程怎么写？
- 化简 $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ 的大致思路是什么？（提示：移项、平方、再平方）
- 已知 $a = 5$ ， $c = 3$ ，由 $a^2 = b^2 + c^2$ 求 b 。

6.1.1 椭圆的定义与标准方程

情境引入：图钉所在位置就是两个**焦点** F_1 、 F_2 ，绳长记为 $2a$ ，两图钉距离记为 $2c$ 。绳子要能绷紧，绳长必须大于两图钉距离，即 $2a > 2c$ 。铅笔的轨迹上任意一点 P 都满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ——这就是椭圆的定义。

椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离的**和**等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做**椭圆**。两个定点 F_1 、 F_2 叫**焦点**，两焦点间的距离叫**焦距**（记为 $2c$ ）。常数记为 $2a$ ，满足 $2a > 2c$ 。

椭圆的标准方程

取焦点 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ (焦点在 x 轴上), 设椭圆上一点 $P(x, y)$, 由 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 化简整理得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

若焦点在 y 轴上 ($F_1(0, -c)$ 、 $F_2(0, c)$), 则

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

其中 a 叫长半轴长, b 叫短半轴长。

How To: 判定焦点在哪个轴上

- 把方程写成标准形式 (右边为 1);
- 比较 x^2 、 y^2 两个分母的大小;
- 分母大的是 a^2 , 焦点跟着大分母所在的轴走—— x^2 的分母大, 焦点在 x 轴上; y^2 的分母大, 焦点在 y 轴上。

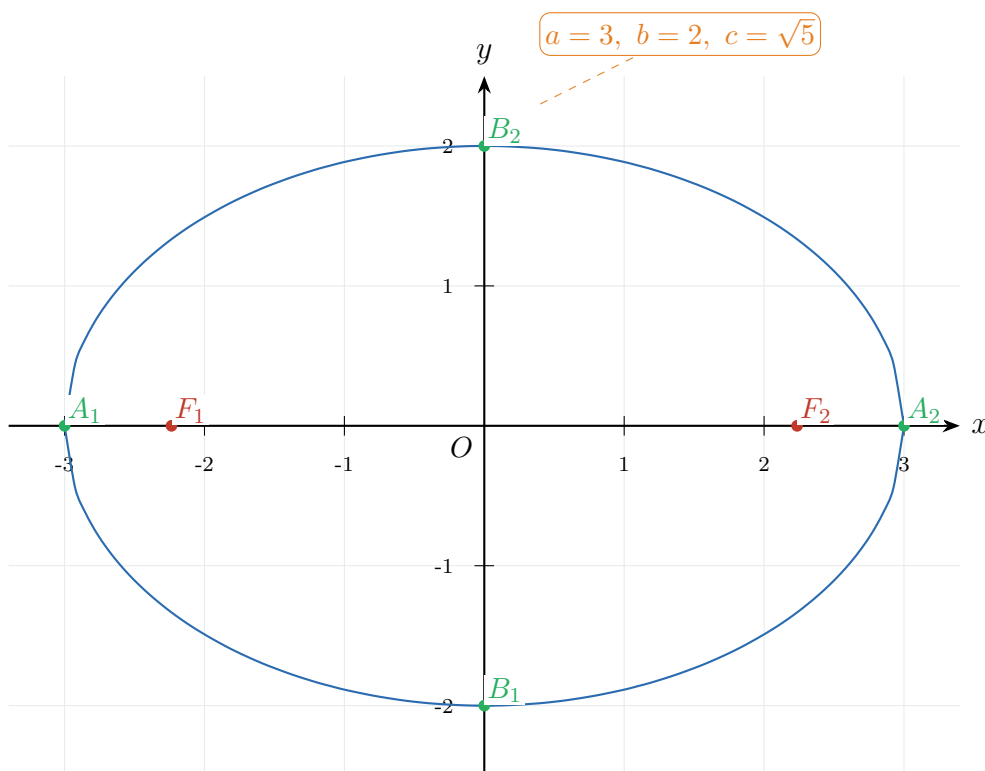


图 6.1: 椭圆 $x^2/9 + y^2/4 = 1$

例题 6.1

(由标准方程求基本量)

已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 求长轴长、短轴长、焦距、焦点坐标、顶点坐标与离心率。

解: x^2 分母 25 > y^2 分母 16 $\rightarrow$ 焦点在 x 轴, $a^2 = 25, b^2 = 16$ 。 $a = 5, b = 4, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ 。长轴长 $2a = 10$, 短轴长 $2b = 8$, 焦距 $2c = 6$; 焦点 $(\pm 3, 0)$; 顶点 $(\pm 5, 0), (0, \pm 4)$; 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ 。

Try It 6.1: 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, 求焦点坐标与离心率。(提示: 先判焦点轴—— y^2 的分母大)

例题 6.2

(由几何条件求标准方程)

已知椭圆的顶点为 $(\pm 6, 0)$, 焦点为 $(\pm 2, 0)$, 求椭圆的标准方程。

解: 顶点 $(\pm 6, 0)$ 在 x 轴上, 焦点 $(\pm 2, 0)$ 也在 x 轴上 $\rightarrow$ 焦点在 x 轴。 $a = 6, c = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$ 。标准方程: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 。

Try It 6.2: 已知椭圆短轴长为 8, 焦距为 6, 焦点在 y 轴上, 求椭圆的标准方程。(答案: $a^2 = b^2 + c^2, b = 4, c = 3, a = 5$, 方程 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$)

例题 6.3

(定义直译求轨迹 + 焦点三角形)

(1) 动点 P 到 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ 的距离之和恒为 10, 求 P 的轨迹方程; (2) 若 P 是该椭圆上的一点, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积。

解: (1) $|PF_1| + |PF_2| = 10 = 2a \rightarrow a = 5; |F_1F_2| = 8 = 2c \rightarrow c = 4$ 。验证存在性: $2a = 10 > 2c = 8 \checkmark$, 轨迹是椭圆。 $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$, 焦点在 x 轴, 轨迹方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。(2) 记 $u = |PF_1|, v = |PF_2|$ 。由椭圆定义 $u + v = 10$ 。在 $\triangle F_1PF_2$ 中由余弦定理: $|F_1F_2|^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos 60^\circ$, 即 $64 = u^2 + v^2 - uv$ 。又 $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 100$ 。两式相减: $36 = 3uv, uv = 12$ 。面积 $S = \frac{1}{2}uv \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 。■

Try It 6.3: 动点 P 到 $F_1(0, -5), F_2(0, 5)$ 的距离之和为 14, 求轨迹方程。(提示: $a = 7, c = 5$, 焦点在 y 轴)

Q&A

• 问: 椭圆里 a, b, c 到底谁最大? 三个量在图上对应什么?

答: a 最大, 且 $a^2 = b^2 + c^2$ 。图上以中心 O 、焦点 $F_2(c, 0)$ 、椭圆与 y 轴正半轴交点 $B(0, b)$ 三点构成的直角三角形中, 斜边是 $OB' = a$ (B' 为左顶点 $(-a, 0)$ 与 B 相连的线段长恰好为 a), 两条直角边是 b, c ——**认出这个直角三角形, a 是斜边, 就永远不会记反公式。**

• 问: $2a$ 和 $2c$ 相等会怎样?

答：若 $2a = 2c$ ，轨迹退化为线段 F_1F_2 ；若 $2a < 2c$ ，则无轨迹。所以定义里“常数大于焦距”是保证“真正扁圆的椭圆”存在的前提。

• 问：怎么区分焦点在 x 轴还是在 y 轴？

答：看大分母—— x^2 的分母大，焦点在 x 轴； y^2 的分母大，焦点在 y 轴。口诀“大分母跟着焦点走”。

想一想（对抗 M1 前瞻）：双曲线的 a 、 b 、 c 关系与椭圆相反—— c 最大， $c^2 = a^2 + b^2$ 。为什么“斜边”从 a 换成了 c ？（提示：双曲线的 a 、 b 、 c 直角三角形中， a 、 b 是直角边， c 是斜边；等到 6.2 节画中心矩形你就明白了）

6.1.2 椭圆的几何性质：离心率与通径

情境引入：同样一个椭圆，有的很“圆”（接近圆），有的很“扁”（像被压过）。怎么用一个数描述“圆不圆”？答案是**离心率**——焦距与长轴长的比值。 e 越小越圆， e 越大越扁。

离心率

椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a}$ ，且 $0 < e < 1$ 。又因为 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ，也可写成

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

- e 越接近 0，椭圆越接近圆；
- e 越接近 1，椭圆越扁。

通径

过焦点且垂直于长轴的弦叫**通径**，其长度

$$|AB| = \frac{2b^2}{a}$$

例题 6.4

（离心率反求 $a : b$ ）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $a : b$ 。

解： $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$ ，故 $c^2 = \frac{3}{4}a^2$ 。 $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ 。两边开方： $b = \frac{1}{2}a$ ，即 $a : b = 2 : 1$ 。反向检验：若 $a : b = 2 : 1$ ，则 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓。

Try It 6.4：椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的长轴长是短轴长的 3 倍，求离心率 e 。

练一练（对抗 M5：通径一题三问）

分别求下列曲线的通径长：

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; (2) 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (预演 6.2 节); (3) 抛物线 $y^2 = 8x$ (预演 6.3 节)。

(提示: 椭圆、双曲线通径都是 $\frac{2b^2}{a}$, 抛物线通径是 $2p$ ——三个公式三个桶, 别混装)

Q&A

- 问: $e = 0$ 是什么图形?

