

PATHWAY

数学 I

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 怎么把话说精确：集合与常用逻辑用语	1
1.1 集合的概念：把东西归堆的精确规则	1
1.2 集合间的基本关系：谁的圈装得下谁	4
1.3 集合的基本运算：把两堆合起来、挖出共同的、算掉剩下的	6
1.4 充分条件与必要条件：“够用”和“必需”是两码事	9
1.5 全称量词与存在量词：“所有”还是“有的”，分量不一样	11
第二章 怎么比较大小：一元二次函数、方程和不等式	19
2.1 等式性质与不等式性质：谁大谁小，作个差就明白	19
2.2 基本不等式：两个数的“最优解”	22
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式：三个“二次”，一根抛物线	25
第三章 怎么刻画对应关系：函数的概念与性质	33
3.1 函数的概念及其表示：从“计价器”到“对应规则”	33
3.2 函数的基本性质：函数的“性格”	38
3.3 幂函数：几何世界里的熟面孔	41
3.4 函数的应用（一）：拿函数干活	42
第四章 暴涨与压缩的世界：指数函数与对数函数	49
4.1 指数：谁自乘 n 次等于 a ?	49
4.2 指数函数：翻倍翻倍再翻倍	53
4.3 对数：问出“3 的几次方等于 81”	56
4.4 对数函数：从“涨了多少”倒推“涨了很久”	59
4.5 函数的应用（二）：把解不出的方程“夹”出来	62
第五章 世界为什么是周期性的：三角函数	73
5.1 任意角和弧度制：360° 装不下运动员的三周跳	73

5.2	三角函数的概念：绕圈圈的坐标学	76
5.3	诱导公式：转半圈、翻个面，大角变小角	80
5.4	三角函数的图象与性质：摸清波浪的脾气	82
5.5	三角恒等变换：75° 也能拆出来算	87
5.6	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ：三个旋钮，一条波浪	89
5.7	三角函数的应用：给世界的心跳做记录	91
第六章	规律怎么一步步长出来：数列	101
6.1	数列的概念：从“一堆数”到“一系列数”	101
6.2	等差数列：每一步都加同一个数	105
6.3	等比数列：每一步都乘同一个数	108
6.4	数学归纳法：推倒第一块骨牌，推倒全部骨牌	112
第七章	变化有多快：一元函数的导数及其应用	119
7.1	导数的概念及其意义：从“一段的平均”到“那一刻的精确”	119
7.2	导数的运算：一张公式表，让求导不再从头算起	124
7.3	函数的单调性与极值：用“瞬时斜率”读懂函数的一生	127
7.4	函数的最大（小）值与导数：在整段区间里找“总冠军”	131
第八章	卷末综合检测	139

第一章 怎么把话说精确：集合与常用逻辑用语

章首情境

1.1 集合的概念：把东西归堆的精确规则

图书角 60 本书要上架，同桌让你“把文学类的放一起”。你扫一眼：什么才算“文学类”？标准一含糊，书架就乱；标准一精确，每本书该去哪堆，一问便知。这一节，我们就给“归堆”立规矩。

1.1.1 集合与元素

学习目标

- 理解集合与元素的概念，掌握集合元素的三个特性；
- 会用符号 $\in$ 、 $\notin$ 表示元素与集合的关系；
- 记住常见数集的记号： $\mathbb{N}$ 、 $\mathbb{N}^*$ 、 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Q}$ 、 $\mathbb{R}$ 。

前置复习 (Be Prepared)

- 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解有哪些？把它写成“花括号”的记法试试。
- “个子高的同学”和“身高超过 1.7 米的同学”，哪个能明确判断一位同学是否属于它？

情境引入：同桌又问：“图书角‘能外借的书’有哪些？”你手一指：能借的一堆、已借出的一堆，分得干脆利落。可话题换成“好看的书”，你当场卡壳——**标准一模糊，手就抬不起来**。分出的每一堆，在数学上都叫**集合**；而“能借/不能借”这种一问便知的标准，正是集合要守的第一条规矩。

集合的概念

一般地，我们把**研究对象**统称为**元素**，把一些元素组成的**总体**叫做**集合**。集合通常用大写拉丁字母表示（如 A 、 B ），元素用小写拉丁字母表示（如 a 、 b ）。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于** A ，记作 $a \in A$ ；否则说 a **不属于** A ，记作 $a \notin A$ 。

常用数集

记号	名称	含义
$\mathbb{N}$	自然数集	全体自然数 (含 0)
$\mathbb{N}^*$ (或 $\mathbb{N}_+$)	正整数集	$1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	整数集	全体整数
$\mathbb{Q}$	有理数集	全体有理数
$\mathbb{R}$	实数集	全体实数

How To: 判断一组对象能否组成集合

- 找一个“检验标准”：给定一个对象，能否**明确回答**它属不属于这组对象；
- 能明确回答 $\rightarrow$ 可以组成集合（标准不唯一也没关系）；
- 不能明确回答（标准模糊，如“较高”“接近”） $\rightarrow$ 不能组成集合。

例题 1.1

（判断是否构成集合）

判断下列对象能否组成集合；若能，指出它的元素。

(1) 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实数解；(2) 本班“成绩优秀”的同学；(3) 所有大于 1 且小于 4 的整数。

解：(1) 能。解方程 $(x-3)(x+1) = 0$ ，得 $x = 3$ 或 $x = -1$ ，元素是 -1 和 3 。(2) 不能。“优秀”标准不明确——考 85 分算不算优秀？无法对每位同学给出确定的回答，违背确定性。(3) 能。元素是 2 和 3，即集合 $\{2, 3\}$ 。

Try It 1.1: 判断下列对象能否组成集合：(1) 方程 $x^2 = 9$ 的实数解；(2) 接近 0 的数；(3) 大于 3 且小于 10 的全体奇数。

Q&A

- **问：** $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{3, 2, 1\}$ 是同一个集合吗？ $\{1, 1, 2\}$ 合法吗？

答：都是同一个集合。元素无序， $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ ；按互异性，重复元素只算一个， $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ 。

数学视野：集合论是数学中最年轻的基础分支之一。19 世纪末，康托尔在研究“无穷多到什么程度”时创立了朴素集合论，把一切数学对象最终归结为“哪些元素属于哪个集合”。此后“属于”成了数学唯一不定义的基本关系。

想一想：全体实数能组成集合吗？如果元素是“所有比 1 大的数”，这个集合有多少个元素？

1.1.2 集合的表示法

学习目标

- 掌握列举法，会把元素有限的集合一一列出；
- 掌握描述法，会用 $\{x \mid p(x)\}$ 表示集合；
- 会根据集合特征选用合适的表示法。

前置复习：用“花括号”写出：方程 $x + 3 = 7$ 的解；小于 5 的正整数。

列举法：把集合的元素一一**列举**出来，用逗号隔开，用花括号括起来，如 $\{1, 2, 3, 4\}$ 、 $\{a, b, c\}$ 。元素较多但有规律时，可写前几个再用省略号，如 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 。