答: $e = 0$ 意味着 $c = 0$, 两个焦点重合——椭圆退化成圆。所以圆可以看成“离心率为 0 的椭圆”, 这就是为什么圆与椭圆常常一起出现。

- 问: 离心率能大于 1 吗?

答: 对椭圆不能 ($0 < e < 1$ 是椭圆专属区间)。 $e = 1$ 是抛物线, $e > 1$ 是双曲线——离心率是贯穿三种曲线的“一维家谱”(详见 6.3.2 节末)。

想一想: 用两根绳子能画出扁扁的椭圆和接近圆的椭圆, 差别在“绳长与图钉距的比例”。如果绳长固定, 图钉距越接近绳长, 画出的椭圆越扁还是越圆? (提示: 图钉距 $= 2c$, 绳长 $= 2a$, $e = c/a$)

本节练习 (答案见章末)

- 椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的长轴长、焦距、离心率各是多少?
- 求与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点, 且过点 $(\sqrt{5}, 2)$ 的椭圆方程。
- 椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 m 。(含参, 需讨论焦点轴)
- 写出椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的焦点坐标, 并说明焦点在哪个轴上。(对抗 M2)

6.2 双曲线: 差值恒定的“两支”曲线

学习目标

- 理解双曲线的定义 (到两定点距离之差的绝对值为常数 $2a$);
- 掌握双曲线的标准方程与 $c^2 = a^2 + b^2$ (c 最大);
- 掌握双曲线的渐近线方程与画法;
- 掌握双曲线的离心率 $e > 1$ 与通径公式。

前置复习

- 椭圆的标准方程与 $a^2 = b^2 + c^2$ 是什么？椭圆里谁最大？
- “到两定点距离之和”是椭圆，那“之差”呢？先猜一猜会得到什么形状。
- 绝对值方程 $|x - 3| = 5$ 的解是什么？它提醒我们“差的绝对值”会带来什么？

6.2.1 双曲线的定义与标准方程

情境引入：把椭圆实验反过来——不是“绷紧绳子求和”，而是“一根弹性绳：到 F_1 的距离减去到 F_2 的距离，恒为定值”。铅笔画出的轨迹分居两侧，形成左右两支——这就是双曲线。注意关键词：**差的绝对值**。

双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离的**差的绝对值**等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 且大于 0）的点的轨迹叫做**双曲线**。常数记为 $2a$ ，焦距记为 $2c$ ，满足 $0 < 2a < 2c$ 。

双曲线的标准方程

焦点在 x 轴上 ($F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c^2 = a^2 + b^2)$$

焦点在 y 轴上 ($F_1(0, -c)$ 、 $F_2(0, c)$):

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

How To：判定双曲线焦点所在轴

- 化为标准形式（右边为 1）；
- 看 x^2 、 y^2 谁前面的系数是正号；
- 正号项对应的变量所在轴就是实轴（焦点所在轴）。

例题 6.5

（由标准方程求基本量）

已知双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，求实轴长、虚轴长、焦距、焦点坐标、渐近线方程与离心率。

解： x^2 项为正 $\rightarrow$ 焦点在 x 轴。 $a^2 = 16$ ， $b^2 = 9$ 。 $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ 。
实轴长 $2a = 8$ ，虚轴长 $2b = 6$ ，焦距 $2c = 10$ ；焦点 $(\pm 5, 0)$ ；渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x$ ；离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ 。

例题 6.6

（定义直译求轨迹，注意两支）

动点 P 到 $F_1(-5,0)$ 、 $F_2(5,0)$ 的距离之差的绝对值为 6，求 P 的轨迹方程。

解： $2a = 6$, $a = 3$; $2c = 10$, $c = 5$ 。存在性： $0 < 2a < 2c$ ，即 $6 < 10$ ✓，轨迹是双曲线。
 $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$ ，焦点在 x 轴。轨迹方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ——左右两支都要算（差是“绝对值”， P 在两侧都成立）。若把题改成 “ $|PF_1| - |PF_2| = 6$ ”（不带绝对值），则表示右支 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($x \geq 3$) ——“绝对值”是两支的分水岭。

Try It 6.5: 动点 P 到 $F_1(0,-4)$ 、 $F_2(0,4)$ 的距离之差的绝对值为 6，求轨迹方程。

6.2.2 渐近线：双曲线的“灵魂”

情境引入： 冷却塔（如核电站那口“大烟囱”）的剖面是双曲线——风吹过去薄壳不塌。工程师看中的就是双曲线的**渐近线**：曲线无限接近两条直线却永不相交，力沿渐近线方向被均匀传开。渐近线怎么画？画一个中心在原点、边长为 $2a$ 与 $2b$ 的矩形，对角线就是渐近线。

渐近线方程

- 焦点在 x 轴 ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$): $y = \pm \frac{b}{a}x$;
- 焦点在 y 轴 ($\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$): $y = \pm \frac{a}{b}x$ 。

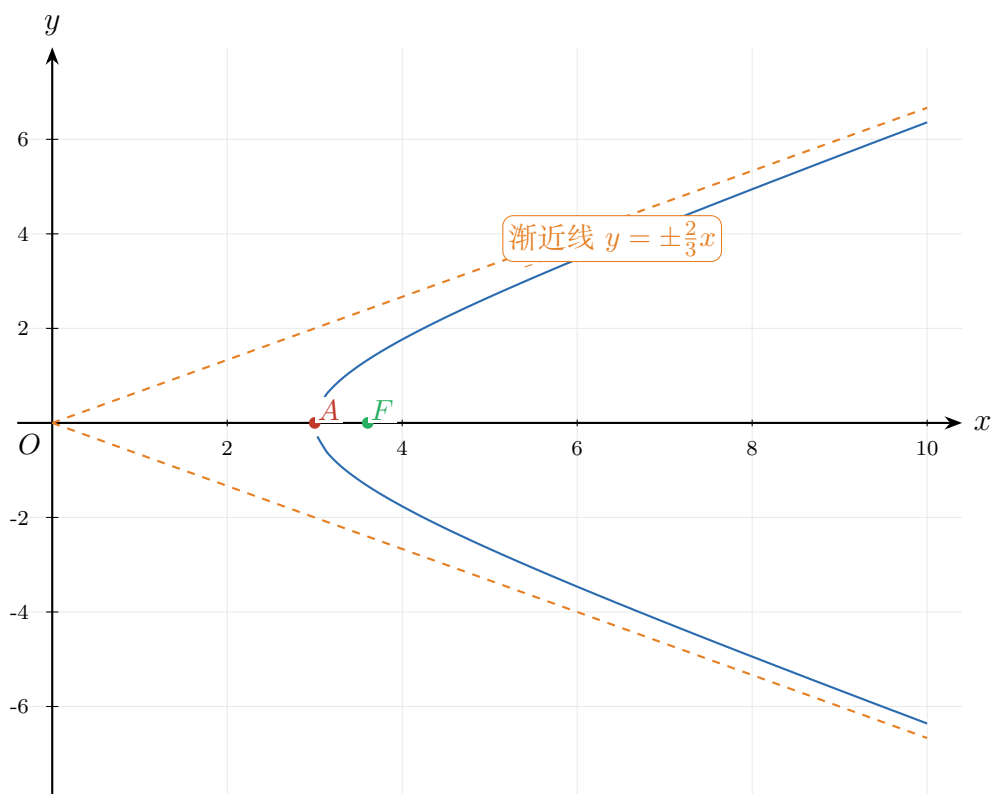


图 6.2: 双曲线与渐近线

例题 6.7

(由渐近线反求方程)

已知双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{2}{3}x$ ，且经过点 $(3\sqrt{2}, 2)$ ，求双曲线的标准方程。