描述法：用集合中元素的**共同特征**表示集合，一般形式为

$$\{x \mid x \text{ 具有的性质 } p(x)\}$$

其中竖线“ $\mid$ ”读作“使得”。例如 $\{x \mid x \text{ 是偶数}\}$ 表示所有偶数组成的集合。

How To：选用合适的表示法

- 元素有限且不多 $\rightarrow$ 用**列举法**（直接写出）；
- 元素无限或很多、但有共同特征 $\rightarrow$ 用**描述法**（写出特征）；
- 需要精确检验时，可两种方法并用。

例题 1.2

（集合的表示）

（1）用列举法表示集合 $A = \{x \mid x \text{ 是小于 8 的正整数}\}$ ；（2）用列举法表示集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ；（3）用描述法表示集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 。

解：（1）小于 8 的正整数是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，故 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。（2）解方程： $(x - 2)(x - 3) = 0$ ， $x = 2$ 或 $x = 3$ ，故 $B = \{2, 3\}$ 。（3）元素都是不超过 10 的正偶数，可写成

$$\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 5\}$$

Try It 1.2：（1）用列举法表示 $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$ ；（2）用描述法表示集合 $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ 。

想一想（真实情境）：地铁出口指示牌、医院分诊台、图书馆分类号——把乘客、病人、图书分门别类，本质都是把对象归入特定集合。试着用描述法写出你书包里“所有红笔”组成的集合。

练一练：用列举法表示 $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\}$ 。

本节练习（答案见章末）

- 判断下列对象能否组成集合；若能，用列举法写出它的元素：（1）小于 6 的正偶数；（2）“长得像爸爸”的人；（3）方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的实数解。

- 用列举法表示集合 $B = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ ；用描述法表示集合 $\{1, 4, 9, 16\}$ 。
- 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空： 3 _____ $\mathbb{N}$, -2 _____ $\mathbb{N}$, 0 _____ $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}$ _____ $\mathbb{Z}$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbb{Q}$, π _____ $\mathbb{R}$ 。
- 班级合唱团报名名单上写着“李明、王芳、李明、张伟”。按集合的规则整理这份名单，这个集合有几个元素？请写出来。

1.2 集合间的基本关系：谁的圈装得下谁

选科报名，老师把“选物理”的名单和“选理科”的名单贴在一起，你一眼看出：前者整张都被后者盖住。可“一部分”到底怎么算数？盖住了就算，还是非得少点什么才算？这一节，把“包含”两个字掰开揉碎。

1.2.1 子集与真子集

学习目标

- 理解子集、真子集的概念，会用 $\subseteq$ 、 $\subsetneq$ 表示；
- 会用 Venn 图表示集合间的包含关系；
- 会判断两个集合之间是否有包含关系。

前置复习： $\{1, 2\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 的元素有什么关系？用“属于”符号说一说。

情境引入：选科报名，两张名单摊在桌上：“选物理”的一张、“选理科”的一张。你试着把第一张盖在第二张上——严丝合缝，没漏出一点。这个“整张都被盖住”，在集合里叫**子集**。

子集的概念

一般地，对于两个集合 A 、 B ，如果集合 A 中**任意一个元素**都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \quad (\text{读作“} A \text{ 包含于 } B \text{”})$$

如果 $A \subseteq B$ ，但存在 $x \in B$ 且 $x \notin A$ ，就称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneq B$ 。

Venn 图：用平面上的封闭曲线（圆、椭圆等）内部表示集合，这种图叫 **Venn 图**。 $A \subseteq B$ 时，圆 A 整个落在圆 B 内部。

How To：判断 A 是否为 B 的子集

- 从 A 中任意取出一个元素（或逐一检查有限个元素）；
- 检验它是否都属于 B ；
- 全都属于 $\rightarrow A \subseteq B$ ；只要有一个不属于 $\rightarrow A \not\subseteq B$ 。

例题 1.3

(判断子集关系)

已知 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是小于 } 4 \text{ 的正整数}\}$ 。

(1) 判断 $A \subseteq B$ 是否成立; (2) 判断 $A \subseteq C$ 、 $B \subseteq C$ 、 $C \subseteq B$ 是否成立。

解: (1) A 的元素 1, 2 都在 B 中, 故 $A \subseteq B$ 成立。(2) $C = \{1, 2, 3\}$ 。 A 的元素都在 C 中 $\rightarrow A \subseteq C$ 成立; B 的元素都在 C 中 $\rightarrow B \subseteq C$ 成立; C 的元素 3 不在 B 中 $\rightarrow C \not\subseteq B$ 不成立。此时 $B \subsetneq C$, 而 $A \subsetneq B$ 。

Try It 1.3: 已知 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x \mid x^2 = x\}$ 。求集合 B , 并判断 A 、 B 之间的包含关系。

1.2.2 空集与集合相等

学习目标

- 理解空集的概念, 掌握空集的特殊规定;
- 理解集合相等的定义, 会用“互相包含”判断相等;
- 会计算含 n 个元素的集合的子集个数。

前置复习: 方程 $x^2 + 1 = 0$ 有实数解吗? 解集里“一个元素也没有”, 它还是集合吗?

空集: 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\varnothing$ 。**规定:** 空集是任何集合的子集, 即 $\varnothing \subseteq A$ 。

集合的相等: 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 就说集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$ 。

子集个数规律: 含 n 个元素的集合有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集。以 $A = \{a, b\}$ 为例: 子集为 $\varnothing$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$, 共 $2^2 = 4$ 个, 其中真子集 3 个。

How To: 由包含关系求参数

- 先解出能用列举法写出的集合 (如方程解集);
- 把“子集”转化为“元素必在”的条件, 写成等式或不等式;
- **不要漏掉空集:** 当待求参数使集合为空集时, 也满足“是子集”。

例题 1.4

(由包含关系求参数)

已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的值。

解: 先解 A : $(x - 1)(x - 2) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 故 $A = \{1, 2\}$ 。再讨论 B : (1) 若 $a = 0$, 方程 $0 \cdot x - 1 = 0$ 无解, $B = \varnothing$, 空集是任何集合的子集, 满足条件; (2) 若 $a \neq 0$, $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$, 由 $B \subseteq A$ 知 $\frac{1}{a} = 1$ 或 $\frac{1}{a} = 2$, 即 $a = 1$ 或 $a = \frac{1}{2}$ 。

综上, $a = 0$ 或 $a = 1$ 或 $a = \frac{1}{2}$ 。

Try It 1.4: 已知 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid ax = 1\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的值。

学习提示: “子集个数是 2^n ” 怎么记? 把 n 个元素想象成 n 个开关, 每个开关都有“选、不选”两种状态, 所以共有 2^n 种取法——空集就是全部“不选”, 全集就是全部“选”。

想一想: $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 相等吗? $\{\emptyset\}$ 中有几个元素?