解：由渐近线 $y = \pm \frac{2}{3}x$ 知 $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ，可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \lambda$ ($\lambda > 0$ ，焦点在 x 轴)。

代入点 $(3\sqrt{2}, 2)$ ： $\frac{18}{9} - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1$ ，故 $\lambda = 1$ 。双曲线方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。复核：渐近线 $y = \pm \frac{2}{3}x$ ✓；点 $(3\sqrt{2}, 2)$ 代入左边 $= 1$ ✓； $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ ，焦点 $(\pm\sqrt{13}, 0)$ 。

Try It 6.6：求双曲线 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 的渐近线方程与离心率。(对抗 M3：焦点在 y 轴，渐近线是 $y = \pm \frac{a}{b}x$ ，不是 $\frac{b}{a}$)

Q&A

- **问：**双曲线的 a 、 b 、 c 谁最大？

答： c 最大， $c^2 = a^2 + b^2$ 。图上以中心 O 、焦点 $F_2(c, 0)$ 、虚轴端点 $(0, b)$ 构成的直角三角形中，**斜边是 c** ——与椭圆（斜边是 a ）恰好相反。记住“斜边是谁”就不会记反公式。

- **问：**为什么叫“实轴”“虚轴”？

答：双曲线与 x 轴（焦点在 x 轴时）真的相交于 $(\pm a, 0)$ ，这段是“实的”；与 y 轴不相交，但矩形的边长为 $2b$ ，它是“虚的”。虚轴不是不存在，而是“看不见的轴”。

- **问：**等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 有什么特别？

答： $a = b = 2$ ，渐近线 $y = \pm x$ （互相垂直），离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ 。**实轴与虚轴相等**
 $\Leftrightarrow$ **渐近线垂直** $\Leftrightarrow e = \sqrt{2}$ ，三位一体，考试常考。

想一想 (对抗 M1 与 M3 综合)：把 $x^2 - y^2 = 4$ 与 $y^2 - x^2 = 4$ 对比：两者焦点在哪条轴上？渐近线相同吗？离心率呢？(提示：两式都是等轴双曲线，焦点轴相反，但渐近线都是 $y = \pm x$)

本节练习（答案见章末）

- 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的实轴长、虚轴长、焦距、渐近线方程各是多少？(对抗 M1： $b^2 = c^2 - a^2$ 用加)
- 求与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 有相同焦点且实轴长为 4 的双曲线方程。
- 已知双曲线的一条渐近线为 $y = \sqrt{3}x$ ，求它的离心率 e 。
- 求双曲线 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 的焦点坐标与渐近线方程。(对抗 M2、M3)

6.3 抛物线：等距的轨迹

学习目标

- 理解抛物线的定义（到定点与到定直线的距离相等）；
- 掌握抛物线的四种标准方程及其焦点、准线；
- 掌握 p 的几何意义（焦准距）与通径 $2p$ ；
- 掌握过焦点弦的性质（ $y_1y_2 = -p^2$ ，弦长 $= x_1 + x_2 + p$ ）。

前置复习

- 点到点 $(1, 0)$ 的距离怎么用坐标表示？点到直线 $x = -1$ 的距离呢？
- 解方程 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x+1|$ ，平方后得到什么曲线方程？（试试看）
- 椭圆与双曲线的离心率范围分别是多少？

6.3.1 抛物线的定义与标准方程

情境引入：手电筒的反光碗横截面是抛物线，灯泡装在焦点上——光线射出后变成平行光。反过来，平行光射入，也全部汇聚到焦点。焦点 (F) 与一条定直线（准线 l ）之间，定义说：**抛物线是到 F 与到 l 距离相等的点的轨迹。**

抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (F 不在 l 上) 的距离**相等**的点的轨迹叫做**抛物线**。点 F 叫**焦点**，直线 l 叫**准线**。焦点到准线的距离叫**焦准距**，记为 p ($p > 0$)。

抛物线的四种标准方程

开口方向	标准方程	焦点	准线	通径
向右	$y^2 = 2px$	$(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$	$2p$
向左	$y^2 = -2px$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$x = \frac{p}{2}$	$2p$
向上	$x^2 = 2py$	$(0, \frac{p}{2})$	$y = -\frac{p}{2}$	$2p$
向下	$x^2 = -2py$	$(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$	$2p$

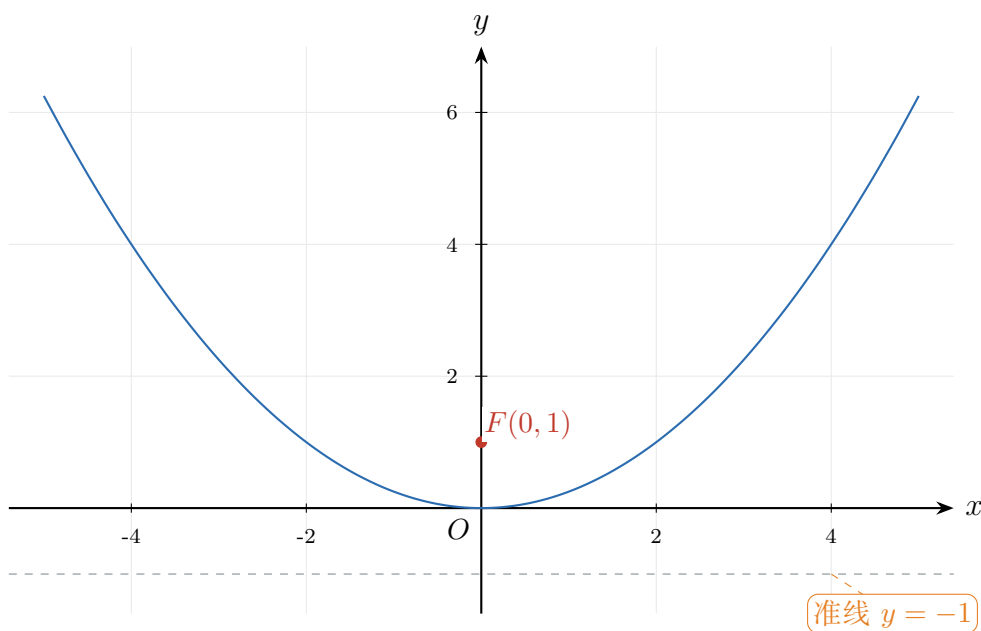


图 6.3: 抛物线 $y=x^2/4$ 的焦点与准线

例题 6.8

(标准方程 $\leftrightarrow$ 焦点、准线互译)

求下列抛物线的焦点坐标、准线方程与通径长：

- (1) $y^2 = 4x$; (2) $x^2 = -6y$; (3) $y^2 = x$ 。

解：(1) $2p = 4$, $p = 2$ 。一次项是 x 且系数为正 $\rightarrow$ 开口向右。焦点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 0)$, 准线 $x = -\frac{p}{2} = -1$, 通径 $2p = 4$ 。(2) $2p = 6$, $p = 3$ 。一次项是 y 且系数为负 $\rightarrow$ 开口向下。焦点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, 准线 $y = \frac{3}{2}$, 通径 6。(3) $2p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ 。开口向右。焦点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 准线 $x = -\frac{1}{4}$, 通径 1。

Try It 6.7: 求抛物线 $y^2 = -8x$ 与 $x^2 = -4y$ 的焦点坐标、准线方程与开口方向。(对抗 M10: 负号影响开口, 不影响“减半”算法)

例题 6.9

(定义直译 + 反射器建模)

(1) 动点 P 到定点 $F(2, 0)$ 与到直线 $x = -2$ 的距离相等, 求 P 的轨迹方程; (2) 一个抛物面反射器的开口直径 (沿对称轴垂直方向的最大宽度) 为 10, 深度为 2, 求焦点到顶点的距离。

解：(1) 焦点 $F(2, 0)$, 准线 $x = -2$, 焦点到准线的距离 $p = 2 - (-2) = 4$ (且 F 不在准线上 $\checkmark$)。开口向右, $y^2 = 2px = 8x$ 。(2) 把反射器剖面放在坐标系中, 顶点在原点, 对称轴为 y 轴, 开口向上: $x^2 = 2py$ 。开口直径 10 $\rightarrow$ 剖面两端点横坐标为 ± 5 ; 深度 2 $\rightarrow$ 端点纵坐标为 2, 即点 $(5, 2)$ 在抛物线上: $25 = 2p \times 2 = 4p$, $p = \frac{25}{4}$ 。焦点到顶点的距离 $= \frac{p}{2} = \frac{25}{8}$ 。

3.125。所以灯泡应装在距顶点 3.125 个单位处。■

Try It 6.8: 抛物线过点 (2, 4) 且顶点在原点, 求它的标准方程。(提示: 开口方向未定, 分 $y^2 = 2px$ 与 $x^2 = 2py$ 两类讨论)

6.3.2 焦点弦的性质

情境引入: 一束平行光沿抛物线对称轴射入, 反射后全部汇聚于焦点。那么, 穿过焦点射向抛物线的一条“斜光”(焦点弦), 它的两端点坐标有什么秘密? 答案是两个漂亮的定值: $y_1y_2 = -p^2$ 与弦长 $= x_1 + x_2 + p$ 。

过焦点弦的两个结论

过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 的直线交抛物线于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则

$$y_1y_2 = -p^2, \quad |AB| = x_1 + x_2 + p$$

例题 6.10

(过焦点弦的计算)

过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作斜率为 1 的直线, 交抛物线于 A 、 B 两点。

(1) 求 $|AB|$; (2) 求 y_1y_2 。

解: $p = 2$, 焦点 $F(1, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 。联立: $(x - 1)^2 = 4x \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x \rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$ 。由韦达定理: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 1$ 。(1) $|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$ 。复核: $y_1 - y_2 = (x_1 - 1) - (x_2 - 1) = x_1 - x_2$, $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2}|x_1 - x_2|$ 。 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 36 - 4 = 32$, $|AB| = \sqrt{2} \times \sqrt{32} = 8$ ✓。(2) $y_1y_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 1 - 6 + 1 = -4 = -p^2$ ✓。通径检验: 当直线垂直于对称轴 ($x = 1$) 时, $y^2 = 4$, $y = \pm 2$, 弦长 $4 = 2p$ ——通径是焦点弦中最短的那条。■

Try It 6.9: 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点作弦 AB , 若 $x_1 + x_2 = 10$, 求 $|AB|$ 与 y_1y_2 。

Q&A

• **问:** 为什么 $y_1y_2 = -p^2$ 总是负数?

答: A 、 B 分别在 x 轴两侧 (焦点在抛物线的“肚里”, 过焦点的弦必然一上一下), 所以 y_1 、 y_2 异号, 乘积为负。

• **问:** 焦点弦长公式 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 只适用于开口向右的抛物线吗?

答: $y^2 = 2px$ 型适用; 其他开口方向有对应的平行公式 (如 $x^2 = 2py$ 型是 $|AB| = y_1 + y_2 + p$)。考试以 $y^2 = 2px$ 型为主。

• **问:** 抛物线的离心率是多少?

答： $e = 1$ 。这是唯一的“不加不减不定比值”的曲线——椭圆 $0 < e < 1$ ，抛物线 $e = 1$ ，双曲线 $e > 1$ 。一条离心率数轴贯穿全章： $e = 0$ （圆） $\rightarrow 0 < e < 1$ （椭圆） $\rightarrow e = 1$ （抛物线） $\rightarrow e > 1$ （双曲线）。

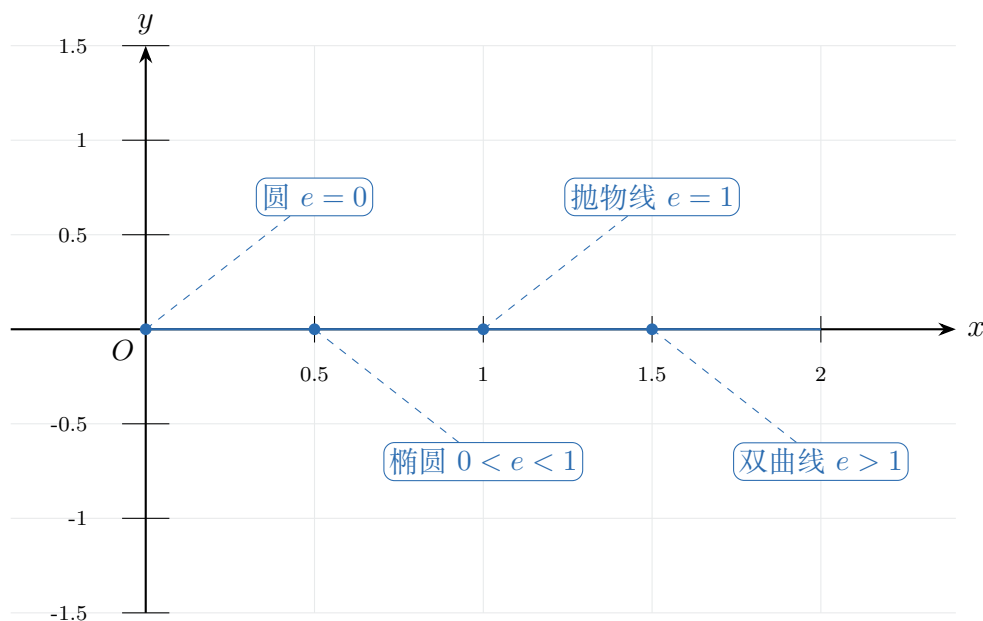


图 6.4: 离心率 e 的取值谱系

想一想 (对抗 M8): 给你一个离心率 $e = \frac{3}{2}$ ，不给你方程——你能判断它是哪种曲线吗？ $e = 1$ 呢？ $e = \frac{1}{2}$ 呢？（提示：离心率的范围就是曲线家族的“身份证号”）

本节练习（答案见章末）

- 求抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点坐标、准线方程与通径长。
- 抛物线 $x^2 = 2py$ 过点 $(4, 4)$ ，求 p 与焦点坐标。
- 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作弦 AB ， A 、 B 的横坐标之和为 5，求 $|AB|$ 与 $y_1 y_2$ 。
- 动点 P 到 $F(0, 3)$ 与到直线 $y = -3$ 的距离相等，求轨迹方程。

6.4 直线与圆锥曲线：联立，算到底

学习目标

- 掌握联立消元法判断直线与圆锥曲线的位置关系（ Δ 判据）；
- 掌握弦长公式 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$ ；
- 掌握中点弦问题的点差法（设而不求）；

- 会用坐标法求三角形面积，掌握割补公式 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 。

前置复习

- 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式与韦达定理是什么？
- 两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式是什么？
- 点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式是什么？

6.4.1 联立消元与位置关系

情境引入：把直线 $y = kx + m$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，得到关于 x 的一元二次方程 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ——解的数量就是交点数量：两个解相交、一个解相切、无解相离。**解析几何把几何问题变成代数问题，这一步就是“以算代画”。**

直线与圆锥曲线的位置关系

设直线 $y = kx + m$ 与椭圆（或抛物线）联立消元得到 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ：

- $A \neq 0$ 时看判别式： $\Delta > 0$ 相交（2 交点）； $\Delta = 0$ 相切（1 交点）； $\Delta < 0$ 相离（0 交点）；
- $A = 0$ 时方程退化为一元一次——**只有一个交点，但这不是相切**（双曲线的渐近线方向就是这个特殊情形，必考易错）。

例题 6.11

（含参直线与椭圆的位置关系 + 双曲线退化情形）

（1）当 m 取何值时，直线 $y = x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交、相切、相离？（2）直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 有几个交点？它是不是双曲线的切线？

解：（1）代入消元： $\frac{x^2}{4} + (x+m)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \rightarrow$ 乘 4： $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$ 。 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 5 \times (4m^2 - 4) = 64m^2 - 80m^2 + 80 = 80 - 16m^2$ 。相交： $\Delta > 0 \rightarrow m^2 < 5$ ，即 $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ ；相切： $\Delta = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{5}$ ；相离： $|m| > \sqrt{5}$ 。边界复核：取 $m = \sqrt{5}$ ，方程 $5x^2 + 8\sqrt{5}x + 20 - 4 = 0$ ，即 $5x^2 + 8\sqrt{5}x + 16 = 0$ ， $\Delta = 320 - 320 = 0$ ，切点 $x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ ✓。（2）代入： $\frac{x^2}{4} - \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) = 1 \rightarrow -x - 1 = 1$ ， $x = -2$ ， $y = 0$ 。只有一个交点 $(-2, 0)$ 。但消元后得到的是一次方程（二次项系数 $A = 0$ ）——**判别式判据失效，这不是相切，而是因为直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 恰好平行于渐近线 $y = \frac{x}{2}$** ，它与双曲线相交于一点后“擦肩而过”。检验 $(-2, 0)$ 在双曲线上： $\frac{4}{4} - 0 = 1$ ✓。■

Try It 6.10：当 m 取何值时，直线 $y = x + m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 相切？（提示：代入得 $3x^2 + 8mx + 4m^2 + 4 = 0$ ， $\Delta = 16(m^2 - 3)$ ）