本节练习 (答案见章末)

- 已知 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是小于 } 7 \text{ 的正偶数}\}$ 。判断 A 与 B 的关系。

—含4个元素的集合共有_____个子集, 其中真子集有_____个。

- 已知 $A = \{2, 4\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 且 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围。
- 某班“数学小组”有 5 人, “理科小组”有 8 人, 已知数学小组的每名成员都在理科小组中。(1) 用符号表示这两个小组对应集合的关系; (2) 数学小组是理科小组的真子集吗? 为什么?
- 已知集合 A 共有 16 个子集。(1) A 中有几个元素? (2) A 有多少个真子集? 多少个非空真子集? (提示: 别把“真子集”“非空真子集”当成同一个数)

1.3 集合的基本运算: 把两堆合起来、挖出共同的、算掉剩下的

两个兴趣小组的报名单摆在桌上, 老师连问三句: 既报数学又报编程的有谁? 至少报一项的有谁? 报了数学却没报编程的呢? 你来回勾画三张名单——这正是集合的三种运算。

1.3.1 交集与并集

学习目标

- 理解交集、并集的概念, 会求两个集合的交集与并集;
- 掌握交集、并集的简单性质;
- 会用 Venn 图表示交、并运算。

前置复习: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ 。哪些数既在 A 中又在 B 中? 哪些数至少属于其中一个?

情境引入: 数学兴趣小组和编程小组同时招人, 你手里两份名单 A 、 B 。老师要“两样都报的人”——你找两份名单重叠的部分; 要“至少报一项的人”——你把两份名单并起来, 重复的名字只留一次。前者叫交集, 后者叫并集。

交集与并集

由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A \cap B$ ：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A \cup B$ ：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

基本性质： $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$; 且 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ 。

How To： 求两个集合的交集与并集

- 明确两个集合的元素（列举或画数轴）；
- 交集：找“同时属于两个集合”的元素；
- 并集：把所有元素合并，重复的只留一个；
- 用 Venn 图或数轴检验一遍。

例题 1.5

（求交集与并集）

已知 $A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \mid 1 < x \leq 5\}$, 求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$ 。

解：画数轴： A 是 $[-1, 3)$, B 是 $(1, 5]$ 。交集取“两段都覆盖”的部分： $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 3\}$ ；并集取“两段合起来”的部分： $A \cup B = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$ 。

Try It 1.5： 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$ 。

探究活动： 给每位同学发一张卡片，一面写“喜欢篮球/不喜欢”，另一面写“喜欢羽毛球/不喜欢”。把全班分成四堆：两个都喜欢、只喜欢篮球、只喜欢羽毛球、两个都不喜欢。哪一堆对应 $A \cap B$ ？哪一堆对应“只喜欢篮球”？四堆人数加起来与全班人数有何关系？（提示：这正是容斥原理的雏形）

练一练： 已知 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求 $A \cap B$ 、 $A \cup B$ 。

1.3.2 补集与全集

学习目标

- 理解全集与补集的概念，会求给定集合的补集；
- 掌握补集的运算性质；
- 会用 Venn 图表示补集。

前置复习： $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 。A 中有哪些元素不在 B 中？

全集与补集

如果一个集合含有我们**所研究问题中涉及的所有元素**，那么就称这个集合为**全集**，通常记作 U 。对于一个集合 A ，由全集 U 中**不属于** A 的所有元素组成的集合，称为集合 A 相对于全集 U 的**补集**，记作 $\complement_U A$ ：

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

补集性质： $A \cup (\complement_U A) = U$, $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$, $\complement_U(\complement_U A) = A$ 。

How To：求一个集合的补集

- 先明确全集 U （题目说“相对于全集 U ”， U 不能随便选）；
- 把 U 中的元素逐一检查：不在 A 中的，都写进补集；
- 用 $A \cup (\complement_U A) = U$ 检验：两边拼起来正好是全集。

例题 1.6

(求补集)

设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 6\}$ 。求 $\complement_U A$ 、 $\complement_U B$ 以及 $\complement_U(A \cup B)$ 。

解： $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8\}$ (U 中不在 A 里的元素)； $\complement_U B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 。先算 $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ ，再取补集得 $\complement_U(A \cup B) = \{2, 4, 8\}$ 。

Try It 1.6：设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ，求 $\complement_U A$ 。

技术应用：很多网页版 Venn 图工具支持“输入两个集合，自动生成交、并、补的结果”。用它验证你的手算：把 $A = \{1, 3, 5\}$ 、 $B = \{3, 6\}$ 、 $U = \{1, 2, \dots, 8\}$ 输入工具，逐一核对 $\complement_U A$ 、 $\complement_U B$ 与 $\complement_U(A \cup B)$ 。**工具是用来验证手算的，不是代替手算的。**

数学视野：交、并、补有一条漂亮的运算律（德摩根律）：

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \quad \complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$$

它说：“不在 A 也不在 B”就是“补 A 与补 B 的并”；“不在 A 与 B 的并里”就是“补 A 与补 B 之交”。图书检索系统按“分类号”筛选书目，底层就是集合运算。

想一想（真实情境）：网上购书，你勾选“价格低于 50 元”再勾选“有货”，系统返回的书是“交集”还是“并集”？再勾选“评分 4 分以上”，三个条件同时满足又是什么运算？

本节练习（答案见章末）

- 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ，求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$ 。

- 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 5, 8\}$, 求 $\complement_U A$ 。
- 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ 。求 $\complement_U(A \cap B)$ 与 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, 比较两个结果, 你能发现什么?
- 某班 45 名学生中, 参加篮球兴趣小组的有 25 人, 参加书法兴趣小组的有 18 人, 两个小组都参加的有 8 人。(1) 至少参加一个小组的有多少人? (2) 两个小组都没参加的有多少人?

1.4 充分条件与必要条件：“够用”和“必需”是两码事

出门前, 妈妈叮嘱“带上伞, 万一下雨”。你心想: 下雨是带伞的**充分**理由, 可没下雨我也能带伞。那么“够用”和“必需”到底差在哪? 这一节, 数学给这两个词各发一张“身份证”。

1.4.1 充分条件与必要条件

学习目标

- 理解命题的概念, 会判断命题的真假;
- 理解充分条件、必要条件的含义, 会判断一个条件是充分还是必要;
- 能用集合之间的包含关系理解充分、必要条件。

前置复习: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ 。 $B \subseteq A$ 吗? B 里的元素是否都是 A 的元素?

情境引入: 运动会检录处, 你被拦下——“没检录, 不能进。”墙上写着: “只有检录合格的运动员才能参加决赛。”这句话谁都会念, 可“检录合格”与“参加决赛”到底谁离不开谁? 想不清楚, 你就永远被这句话拿捏。这一小节, 就把这两个词的关系捋清楚。

命题与条件

在数学中, 用语言、符号或式子表达的, 可以**判断真假**的陈述句叫做**命题**。判断为真的叫**真命题**, 判断为假的叫**假命题**。在命题“如果 p , 那么 q ”中, p 叫**条件**, q 叫**结论**。若 $p \Rightarrow q$ (由 p 推出 q), 则:

- p 是 q 的**充分条件**——“有 p 就足够推出 q ”;
- q 是 p 的**必要条件**——“没 q 就没 p ”。

集合观点: 设 p 、 q 对应集合 A 、 B ($A = \{x \mid p(x)\}$, $B = \{x \mid q(x)\}$)。若 $A \subseteq B$, 则 $p \Rightarrow q$, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件。**集合包含是判断充分、必要的“地图”。**

How To: 判断 p 是 q 的什么条件

- 分别写出 p 、 q 对应的集合 A 、 B (或直接判断推出方向);