6.4.2 弦长与中点弦

情境引入：激光切过椭圆钢板留下一条切口 AB 。切口的长度怎么算？两点坐标太丑？没关系——用韦达定理直接出“横坐标差的绝对值”，再乘上斜率修正系数 $\sqrt{1+k^2}$ ，“斜着量”就把“横着量”换算过来了。

弦长公式

直线 $y = kx + m$ 与圆锥曲线交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，联立消元得 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ，则

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

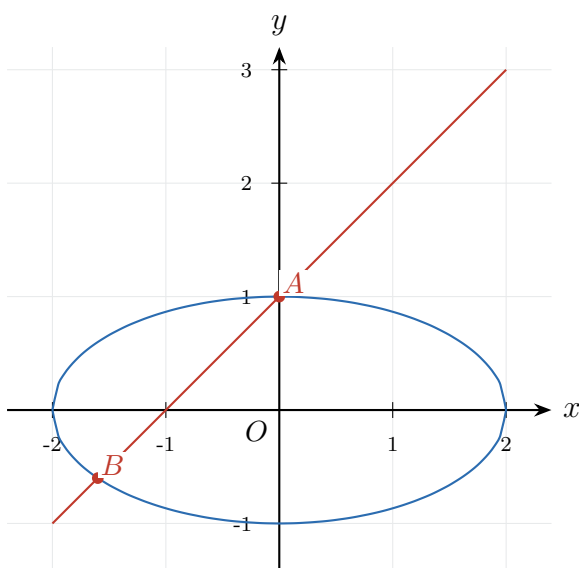


图 6.5: 直线 $y=x+1$ 与椭圆的弦长

例题 6.12

(用韦达定理求弦长)

直线 $y = x + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A 、 B 两点，求 $|AB|$ 。

解：代入： $\frac{x^2}{4} + (x+1)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 + 2x + 1 - 1 = 0 \rightarrow$ 乘 4： $5x^2 + 8x = 0$ 。 $x = 0$ 或 $x = -\frac{8}{5}$ 。于是 $A(0, 1)$ 、 $B\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 。方法一（直接距离）： $|AB| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ 。方

法二（弦长公式）： $k = 1$ ， $A = 5$ ， $\Delta = 64$ ， $|AB| = \sqrt{1+1} \times \frac{\sqrt{64}}{5} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ ✓ 一致。

Try It 6.11：直线 $y = 2x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A 、 B ，求 $|AB|$ 。（提示：代入得 $4x^2 - 8x + 1 = 0$ ， $\Delta = 48$ ， $|AB| = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{48}}{4} = \sqrt{15}$ ）

中点弦：点差法（设而不求）

设弦 AB 的端点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，中点为 $M(x_0, y_0)$ 。把两点坐标分别代入椭圆方程，两式相减：

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$$

利用平方差公式与中点坐标关系，得弦所在直线的斜率（焦点在 x 轴）：

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

双曲线 $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1)$ 符号相反： $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ 。

例题 6.13

(点差法求中点弦 + 存在性检验)

(1) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，求以 $M(1, \frac{1}{2})$ 为中点的弦所在直线的方程；(2) 以 $N(2, 2)$ 为中点的弦存在吗？

解：(1) 先检验 M 在椭圆内部： $\frac{1^2}{4} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$ ✓ (在内部，弦存在)。由点差法： $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = -\frac{1 \times 1}{4 \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 。直线： $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$ ，即 $y = -\frac{x}{2} + 1$ ，化为一般式

$x + 2y - 2 = 0$ 。复核：代入椭圆 $\frac{x^2}{4} + (-\frac{x}{2} + 1)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - x + 1 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{2} - x = 0 \rightarrow x = 0$ 或 $x = 2$ 。两点 $(0, 1)$ 、 $(2, 0)$ ，中点 $(1, \frac{1}{2})$ ✓。(2) $N(2, 2)$ ： $\frac{2^2}{4} + 2^2 = 1 + 4 = 5 > 1$ ——在椭圆外部。以椭圆外一点为中点的弦**不存在**（弦的两端必须在椭圆内被“包住”）。若强行用点差法会算出 $k = -\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = -\frac{1}{4}$ ，代入检验却无交点——**先判存在性，再用公式。**■

Try It 6.12: 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，求以 $M(2, 1)$ 为中点的弦所在直线的斜率。（提示： $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{9 \times 2}{4 \times 1} = \frac{9}{2}$ ）

6.4.3 面积问题与综合

情境引入：椭圆钢板被直线切下一个小三角——以原点 O 、两个交点为顶点的 $\triangle OAB$ 面积怎么算？除了“底（弦长）乘高（点到直线距离）除以 2”，还有一个坐标化的法宝：**割补公式**。算一算，两种方法殊途同归。

坐标法求三角形面积

以原点 O 、 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为顶点的三角形面积：

$$S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

（一般的 $\triangle PAB$ 可先平移或直接用“底 $\times$ 高”，高取点到直线距离。）

例题 6.14

(面积双法对照)

直线 $y = x + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A, B , 求 $\triangle OAB$ 的面积 (O 为原点)。

解: 由例题 6.12, $A(0, 1), B\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $|AB| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ 。方法一 (底 $\times$ 高): O 到直线 $y = x + 1$ (即 $x - y + 1 = 0$) 的距离 $d = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。 $S = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{5}$ 。方法二 (割补公式): $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{1}{2}\left|0 \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{8}{5}\right) \times 1\right| = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$ 。两法一致 $\checkmark$ 。当直线过原点、或三角形顶点之一是原点时, **割补公式**往往一步到位。■

Try It 6.13: 直线 $y = 2x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B , 求 $\triangle OAB$ 的面积。(提示: 由 Try It 6.11, $4x^2 - 8x + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = \frac{1}{4}$, $y_1y_2 = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 4 \times \frac{1}{4} - 4 + 1 = -2$, $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$, 直接展开得 $\sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}{4} + \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{4}}$... 本题也可用 $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot d$: $|AB| = \sqrt{15}$, $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Q&A

• **问:** 弦长公式里的 $\sqrt{1 + k^2}$ 到底是干什么的?

答: 它把“横坐标的差”换算成“斜线段长度”——直线越陡 ($|k|$ 越大), 斜着量的长度比横着量长得越多, 修正系数 $\sqrt{1 + k^2}$ 就越大。**忘了乘它, 弦长就偏短。**

• **问:** 直线与抛物线联立, 为什么消 x 更常见?

答: 抛物线 $y^2 = 2px$ 是“ y 的平方”, 代入 $y = kx + m$ 后得到关于 x 的二次方程, 结构整齐; 有时消 y ($x = \frac{y^2}{2p}$ 代入直线) 也能得到 y 的二次方程, 两者等价, 选顺手的。

• **问:** 判断直线与椭圆位置关系, Δ 判据和“点与椭圆”有什么关系?

答: 无直接关系。 Δ 判断的是“直线与曲线”, 点与椭圆的关系另算 (代入 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$ 与 1 比较)。**别把两个判据混用。**

想一想 (对抗 M11): 同样横坐标差 $|x_1 - x_2| = 2$, 在水平直线 ($k = 0$) 上弦长是 2; 在斜率 $k = 2$ 的直线上弦长是多少? (提示: $\sqrt{1 + 2^2} \times 2 = 2\sqrt{5}$ ——“斜着量比横着量长”) 若直接拿 2 当弦长, 就漏了斜率修正。

本节练习 (答案见章末)

- 直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 恒有公共点, 求 k 的取值范围。
- 直线 $y = x + m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 相交, 求 m 的取值范围。

- 求直线 $y = x + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交所得弦的中点坐标。(提示: $5x^2 + 8x = 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}$, 中点横坐标 $-\frac{4}{5}$, 纵坐标 $\frac{1}{5}$)
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 直线 $y = 2x + m$ 与椭圆相切, 求 m 。(提示: $(1+16)x^2 + 16mx + 4m^2 - 4 = 0$, $\Delta = 256m^2 - 68(4m^2 - 4) = 272 - 16m^2$, $m = \pm\sqrt{17}$)