- 检查 $p \Rightarrow q$ 是否成立；
- 再检查 $q \Rightarrow p$ 是否成立；
- 按表定论：

$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	结论
成立	不成立	p 是 q 的 充分不必要条件
不成立	成立	p 是 q 的 必要不充分条件
成立	成立	p 是 q 的 充要条件
不成立	不成立	p 是 q 的 既不充分也不必要条件

例题 1.7

(判断充分、必要条件)

判断下列各题中 p 是 q 的什么条件：

(1) $p: x > 2$, $q: x > 1$; (2) $p: x^2 = 4$, $q: x = 2$; (3) p : 两个三角形全等, q : 两个三角形面积相等。

解：(1) $A = \{x \mid x > 2\} \subseteq B = \{x \mid x > 1\}$ ($x > 2 \Rightarrow x > 1$), 但 $x > 1 \not\Rightarrow x > 2$ (如 $x = 1.5$)。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。(2) p 的解集为 $\{-2, 2\}$, q 的解集为 $\{2\}$ 。 $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, 但 $x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$ (x 可能为 -2)。故 p 是 q 的**必要不充分条件**。(3) 全等 $\Rightarrow$ 面积相等, 但面积相等 $\not\Rightarrow$ 全等 (同底等高的两个三角形可不同)。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。

Try It 1.7: 判断 $p: x$ 是 4 的倍数, $q: x$ 是 2 的倍数中, p 是 q 的什么条件。

1.4.2 充要条件

学习目标

- 理解充要条件的含义；
- 会证明一个条件是另一个条件的充要条件；
- 会用充要条件解决简单的参数问题。

前置复习： $p: x = 3$, $q: x^2 = 9$ 。 p 是 q 的什么条件？

充要条件

如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就记作 $p \Leftrightarrow q$, 此时 p 是 q 的**充分必要条件**, 简称**充要条件**。也说 p 与 q **等价**。

How To: 证明 p 是 q 的充要条件

- **充分性：**由 p 出发, 推出 q (证 $p \Rightarrow q$)；
- **必要性：**由 q 出发, 推出 p (证 $q \Rightarrow p$)；
- 两步都成立, 才下结论“充要条件”。缺一歩都只能算“不充分”或“不必要”。

例题 1.8

(判断充要条件)

证明: $p: x > 0$ 且 $y > 0$ 是 $q: xy > 0$ 且 $x + y > 0$ 的充要条件。

解: 先证**充分性** ($p \Rightarrow q$): 若 $x > 0$ 且 $y > 0$, 则两个正数相乘仍为正、相加仍为正, $xy > 0$ 且 $x + y > 0$ 成立。再证**必要性** ($q \Rightarrow p$): 若 $xy > 0$, 则 x, y 同号; 又 $x + y > 0$, 两个同号的数相加为正, 说明它们不能同为负, 只能同为正, 即 $x > 0$ 且 $y > 0$ 。由充分性、必要性都成立, p 是 q 的充要条件。■

Try It 1.8: 判断 $p: x > 2$ 且 $y > 3$ 是 $q: x + y > 5$ 且 $xy > 6$ 的什么条件。

想一想 (真实情境): 机场安检中, “持有登机牌” 是 “通过闸机登机” 的什么条件? (提示: 没登机牌一定登不了机, 但有登机牌还要看是否到点登机。) 买东西 “付款成功” 是 “拿到货” 的什么条件?

学习提示: 见到 “求使 p 是 q 的必要不充分条件的参数范围” 这类问题, 先用集合语言翻译: p 对应 A , q 对应 B , 则 “ p 是 q 的必要不充分条件” 等价于 “ $B \subsetneq A$ ”。**把逻辑问题翻译成集合问题, 再用数轴解决, 是本章最重要的解题策略。**

练一练: 已知 $p: 1 \leq x \leq 3$, $q: a < x < a + 4$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求 a 的取值范围。

本节练习 (答案见章末)

- 判断下列各题中 p 是 q 的什么条件: (1) $p: x = 1$, $q: x^2 = 1$; (2) $p: x > 0$, $q: x > 2$; (3) p : 四边形是菱形, q : 四边形是平行四边形。
- 判断 $p: x^2 = 9$ 与 $q: |x| = 3$ 是否互为充要条件。
- 已知 $p: x > a$, $q: x > 1$ 。若 p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围。
- 设 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$ 。判断 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的什么条件, 并用集合的包含关系说明理由。

1.5 全称量词与存在量词: “所有” 还是 “有的”, 分量不一样

餐厅菜单写着 “所有菜品支持打包”, 结账时店员却说 “凉菜除外”。你刚想较真, 发现问题的根子在 “所有” 两个字——它到底承诺了哪些菜? 这一节, 我们给 “所有” 和 “有的” 称一称分量。

1.5.1 全称量词与存在量词

学习目标

- 理解全称量词、存在量词的含义;

- 会用 $\forall$ 、 $\exists$ 符号表述命题；
- 会判断全称量词命题与存在量词命题的真假。

前置复习：命题“任意实数的平方都不小于 0”是真是假？“存在一个实数的平方等于 2”又是真是假？

情境引入：下单前，页面赫然写着“全场 7 天无理由退货”；退货时，客服却念出一行小字“部分商品除外”。你翻回页面底部，才见角落里那行字。“所有”和“部分”一字之差，承诺就变了味——这一小节，先给这两个量词立规矩。

全称量词与全称量词命题：短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做**全称量词**，用符号 $\forall$ 表示。含有全称量词的命题叫做**全称量词命题**，形式为“对 M 中任意一个 x ， $p(x)$ 成立”，记作

$$\forall x \in M, p(x)$$

存在量词与存在量词命题：短语“存在一个”“至少有一个”叫做**存在量词**，用符号 $\exists$ 表示。含有存在量词的命题叫做**存在量词命题**，形式为“存在 M 中的一个 x ，使 $p(x)$ 成立”，记作

$$\exists x \in M, p(x)$$

判断真假的方法：

- 全称量词命题：要**检查每个元素**都满足 $p(x)$ ，只要找到一个反例就不成立；
- 存在量词命题：只需**找出一个**满足 $p(x)$ 的元素即可成立。

例题 1.9

(判断命题真假)

判断下列命题的真假：

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$; (2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$; (3) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$; (4) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ 。

解：(1) **真**。任何实数的平方都非负。(2) **假**。取反例 $x = 0$ ，则 $0^2 = 0$ ，不大于 0。一个反例足以推翻全称命题。(3) **真**。 $x = \sqrt{2}$ 时 $x^2 = 2$ ，找到一个实例即可。(4) **假**。实数范围内 $x^2 \geq 0$ ，故 $x^2 + 1 \geq 1$ ，不可能等于 0。

Try It 1.9：判断下列命题的真假：(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$; (2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$; (3) $\forall x \in \mathbb{Q}, 2x \in \mathbb{Q}$ 。

想一想 (真实情境)：质检员抽检一批手机，“这批手机**全部**通过检测”是哪种量词命题？要推翻它，需要检查几部手机？而“**存在**一部手机屏幕有缺陷”要证明它成立，需要检查几部？为什么质检通常用抽样而不是全检？

练一练：用符号 $\forall$ 或 $\exists$ 改写：(1) 对任意正整数 n , n 是整数；(2) 存在实数 x , 使得 $x^2 - 1 = 0$ 。