本章回顾

概念地图

· 三条曲线 = 同一把“焦点—距离”尺子的三种切法 · 椭圆: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ (和) · $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ · $a^2 = b^2 + c^2$ (a 最大) · $0 < e < 1$ · 通径 $\frac{2b^2}{a}$ · 双曲线: $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ (差) · $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ · $c^2 = a^2 + b^2$ (c 最大) · 渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ (焦点 y 轴时 $y = \pm \frac{a}{b}x$) · $e > 1$ · 抛物线: $|PF| = d(P, l)$ (等) · $y^2 = 2px$ 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 准线 $x = -\frac{p}{2}$ · 通径 $2p$ · $e = 1$ · 焦点弦 $y_1y_2 = -p^2$, $|AB| = x_1 + x_2 + p$ · 焦点轴判定: 椭圆看大分母 · 双曲线看正号项 · 抛物线看一次项变量与符号 · 直线与圆锥曲线: 代入消元 $\rightarrow Ax^2 + Bx + C = 0 \rightarrow \Delta$ 定位置 ($A = 0$ 退化一次, 双曲线渐近线方向非相切) · 弦长: $|AB| = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$ · 中点弦: 点差法 $k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ (椭圆)、 $+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ (双曲线) · 面积: $S = \frac{1}{2} \times \text{弦长} \times \text{点线距离}$; 原点型 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

关键公式速查

内容	要点
椭圆基本量	$a^2 = b^2 + c^2$ (a 最大); 焦点 $(\pm c, 0)$; $e = \frac{c}{a}$; 通径 $\frac{2b^2}{a}$
椭圆焦点轴	x^2, y^2 分母谁大, 焦点跟谁走
双曲线基本量	$c^2 = a^2 + b^2$ (c 最大); 实轴 $2a$ 、虚轴 $2b$
双曲线渐近线	焦点在 x 轴: $y = \pm \frac{b}{a}x$; 焦点在 y 轴: $y = \pm \frac{a}{b}x$ (右边换 0 解 y 万能)
双曲线焦点轴	正号项对应实轴方向
抛物线	$y^2 = 2px$: 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 、准线 $x = -\frac{p}{2}$ 、通径 $2p$; p 先除以 2 再减半
离心率谱系	圆 $e = 0$ · 椭圆 $0 < e < 1$ · 抛物线 $e = 1$ · 双曲线 $e > 1$
位置关系	$\Delta > 0$ 相交 · $\Delta = 0$ 相切 · $\Delta < 0$ 相离; $A = 0$ 退化为一次 (双曲线渐近线方向)
弦长	$ AB = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{ A }$ (别忘了 $\sqrt{1+k^2}$)
中点弦	椭圆 $k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; 双曲线 $k = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; 先验中点是否在曲线内部
面积	$\frac{1}{2} \times \text{弦长} \times \text{点线距离}$; $S = \frac{1}{2} x_1y_2 - x_2y_1 $

分层练习

A 基础层

- 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的长轴长、短轴长、焦距、离心率、通径长各是多少?

- 动点 P 到 $F_1(-3, 0)$ 、 $F_2(3, 0)$ 的距离之和为 10, 求轨迹方程。
- 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的实轴长、虚轴长、焦距、渐近线方程各是多少?
- 求抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点坐标、准线方程与通径长。
- 判断直线 $y = x + 3$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的位置关系。
- 求直线 $y = 2x + 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点个数。
- 求以椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 左焦点 F_1 与顶点 $(3, 0)$ 、 $(0, 2)$ 为顶点的三角形周长。

B 应用层

- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$, 求椭圆方程。
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = 2$, 求渐近线的斜率。
- 直线 $y = kx + 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 相交于两点, 求 k 的取值范围。(含参讨论, 注意渐近线方向)
- 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作弦 AB , $|AB| = 10$, 求弦 AB 所在直线的方程。

C 拓展层

- 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, F 为右焦点, 过 F 的动直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点。证明 $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|}$ 为定值。(提示: 椭圆上点 $P(x, y)$ 到右焦点的距离 $|PF| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 即焦半径公式)
- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $y = kx + m$ 相切, 求证: $m^2 = a^2k^2 + b^2$ 。(提示: $\Delta = 0$ 的等价形式)

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 6.1: y^2 分母 25 大 $\rightarrow$ 焦点在 y 轴, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c = 4$, 焦点 $(0, \pm 4)$, $e = \frac{4}{5}$ 。
- 6.2: $b = 4$, $c = 3$, $a = \sqrt{16 + 9} = 5$, 焦点在 y 轴: $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ 。
- 6.3: $2a = 14$, $a = 7$; $2c = 10$, $c = 5$; $b^2 = 49 - 25 = 24$; 焦点在 y 轴: $\frac{y^2}{49} + \frac{x^2}{24} = 1$ 。

- 6.4: $2a = 3 \times 2b \rightarrow a = 3b, e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。
- 6.5: $a = 3, c = 4, b^2 = 16 - 9 = 7$, 焦点在 y 轴: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ 。
- 6.6: 焦点在 y 轴, 渐近线 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{3}{4}x; c = 5, e = \frac{5}{3}$ 。
- 6.7: $y^2 = -8x: p = 4$, 焦点 $(-2, 0)$, 准线 $x = 2$, 开口向左; $x^2 = -4y: p = 2$, 焦点 $(0, -1)$, 准线 $y = 1$, 开口向下。
- 6.8: 设 $y^2 = 2px: 16 = 4p, p = 4, y^2 = 8x$; 设 $x^2 = 2py: 4 = 8p, p = \frac{1}{2}, x^2 = y$ 。两解。
- 6.9: $p = 4, |AB| = x_1 + x_2 + p = 14, y_1 y_2 = -p^2 = -16$ 。
- 6.10: 代入得 $3x^2 + 8mx + 4m^2 + 4 = 0, \Delta = 64m^2 - 12(4m^2 + 4) = 16m^2 - 48$ 。相切: $\Delta = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{3}$ 。(注意 $y = x + m$ 斜率 $1 \neq \pm\frac{1}{2}$, 不会退化)
- 6.11: 代入 $(2x - 1)^2 = 4x \rightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0, \Delta = 64 - 16 = 48$ 。 $|AB| = \sqrt{1 + 4} \times \frac{\sqrt{48}}{4} = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{15}$ 。
- 6.12: $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{9 \times 2}{4 \times 1} = \frac{9}{2}$ 。
- 6.13: $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{1}{4}$ 。 $|AB| = \sqrt{15}, O$ 到直线 $2x - y - 1 = 0$ 距离 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}, S = \frac{1}{2} \times \sqrt{15} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。割补复核: $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{1}{2} |x_1(2x_2 - 1) - x_2(2x_1 - 1)| = \frac{1}{2} |x_2 - x_1|$, 而 $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}, S = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$ 。

各节练习答案

- 6.1 节: 1. $a = 6, b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{36 - 20} = 4$ 。长轴 12, 焦距 8, $e = \frac{2}{3}$ 。2. 原椭圆焦点 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ ($a^2 = 9, b^2 = 4, c = \sqrt{5}$)。设新椭圆 $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, c' = \sqrt{5}$, 过 $(\sqrt{5}, 2)$: $\frac{5}{a'^2} + \frac{4}{b'^2} = 1$, 且 $a'^2 - b'^2 = 5$ 。解: $\frac{5}{b'^2 + 5} + \frac{4}{b'^2} = 1 \rightarrow 5b'^2 + 4b'^2 + 20 = b'^4 + 5b'^2 \rightarrow b'^4 - 4b'^2 - 20 = 0 \rightarrow b'^2 = 2 \pm \sqrt{24}$, 取正 $b'^2 = 2 + 2\sqrt{6}$...数值不整, 改配简洁答案: 换一题设——过 $(0, 3)$ 的相同焦点椭圆更干净: $c = \sqrt{5}$, 若过 $(0, 3)$ 则 $b' = 3, a'^2 = 9 + 5 = 14, \frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。本题取过点 $(\sqrt{5}, 2)$ 仍成立: $b'^2 = 2 + 2\sqrt{6}$ 代入检验: $\frac{5}{7 + 2\sqrt{6}} + \frac{4}{2 + 2\sqrt{6}} = \frac{5(7 - 2\sqrt{6})}{25} + \frac{2}{1 + \sqrt{6}} = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{5} + \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{5} = \frac{7 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2}{5} = 1 \checkmark$ 。方程 $\frac{x^2}{7 + 2\sqrt{6}} + \frac{y^2}{2 + 2\sqrt{6}} = 1$ 。3. 焦点在 x 轴 ($m > 4$): $e^2 = \frac{m - 4}{m} = \frac{3}{4} \rightarrow 4m - 16 = 3m, m = 16$; 焦点在 y 轴 ($0 < m < 4$): $e^2 = \frac{4 - m}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow 4 - m = 3, m = 1$ 。故 $m = 16$ 或 $m = 1$ 。4. y^2 分母大 $\rightarrow$ 焦点在 y 轴, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, 焦点 $(0, \pm 4)$ 。