1.5.2 全称量词命题与存在量词命题的否定

学习目标

- 掌握全称量词命题与存在量词命题的否定规则；
- 会写出给定命题的否定，并判断真假；
- 会用“举反例”的思想理解命题的否定。

前置复习：“班上所有同学都交了作业”的否定是什么？“存在一名同学没交作业”呢？

命题的否定：对一个命题进行否定，可以得到一个新的命题，记作 $\neg p$ 。命题与它的否定一真一假。

否定规则：量词与结论同时变化——全称量词变存在量词，存在量词变全称量词，并把结论 $p(x)$ 否定为 $\neg p(x)$ ：

$$\neg(\forall x \in M, p(x)) \iff \exists x \in M, \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \in M, p(x)) \iff \forall x \in M, \neg p(x)$$

How To：写出命题的否定并判断真假

- 找量词：全称 ($\forall$) 还是存在 ($\exists$)？
- 换量词： $\forall$ 换 $\exists$, $\exists$ 换 $\forall$ ；
- 否结论：把 $p(x)$ 改成 $\neg p(x)$ (注意“ $>$ ”改“ $\leq$ ”、“ $=$ ”改“ $\neq$ ”等)；
- 判断真假：利用“原命题与否定一真一假”互相验证。

例题 1.10

(写出命题的否定)

写出下列命题的否定，并判断真假：

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$; (2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$; (3) $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ 。

解：(1) 否定为 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$ 。因 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ 恒成立，原命题**真**，故否定**假**。(2) 否定为 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ 。因 $x^2 + 1 \geq 1$ ，原命题**假**，故否定**真**。(3) 否定为 $\exists x > 0, x + \frac{1}{x} < 2$ 。由基本不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (等号当 $x = 1$ 时取得)，原命题**真**，故否定**假**。

Try It 1.10: 写出下列命题的否定, 并判断真假: (1) 所有的正方形都是平行四边形; (2) 存在实数 x , 使得 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 。

探究活动: 全班每人举一个“生活命题”, 如“全班男生都喜欢篮球”“存在一个食堂窗口不排队”。先在小组内互相写否定、互相挑错(重点检查“量词换了没、结论否了没”), 再上台展示。错误的否定大多出在“只换量词、忘了否结论”, 或“只否结论、忘了换量词”。

想一想: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ 的否定是 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0, x = 0$ 就是这个存在命题的“见证者”。你还能给“ $\forall n \in \mathbb{N}, n$ 是偶数”找一个见证反例吗?

本节练习 (答案见章末)

- 判断下列命题的真假: (1) $\forall x \in \mathbb{N}^*, x \geq 1$; (2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$; (3) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$ 。
- 用符号 $\forall$ 或 $\exists$ 改写下列命题: (1) 所有实数的立方都是实数; (2) 存在整数 k , 使得 $2k = 6$ 。
- 写出下列命题的否定, 并判断真假: (1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$; (2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \leq 0$ 。
- 班训“本班每位同学本周都完成了一次跑步打卡”。用全称量词命题表述, 并写出它的否定。

本章回顾

概念地图

· 集合与常用逻辑用语 · 集合 · 元素三特性: 确定性 · 互异性 · 无序性 · 表示法: 列举法 / 描述法 $x | p(x)$ · 关系: 子集 $\subseteq$ · 真子集 $\subsetneq$ · 相等 $=$ (空集 $\emptyset \subseteq$ 任何集合) · 运算: 交集 $A \cap B$ · 并集 $A \cup B$ · 补集 $\complement_U A$ (需先定全集 U) · 命题与逻辑 · 充分条件/必要条件/充要条件 (集合 $A \subseteq B \iff p \Rightarrow q$) · 量词: 全称量词 $\forall$ · 存在量词 $\exists$ · 否定: 量词互换 + 结论否定 (一真一假)

关键公式速查

内容	要点
元素与集合	$a \in A / a \notin A$; 元素三特性: 确定性、互异性、无序性
常见数集	$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (依次扩大)
子集个数	含 n 个元素的集合有 2^n 个子集, $2^n - 1$ 个真子集
交集/并集	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$; $A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
补集	$\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$; $\complement_U(\complement_U A) = A$
充分必要	$A \subseteq B \iff p \text{ 是 } q \text{ 的充分条件}; A = B \iff \text{充要条件}$
命题否定	$\neg(\forall x, p(x)) = \exists x, \neg p(x)$; $\neg(\exists x, p(x)) = \forall x, \neg p(x)$

分层练习

A 基础层

- 判断下列对象能否组成集合：(1) 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实数解；(2) 本班个子高的同学；(3) 大于 5 的全体奇数。
- 用列举法表示：(1) $\{x \mid x^2 = 16\}$ ；(2) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ ；(3) $\{x \mid x = 2k, 1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{N}^*\}$ 。
- 用描述法表示：(1) 大于 0 且小于 10 的偶数；(2) 被 3 除余 1 的全体整数。
- 写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集，并指出其中有多少个真子集。
- 已知 $A = \{x \mid -1 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围。
- 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 求 $A \cap B$ 、 $A \cup B$ 。
- 判断 $p: x > 3$ 是 $q: x > 1$ 的什么条件。

B 应用层

- 某班 50 名学生中，选数学课的有 32 人，选物理课的有 28 人，两门都选的有 15 人。求：(1) 至少选一门的同学人数；(2) 两门都不选的人数；(3) 只选数学不选物理的人数。
- 设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 。求 $\complement_U A$ 与 $\complement_U (A \cup B)$ 。
- 已知 $p: x^2 - 5x + 6 \leq 0$, $q: |x - 2| \leq 1$ 。判断 p 是 q 的什么条件。

C 拓展层

- 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax^2 - 2x + 2 = 0\}$, 且 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值集合。
- 已知命题 $p: \forall x \in [1, 2], x - a \geq 0$; 命题 $q: \exists x \in [1, 2], x^2 - a = 0$ 。若 p 、 q 中恰好一个为真，求实数 a 的取值范围。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 1.1: (1) 能, $\{-3, 3\}$; (2) 不能, “接近 0” 标准不明确; (3) 能, $\{5, 7, 9\}$ 。
- 1.2: (1) $x = 0, 1, 2, 3$ ($0 \leq x^2 < 10$), 故 $\{0, 1, 2, 3\}$; (2) $\{x \mid x = 2k + 1, 2 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{N}^*\}$ 。
- 1.3: $x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 1 , 故 $B = \{0, 1\} = A$, 即 $A = B$ 。
- 1.4: $A = \{1, -1\}$ 。 $a = 0$ 时 $B = \emptyset \subseteq A$ $\checkmark$; $a \neq 0$ 时 $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$, $\frac{1}{a} = \pm 1$, 得 $a = \pm 1$ 。故 $a = 0$ 或 $a = \pm 1$ 。