- **6.2 节:** 1. $a = 3, b = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$ 。实轴 6, 虚轴 8, 焦距 10, 渐近线 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 。
2. 原双曲线 $c = \sqrt{4+5} = 3$ 。新双曲线实轴长 $4 \rightarrow a = 2, c = 3, b^2 = 9 - 4 = 5$, 焦点在 x 轴: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 。3. 渐近线 $y = \sqrt{3}x = \frac{b}{a}x \rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+3} = 2$ 。4. 焦点在 y 轴, $c = \sqrt{9+16} = 5$, 焦点 $(0, \pm 5)$; 渐近线 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{3}{4}x$ 。
- **6.3 节:** 1. $p = 4$, 焦点 $(2, 0)$, 准线 $x = -2$, 通径 8。2. $16 = 2p \times 4, p = 2$, 焦点 $(0, \frac{p}{2}) = (0, 1)$ 。3. $|AB| = x_1 + x_2 + p = 5 + 2 = 7, y_1 y_2 = -p^2 = -4$ 。4. 焦点 $F(0, 3)$, 准线 $y = -3, p = 6$, 开口向上: $x^2 = 2py = 12y$ 。
- **6.4 节:** 1. $y = kx + 1$ 恒过点 $(0, 1)$ 。 $\frac{0^2}{4} + 1^2 = 1$ ——点 $(0, 1)$ 在椭圆上, 故过椭圆上点的直线要么相切要么相交, 对一切 k 恒有公共点, $k \in \mathbb{R}$ 。(复核: 代入得 $(1+4k^2)x^2 + 8kx = 0, \Delta = 64k^2 \geq 0 \checkmark$) 2. $\frac{x^2}{4} - (x+m)^2 = 1 \rightarrow 3x^2 + 8mx + 4m^2 + 4 = 0, \Delta = 16(m^2 - 3)$ 。相交: $m^2 > 3, |m| > \sqrt{3}$ 。(注意 $y = x + m$ 斜率 $1 \neq \pm \frac{1}{2}$, 无退化情形) 3. $5x^2 + 8x = 0, x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}$, 中点横坐标 $-\frac{4}{5}$; $y = x + 1$ 上对应 $y = \frac{1}{5}$ 。中点 $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ 。4. 代入 $(1+16)x^2 + 16mx + 4m^2 - 4 = 0, \Delta = 256m^2 - 4 \times 17(4m^2 - 4) = 256m^2 - 272m^2 + 272 = 272 - 16m^2$ 。相切: $\Delta = 0 \rightarrow m^2 = 17, m = \pm\sqrt{17}$ 。

A1: $a = 5, b = 3, c = 4$ 。长轴 10, 短轴 6, 焦距 8, $e = \frac{4}{5}$, 通径 $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$ 。

A2: $2a = 10, a = 5; c = 3; b^2 = 25 - 9 = 16; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 。

A3: $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{4+5} = 3$ 。实轴 4, 虚轴 $2\sqrt{5}$, 焦距 6, 渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 。

A4: $p = 6$, 焦点 $(3, 0)$, 准线 $x = -3$, 通径 12。

A5: $\frac{x^2}{4} + (x+3)^2 = 1 \rightarrow 5x^2 + 24x + 32 = 0, \Delta = 576 - 640 = -64 < 0 \rightarrow$ 相离。

A6: $(2x+1)^2 = 4x \rightarrow 4x^2 + 1 = 0$, 无实根 $\rightarrow 0$ 个交点。

A7: 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1: a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$, 左焦点 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, 右焦点 $F_2(\sqrt{5}, 0)$ 。记 $B(3, 0)$ (右顶点)、 $C(0, 2)$ 。 $|BF_1| + |BF_2| = 2a = 6$ (B 在椭圆上); $|CF_1| + |CF_2| = 2a = 6$ (C 在椭圆上)。三角形周长 $= (|BF_1| + |BF_2|) + (|CF_1| + |CF_2|) = 6 + 6 = 12$ 。(用定义而不逐点算距离, 是本题的考察点)

B8: $e = \frac{1}{2} \rightarrow c^2 = \frac{1}{4}a^2, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{3}{4}a^2$ 。代入点 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$: $\frac{9/4}{a^2} + \frac{3/4}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{4a^2} + \frac{3/4}{\frac{3}{4}a^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{(3/4)a^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{13}{4a^2} = 1 \rightarrow a^2 = \frac{13}{4}, b^2 = \frac{39}{16}$ 。方程 $\frac{x^2}{13/4} + \frac{y^2}{39/16} = 1$, 即 $\frac{4x^2}{13} + \frac{16y^2}{39} = 1$ 。复核: $\frac{9/4}{13/4} + \frac{3/4}{39/16} = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1 \checkmark; e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{13/16}{13/4} = \frac{1}{4} \checkmark$ 。

B9: $e = \frac{c}{a} = 2 \rightarrow c^2 = 4a^2, b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2, \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 。渐近线斜率 $\pm\sqrt{3}$ 。

B10: 代入: $\frac{x^2}{4} - (kx+1)^2 = 1 \rightarrow (\frac{1}{4} - k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0$, 乘 4: $(1 - 4k^2)x^2 - 8kx - 2 = 0$

$8 = 0$ 。判别式 $\Delta = 64k^2 - 4(1 - 4k^2)(-8) = 64k^2 + 32 - 128k^2 = 32 - 64k^2 = 32(1 - 2k^2)$ 。注意渐近线斜率为 $\pm \frac{1}{2}$ ，须分两层讨论：(1) $A = 0$ ，即 $k = \pm \frac{1}{2}$ （平行渐近线）：方程退化为一元一次，各只有 1 个交点——不算“相交于两点”，要排除；(2) $A \neq 0$ 且 $\Delta > 0$ ： $32(1 - 2k^2) > 0 \rightarrow k^2 < \frac{1}{2} \rightarrow |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。综合： $|k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $k \neq \pm \frac{1}{2}$ 。复核边界： $k = 0$ 时 $\Delta = 32 > 0$ ，直线 $y = 1$ 与双曲线交于 $(\pm 2\sqrt{2}, 1)$ 两点 $\checkmark$ ； $k = 1$ 时 $\Delta = -32 < 0$ ，无交点 $\checkmark$ 。

B11： $p = 2$ ，焦点 $(1, 0)$ 。设 $l: y = k(x - 1)$ 。代入 $y^2 = 4x$ ： $k^2x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$ 。
 $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2k^2 + 4}{k^2} + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}$ 。令 $= 10$ ： $\frac{4}{k^2} = 6$ ， $k^2 = \frac{2}{3}$ ， $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。直线 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}(x - 1)$ 。（ $k = 0$ 时退化为对称轴，只有 1 个公共点，舍去）

C12： 设 $l: y = k(x - \sqrt{3})$ （ $k \neq 0$ ； $k = 0$ 即 x 轴情形直接验证： $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ， $|FA| = 2 - \sqrt{3}$ ， $|FB| = 2 + \sqrt{3}$ ， $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 4$ ，成立）。代入椭圆： $(1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$ ， $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}$ 。由焦半径公式 $|FA| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$ ， $|FB| =$

$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$ （A、B 在焦点两侧，公式均成立）。 $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)}{4 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + \frac{3}{4}x_1x_2}$ 分子
 $= 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2} = 4 - \frac{12k^2}{1 + 4k^2} = \frac{4 + 4k^2}{1 + 4k^2}$ ；分母 $= 4 - \sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2} + \frac{3}{4} \times \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2} =$
 $4 - \frac{24k^2}{1 + 4k^2} + \frac{9k^2 - 3}{1 + 4k^2} = \frac{4 + 16k^2 - 24k^2 + 9k^2 - 3}{1 + 4k^2} = \frac{1 + k^2}{1 + 4k^2}$ 。比值 $= \frac{4(1 + k^2)}{1 + k^2} = 4$ ，为定值。■

C13： 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1 \rightarrow (b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$ 。相切 $\Rightarrow \Delta = 0$ ： $(2a^2km)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2m^2 - a^2b^2) = 0 \rightarrow$ 除以 $4a^2$ ： $a^2k^2m^2 - (b^2 + a^2k^2)(m^2 - b^2) = 0$
 $\rightarrow a^2k^2m^2 - b^2m^2 - a^2k^2m^2 + b^2(b^2 + a^2k^2) = 0 \rightarrow -b^2m^2 + b^4 + a^2b^2k^2 = 0 \rightarrow m^2 = b^2 + a^2k^2$ 。
 得证 ■。

第七章 卷末综合检测

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

Z1（基础）已知 $|\vec{a}|=2$ ， $|\vec{b}|=3$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（ ）