- 1.5: $A \cap B = \{2, 4\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。
- 1.6: $U = \{1, 2, \dots, 10\}$, $\complement_U A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 。
- 1.7: $p \Rightarrow q$ (4 的倍数必是 2 的倍数); $q \nRightarrow p$ (如 $x = 2$)。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。
- 1.8: $p \Rightarrow q$ 成立; $q \nRightarrow p$, 反例 $x = 2.4$, $y = 2.7$: $x + y = 5.1 > 5$, $xy = 6.48 > 6$, 但 $y < 3$ 。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。
- 1.9: (1) 真 ($x^2 + 1 \geq 1 > 0$); (2) 假 ($x^2 \geq 0$, 不存在 x 使 $x^2 < 0$); (3) 真 (有理数的 2 倍仍是有理数)。
- 1.10: (1) 否定“存在一个正方形不是平行四边形”, 原命题真, 否定假; (2) 否定“对任意实数 x , $x^2 + 2x + 2 \neq 0$ ”, 因 $(x + 1)^2 + 1 \geq 1$, 原命题假, 否定真。

各节练习答案

- 1.1 节: 1. (1) 能, $\{2, 4\}$; (2) 不能, “长得像爸爸”标准模糊, 违背确定性; (3) 能, $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$, $x = -3$ 或 1 , $\{-3, 1\}$ 。2. $(x - 3)(x + 2) = 0$, $B = \{3, -2\}$; $\{1, 4, 9, 16\} = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 4\}$ 。3. $3 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \in \mathbb{R}$ 。4. 按互异性, 重复的“李明”只算一个, 集合为 {李明, 王芳, 张伟}, 共 3 个元素。
- 1.2 节: 1. $B = \{2, 4, 6\} = A$, 即 $A = B$ 。2. $2^4 = 16$ 个子集, 真子集 $16 - 1 = 15$ 个。3. $4 \in A \subseteq B$, 需 $4 < a$, 故 $a > 4$ 。4. (1) 数学小组对应集合 A , 理科小组对应集合 B , $A \subseteq B$; (2) 是。 B 有 8 人、 A 有 5 人, B 中至少 3 人不在 A 中, 故 $A \subsetneq B$ 。5. (1) $2^n = 16$, $n = 4$, 故 A 有 4 个元素。(2) 真子集 $16 - 1 = 15$ 个; 非空真子集 $16 - 2 = 14$ 个——“非空真子集”要在 16 个里既去掉空集又去掉集合本身, 比“真子集”再少 1 个。
- 1.3 节: 1. $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。2. $\complement_U A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ 。3. $A \cap B = \{3\}$, $\complement_U(A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$; $\complement_U A = \{4, 5, 6\}$, $\complement_U B = \{1, 2, 5, 6\}$, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ 。两者相等, 即 $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$ (德摩根律)。4. (1) $25 + 18 - 8 = 35$ 人; (2) $45 - 35 = 10$ 人。
- 1.4 节: 1. (1) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, 但 $x = -1$ 时 $x^2 = 1$ 而 $x \neq 1$, 故**充分不必要**; (2) $x > 0 \nRightarrow x > 2$ ($x = 1$ 即反例), $x > 2 \Rightarrow x > 0$, 故**必要不充分**; (3) 菱形 $\Rightarrow$ 平行四边形, 平行四边形 $\nRightarrow$ 菱形 (矩形反例), 故**充分不必要**。2. $x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3$, 且 $|x| = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, 互为**充要条件**。3. p 是 q 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow \{x \mid x > 1\} \subsetneq \{x \mid x > a\}$, 需 $a < 1$ 。4. $A = [1, 2] \subsetneq B = (0, 3)$, 故 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 而反推不成立, “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的**充分不必要条件**。
- 1.5 节: 1. (1) 真; (2) 假 ($\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, 方程无实数解); (3) 假 ($x^2 = 2$ 的解 $\pm\sqrt{2}$ 不是有理数)。2. (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 \in \mathbb{R}$; (2) $\exists k \in \mathbb{Z}$, $2k = 6$ 。3. (1) 否定为 $\exists x \in \mathbb{R}$,

$x^2 = 1$; 原命题假 ($x = \pm 1$ 是反例), 否定真。(2) 否定为 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$; 因 $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ 恒成立, 原命题假, 否定真。4. $p: \forall x \in M$ (M 为全班同学), x 本周完成了一次跑步打卡; 否定: $\exists x \in M, x$ 本周未完成跑步打卡——只要有一名同学没打卡, 班训就不成立。

A1: (1) 能; (2) 不能 (“高” 标准不明确); (3) 能。

A2: (1) $\{-4, 4\}$; (2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; (3) $\{2, 4, 6, 8\}$ 。

A3: (1) $\{2, 4, 6, 8\}$ (或用描述法); (2) $\{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

A4: 子集: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 共 $2^3 = 8$ 个; 真子集 $8 - 1 = 7$ 个。

A5: $A \subseteq B$ 需 A 的右端点 4 不超过 B 的右边界, 即 $a \geq 4$ 。(数轴检验: $x = 3.9 \in A$ 要满足 $3.9 \leq a$)

A6: $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ 。

A7: $A = \{x \mid x > 3\} \subseteq B = \{x \mid x > 1\}$, 故 $p \Rightarrow q$ 而 $q \not\Rightarrow p$ ($x = 2$ 即反例) $\rightarrow$ **充分不必要**。

B8: (1) $32 + 28 - 15 = 45$ 人; (2) $50 - 45 = 5$ 人; (3) $32 - 15 = 17$ 人。(检验: 只选物理的 $28 - 15 = 13$ 人, $17 + 15 + 13 + 5 = 50$ $\checkmark$)

B9: $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\complement_U(A \cup B) = \{9, 10\}$ 。

B10: $p: (x - 2)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$; $q: 1 \leq x \leq 3$ 。 $A = [2, 3] \subsetneq B = [1, 3]$, 故 p 是 q 的**充分不必要**条件。

C11: $A = \{1, 2\}$, $A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A$ 。(1) $B = \emptyset$: $\Delta = 4 - 8a < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$; (2) $B = \{1\}$: $a = 0$, 检验 $-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ $\checkmark$; (3) $B = \{2\}$: $\Delta = 0$ 且 $\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, 检验 $x = 2$ 为二重根 $\checkmark$ 。故 $a \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。

C12: p 真 $\Leftrightarrow a \leq 1$; q 真 $\Leftrightarrow 1 \leq a \leq 4$ 。恰一个为真: p 真且 q 假 ($a < 1$), 或 p 假且 q 真 ($1 < a \leq 4$)。故 $a \in (-\infty, 1) \cup (1, 4]$ 。

第二章 怎么比较大小：一元二次函数、方程和不等式

章首情境

2.1 等式性质与不等式性质：谁大谁小，作个差就明白

身高 1.78 米的你，和 1.75 米的同桌比谁高，一眼便知；可要比较 $\sqrt{5}$ 和 2.2 谁大、两种优惠套餐哪个划算，眼睛就不够用了。这一节，给你一把对谁都管用的尺子：作差。

2.1.1 不等式与实数大小比较

学习目标

- 理解用作差法比较两个实数大小；
- 会用作差法比较代数式的大小；
- 会用不等号表示实际中的不等关系。

前置复习 (Be Prepared)

- 比较 5 与 3、-2 与 -5 的大小，它们在数轴上谁在右、谁在左？
- 计算 $(x-1)^2$ ，并说它的最小值是多少。

情境引入：购物车结算页弹出两个优惠：“满 300 减 50”还是“全场 8 折”？你算了半天——金额不同，答案还不同。比大小这件事，眼睛看不出、心算怕出错，数学给的办法却简单得惊人：**两个数相减，看结果的正负。**

实数大小比较的准则

对于任意实数 a 、 b ：

$$a > b \iff a - b > 0; \quad a = b \iff a - b = 0; \quad a < b \iff a - b < 0$$

要比较两个数（式）的大小，基本方法是**作差法**：作差 $a - b$ ，再判断其符号。

How To：用作差法比较大小

- **作差**：写出 $a - b$ ；
- **变形**：配方、因式分解、通分……化成能判断符号的形式；
- **定号**：判断 $a - b$ 与 0 的大小关系，下结论。

例题 2.1

（作差法比较大小）

比较下列各组式子的大小：

(1) $x^2 + 1$ 与 $2x$ ；(2) $x^2 + y^2$ 与 $2xy$ 。

解：(1) 作差： $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$ 。因 $(x - 1)^2 \geq 0$ ，故 $x^2 + 1 \geq 2x$ ，等号当且仅当 $x = 1$ 时成立。(2) 作差： $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$ ，故 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ，等号当且仅当 $x = y$ 时成立。

Try It 2.1：比较 $(x + 1)(x + 3)$ 与 $(x + 2)^2$ 的大小。

想一想（真实情境）：小明的体重 a kg，比标准体重多 3 kg；小红的体重 b kg，比标准体重少 2 kg。比较 a 与 b 的大小，本质上就是比较“超出量”与“不足量”—— $a - b = 5 > 0$ ，小明更重。用符号语言写清楚“谁比谁大”，是解决一切比较问题的第一步。

练一练：比较 $\sqrt{7} + 2$ 与 $\sqrt{7} + 3$ 的大小；比较 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{3}$ 的大小。

2.1.2 等式性质与不等式性质

学习目标

- 掌握不等式的基本性质；
- 能利用性质判断不等式是否成立；
- 会证明简单的不等式。

前置复习：等式 $a = b$ 两边同加一个数、同乘一个数，等式还成立吗？同乘 -1 呢？

不等式的性质

性质	内容
(1) 对称性	$a > b \iff b < a$
(2) 传递性	$a > b$ 且 $b > c \Rightarrow a > c$
(3) 加法性质	$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
(4) 乘法性质	$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc; a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
(5) 同向可加	$a > b$ 且 $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
(6) 同向可乘	$a > b > 0$ 且 $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$
(7) 乘方性质	$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$

How To: 判断不等式命题的真假

- 找出命题用到了哪条性质;
- 检查条件是否满足该性质的适用前提 (尤其正负号);
- 前提不满足时, **找反例**推翻它。

例题 2.2

(判断不等式真假)

判断下列命题的真假:

(1) $a > b \Rightarrow a - 3 > b - 3$; (2) $a > b \Rightarrow -2a < -2b$; (3) $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$; (4) $a > b > 0$ 且 $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ 。

解: (1) **真**。由性质 (3), 两边同加 -3 , 不等式方向不变。(2) **真**。由性质 (4), 两边同乘 $-2 < 0$, 不等式**反向**。(3) **假**。 $c = 0$ 时 $ac^2 = bc^2 = 0$, 不满足严格大于。反例: $a = 2, b = 1, c = 0$ 。(4) **真**。由性质 (6) (同向正数可乘)。例如 $3 > 2, 5 > 4$, 则 $15 > 8$ 。

Try It 2.2: 已知 $a > b$, 判断下列命题的真假: (1) $2a > 2b$; (2) $-3a < -3b$; (3) $a^2 > b^2$ 。

Q&A

- **问:** 性质 (4) 对“除法”也成立吗?

答: 成立。除法可看作乘以倒数: $c > 0$ 时 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 不变号, $c < 0$ 时反向。

- **问:** $a > b$ 一定能推出 $a^2 > b^2$ 吗?

答: 不能。 $a = 1, b = -2$ 时 $1 > -2$ 但 $1 < 4$ 。性质 (7) 要求 $a > b > 0$ 。

练一练: 判断正误并说明理由: $a > b, c > d \Rightarrow a - c > b - d$ 。

本节练习 (答案见章末)

- 比较 $x^2 + 3$ 与 $2x + 2$ 的大小, 并指出等号何时成立。
- 已知 $a > b$, 判断下列命题的真假, 并说明理由: (1) $a + 2 > b + 2$; (2) 若 $a > b > 0$, 则 $a^3 > b^3$; (3) 若 $a > b$, 则 $|a| > |b|$ 。
- 某网店推出两种优惠: 甲“满 200 减 40”, 乙“全场 8.5 折”。某商品标价 x 元 ($x \geq 200$)。 (1) 写出两种优惠后的实付金额 (用含 x 的式子表示); (2) 用作差法判断哪种更划算, 并求“乙更划算”时 x 的取值范围。
- 一件商品的定价为 q 元 ($q > 0$)。方案一“先提价 20% 再打 8 折”, 方案二“直接打 9 折”。哪个方案的最终售价更高? 用作差法说明。

2.2 基本不等式：两个数的“最优解”

同样 60 米围栏，你随手围个 28×2 的窄条，同学却围出 15×15 的正方形，面积差了快四倍。都是 60 米，凭什么是方形最大？这一节，找出藏在算式里的那个“最优解”。

2.2.1 基本不等式

学习目标

- 探索并证明基本不等式；
- 理解基本不等式的代数与几何意义；
- 掌握“一正二定三相等”的取等条件。

前置复习：由 $(x - y)^2 \geq 0$ ，你能推出 $x^2 + y^2$ 与 $2xy$ 的大小关系吗？若 $a = x^2$ ， $b = y^2$ ，改写一下试试。

情境引入：用 40 m 栅栏围矩形菜地，长 19 m、宽 1 m 时面积只有 19，长 10 m、宽 10 m 时面积却有 100。为什么“越方”面积越大？周长一定时，面积到底能大到哪去？这正是基本不等式要回答的问题。

基本不等式

如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，那么

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a = b$ 时，等号成立。

证明： $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ ，故 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ；等号当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ，即 $a = b$ 时成立。■

几何意义：以 $a+b$ 为直径作半圆 ($a, b > 0$)，半圆的半径是 $\frac{a+b}{2}$ ；在直径上取一段 a 、一段 b ，过切点作垂线交圆弧于一点，该垂线的长度恰为 $\sqrt{ab}$ 。圆内的弦长不会超过半径——不等关系一眼可见。

How To：用基本不等式求最值（口诀“一正、二定、三相等”）

- **一正：**两个式子必须都是正数（或非负）；
- **二定：**和为定值时，积有最大值；积为定值时，和有最小值；
- **三相等：**检查等号能否取到——即能否找到使两式相等的 x 值。

例题 2.3

（直接应用）

已知 $x > 0$, 求 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值。

解：一正： $x > 0$, $\frac{4}{x} > 0$ ✓；二定： $x \cdot \frac{4}{x} = 4$ 为定值 ✓。由基本不等式： $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ 。三相等：当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ ($x > 0$) 时可取等号。故当 $x = 2$ 时, $x + \frac{4}{x}$ 取得最小值 4。