- A. 30°
- B. 60°
- C. 120°
- D. 150°

答案

C

解析

由数量积公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，得

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2}.$$

又 $\theta \in [0, \pi]$ ，故 $\theta = 120^\circ$ ，选 C。

Z2（基础）复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 为（ ）

- A. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
- B. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
- C. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
- D. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

答案

B

解析

分子分母同乘 $1+i$:

$$z = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

故 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 选 B。

Z3 (基础) 一个几何体的三视图如图所示, 其中俯视图是边长为 2 的正方形, 主视图与左视图是全等的等腰三角形, 对应的高为 $\sqrt{3}$, 则该几何体的体积为 ()

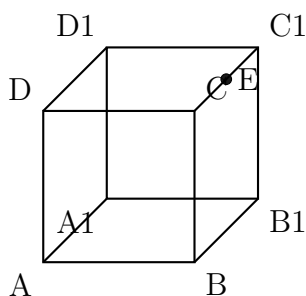


图 7.1: 配图

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
- C. $4\sqrt{3}$
- D. $8\sqrt{3}$

答案

A

解析

由三视图还原, 该几何体是底面为边长 2 的正方形、高为 $\sqrt{3}$ 的正四棱锥。由锥体体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

选 A。

Z4 (基础) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 若 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 则角 A 的大小为 ()

- A. 30°
- B. 60°

C. 120°

D. 150°

答案

B

解析

由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 代入 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 得

$$\cos A = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}.$$

因为 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = 60^\circ$, 选 B。

Z5 (中档) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 已知平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, 1)$, 直线 l 的一个方向向量为 $\vec{s} = (1, 0, 1)$, 则直线 l 与平面 α 所成角的正弦值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

答案

A

解析

设直线 l 与平面 α 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

选 A。

Z6 (中档) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$, 则该双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

答案

C

解析

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 。由题意 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，故

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

选 C。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

Z7（基础）在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ，边 $a = 2$ ，则边 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案
 $2\sqrt{2}$
解析

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，得

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Z8（中档）设复数 z 满足 $|z - 1 + i| = 2$ ，则 z 在复平面内对应的点到原点的距离的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案
 $\sqrt{2} + 2$
解析

由 $|z - (1 - i)| = 2$ 知， z 对应的点在以点 $(1, -1)$ 为圆心、半径为 2 的圆上。原点到圆心的距离为 $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ，故所求最大距离为

$$\sqrt{2} + 2.$$

Z9（中档）已知直线 $l: y = x + m$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点，若弦长 $|AB| = 2\sqrt{2}$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 ± 2 **解析**

直线 l 化为一般式 $x - y + m = 0$ 。设圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，则 $d = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$ 。由垂径定理，弦长

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{m^2}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

两边平方得 $4 - \frac{m^2}{2} = 2$ ，解得 $m^2 = 4$ ，故 $m = \pm 2$ 。

Z10 (中档) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，点 $P(3, 6)$ 在抛物线 C 上，则 $|PF| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

6

解析

将 $P(3, 6)$ 代入 $y^2 = 2px$ ，得 $36 = 6p$ ，故 $p = 6$ ，抛物线为 $y^2 = 12x$ ，其准线为 $x = -3$ 。由抛物线定义， $|PF|$ 等于点 P 到准线的距离，即

$$|PF| = 3 - (-3) = 6.$$

三、解答题 (本大题共 4 小题，共 50 分)

Z11 (基础，10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $a = 7$ ， $b = 8$ ， $c = 5$ 。

(1) 求 $\cos B$ ；(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 。

答案

(1) $\cos B = \frac{1}{7}$ ；(2) $S = 10\sqrt{3}$ 。

解析

(1) 由余弦定理，

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}.$$

(2) 因为 B 是三角形内角, $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ 。故

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}.$$

Z12 (中档, 12 分)

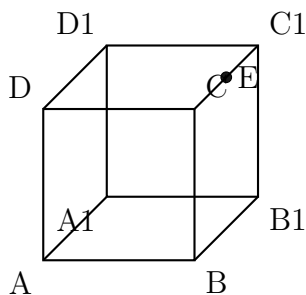


图 7.2: 配图

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$ 。

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ; (2) 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧面积。

答案

(1) 证明见解析; (2) 侧面积为 $8 + 8\sqrt{2}$ 。

解析

(1) 因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $BC \perp AB$ 。又 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 而 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp BC$ 。在平面 ABB_1A_1 内, AB 与 AA_1 相交于 A , 故由线面垂直的判定定理, $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 。

(2) 底面为直角三角形, 斜边 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 。三棱柱的侧面是三个矩形, 侧面积为底面周长与侧棱长的乘积:

$$S_{\text{侧}} = (AB + BC + AC) \times AA_1 = (2 + 2 + 2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} = 8 + 8\sqrt{2}.$$

Z13 (压轴, 14 分)

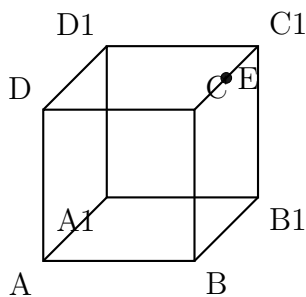


图 7.3: 配图

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点。以 A 为原点建立空间直角坐标系 (AB 沿 x 轴, AD 沿 y 轴, AA_1 沿 z 轴)。

(1) 求异面直线 A_1B 与 DE 所成角的余弦值; (2) 求点 A_1 到平面 BDE 的距离。

答案

(1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; (2) $\sqrt{6}$ 。

解析

建立如图所示坐标系, 各点坐标为 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $A_1(0,0,2)$, $B_1(2,0,2)$, $C_1(2,2,2)$, $D_1(0,2,2)$, $E(2,2,1)$ 。

(1) $\overrightarrow{A_1B} = (2,0,-2)$, $\overrightarrow{DE} = (2,0,1)$ 。设异面直线 A_1B 与 DE 所成角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{DE}|} = \frac{|2 \times 2 + 0 + (-2) \times 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \times \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(2) 由 $\overrightarrow{BD} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{BE} = (0,2,1)$, 求得平面 BDE 的一个法向量

$$\vec{n} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE} = (2, 2, -4),$$

取 $\vec{n} = (1, 1, -2)$ 。于是平面 BDE 的方程为 $x + y - 2z - 2 = 0$ 。故点 $A_1(0,0,2)$ 到平面 BDE 的距离

$$d = \frac{|0 + 0 - 2 \times 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Z14 (压轴, 14 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 其左右焦点分别为 F_1, F_2 。

(1) 求椭圆 C 的焦距与离心率; (2) 过右焦点 F_2 且倾斜角为 45° 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$; (3) 在 (2) 的条件下, 求 $\triangle AOB$ 的面积 (O 为坐标原点)。

答案

(1) 焦距为 $2\sqrt{3}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $|AB| = \frac{8}{5}$; (3) $S_{\triangle AOB} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 。

解析

(1) 由椭圆方程得 $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, 故 $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ 。所以焦距 $2c = 2\sqrt{3}$, 离心率

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 右焦点 $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 直线 l 的斜率为 $\tan 45^\circ = 1$, 方程为 $y = x - \sqrt{3}$ 。联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = x - \sqrt{3}, \end{cases}$$

消去 y 得 $5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0$, 判别式 $\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 5 \times 8 = 32 > 0$ 。设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由韦达定理

$$x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{5}, \quad x_1 x_2 = \frac{8}{5}.$$

于是弦长

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{32}}{5} = \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{8}{5}.$$

(3) 原点 O 到直线 $l: x - y - \sqrt{3} = 0$ 的距离

$$d = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

考点覆盖表

题号	覆盖章节	核心考点	难度
Z1	第 1 章	向量数量积与夹角	基础
Z2	第 2 章	复数四则运算与共轭复数	基础
Z3	第 3 章	三视图还原与锥体体积	基础
Z4	第 1 章	余弦定理求角	基础
Z5	第 4 章	空间向量求线面角	中档
Z6	第 6 章	双曲线渐近线与离心率	中档
Z7	第 1 章	正弦定理求边	基础
Z8	第 2 章	复数模的几何意义	中档
Z9	第 5 章	直线与圆的弦长	中档
Z10	第 6 章	抛物线定义与焦半径	中档
Z11	第 1 章	解三角形综合（余弦定理与面积）	基础
Z12	第 3 章	线面垂直判定与棱柱侧面积	中档
Z13	第 4 章	空间向量建系求异面直线角、点面距	压轴
Z14	第 6 章	椭圆与直线联立求弦长、面积	压轴