Try It 2.3: 已知 $x > 0$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的最小值, 并指出取等条件。

例题 2.4

(配凑变形)

已知 $x > 1$, 求 $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值。

解：直接套用不满足“积为定值”，先配凑：

$$x + \frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1$$

因 $x > 1$, $(x-1) > 0$, $\frac{1}{x-1} > 0$, 且 $(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = 1$ 为定值, 故

$$x + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 = 3$$

等号当 $x-1 = \frac{1}{x-1}$, 即 $x = 2$ 时成立。故最小值为 3。

Try It 2.4: 已知 $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 8$, 求 xy 的最大值。

探究活动：用 60 cm 长的绳子围矩形（如桌面上的软线），记录长、宽与面积：长 29、宽 1 → 面积 29；长 20、宽 10 → 200；长 15、宽 15 → 225。**先猜：**什么时候面积最大？**再验证：**用 $S = x(30-x) = 225 - (x-15)^2$ 算一算——正方形确实最大。把过程与 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 对照。

数学视野：两千多年前的《周髀算经》就记载了“折矩”图（后称赵爽弦图）——四个全等的直角三角形围成一个正方形，图中直观呈现出 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 。公元 3 世纪，赵爽为《周髀算经》作注，用这张图“出入相补”地证明了勾股定理，也最早触及了这类不等式的几何直观。今天我们把 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 变形为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ——一个看似简单的式子，背后是两千年的人类智慧。

想一想：基本不等式要求 $a, b > 0$ 。如果允许负数， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 还成立吗？试试 $a = 1$, $b = -4$ 。

2.2.2 基本不等式的应用

学习目标

- 会用基本不等式解决实际最值问题；
- 会构造“定值”（拆项、配凑、整体代换）；

- 体会等号成立条件在实际问题中的意义。

前置复习：周长一定的矩形中，长和宽满足什么关系时面积最大？用 $x + y$ 与 xy 说一说。

情境引入：回到章首那道围栏题——60 m 围栏，设宽为 x ，长就是 $30 - x$ ，面积 $S = x(30 - x)$ 。“和”已经被 60 m 的围栏定死了，面积还能怎么挣扎出最大值？这一小节，就是教你把这类“和定求积最大”的题，一把按进基本不等式里。

例题 2.5

(实际应用：围栏问题)

用 36 m 长的篱笆围一个矩形菜园，菜园一边靠墙（墙足够长）。怎样围，菜园面积最大？最大面积是多少？

解：设垂直于墙的边长为 x m，则平行于墙的边长为 $(36 - 2x)$ m，面积

$$S = x(36 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(36 - 2x)$$

因 $2x > 0$ ， $36 - 2x > 0$ ，且 $2x + (36 - 2x) = 36$ 为定值，由基本不等式：

$$2x(36 - 2x) \leq \left(\frac{36}{2}\right)^2 = 324, \quad S \leq \frac{1}{2} \times 324 = 162$$

等号当 $2x = 36 - 2x$ ，即 $x = 9$ 时成立。此时平行边长为 $36 - 18 = 18$ m。答：垂直墙边 9 m、平行墙边 18 m 时面积最大，最大面积为 **162** m^2 。

Try It 2.5：用 100 m 长的篱笆围一个矩形场地（不靠墙），长、宽各为多少时面积最大？最大面积是多少？

学习提示：基本不等式应用题三步走：(1) 设变量，写出目标式子（注明范围）；(2) 检查“一正二定三相等”；(3) 作答时写清“取等条件”。很多同学丢了最后一步——只求出最值，不说清在什么情况下取到，等于没做完。

项目学习（小组任务）：为班级设计一款“快递收纳盒”——用一张 $1 m^2$ 的硬纸板做一个无盖长方体盒（底面为正方形），如何设计才能让容积最大？先用硬纸板做三个不同尺寸的模型并测量容积，再建立函数模型用基本不等式（或二次函数）验证，最后提交一份含示意图、数据和结论的设计报告。

想一想（真实情境）：两种商品打包销售：A 商品单价 a 元、B 商品单价 b 元，甲方案“买 A 送 B”，乙方案“各打 5 折”。比较两种方案的总花费——这个实际问题里，你发现了什么不等关系？

本节练习（答案见章末）

- 已知 $x > 0$ ，求 $2x + \frac{8}{x}$ 的最小值，并指出取等条件。
- 已知 $x > 2$ ，求 $x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值。

- 已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 10$, 求 xy 的最大值及此时 x, y 的值。
- 一个直角三角形的两条直角边之和为 20, 求这个直角三角形面积的最大值。
- 已知 $x > 0$, 求 $y = x^2 + x$ 的最小值。有同学直接套基本不等式: $x^2 + x \geq 2\sqrt{x^3}$, 就下结论“最小值为 $2\sqrt{x^3}$ ”——这样做对吗? 为什么? (提示: $2\sqrt{x^3}$ 里还含 x , 它不是常数)
- 已知 $x \in [3, 5]$, 求 $y = x + \frac{4}{x}$ 的最小值。有同学用基本不等式得 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, 认为最小值是 4——对吗? (提示: 等号成立需 $x = 2$, 2 在不在区间 $[3, 5]$ 里?)

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式：三个“二次”，一根抛物线

汽车刹车，车速 v 越快，刹停距离 $0.05v^2$ 就越大。想 50 m 内刹停，车速得满足什么条件? 这看起来是一道不等式题，可解着解着，你会撞见二次函数和一元二次方程——三个“二次”，原来是一家。这一节，把它们接到同一根抛物线上。

2.3.1 三个二次

学习目标

- 理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系；
- 会由二次函数的图象直接写出对应不等式的解集；
- 会用判别式判断三者间的对应情形。

前置复习：解方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ；画出 $y = x^2 - 3x + 2$ 的草图，说出图象在 x 轴上方的 x 范围。

情境引入：汽车以 v km/h 行驶时的刹车距离约为 $s = 0.05v^2$ m。你在驾校里踩下刹车，心里默念：要在 50 m 内刹停，车速得满足 $0.05v^2 \leq 50$ 。等号一写出来你才发现——这不是方程，是不等式，而且是带平方的那种。

三个二次的关系

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交点的横坐标，就是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，也是对应一元二次不等式解集的端点。三者是一棵树的根、干、叶。

以 $a > 0$ (开口向上) 为例：

判别式	图象与 x 轴交点	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$\Delta > 0$ (两根 $x_1 < x_2$)	两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$ (一根 x_0)	一个切点	$x \neq x_0$	无解
$\Delta < 0$	无交点	$\mathbb{R}$	无解

How To: 由二次函数图象看不等式解集

- 看开口方向 (a 的符号), 必要时两边同乘 -1 化为 $a > 0$;
- 求对应方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根 (因式分解或求根公式);
- 用“大于取两边、小于取中间”写出解集。

例题 2.6

(三个二次)

已知二次函数 $y = 2x^2 - 7x + 3$ 。

(1) 求该函数图象与 x 轴的交点; (2) 求不等式 $2x^2 - 7x + 3 > 0$ 与 $2x^2 - 7x + 3 < 0$ 的解集。

解: (1) 令 $y = 0$: $2x^2 - 7x + 3 = 0$, 因式分解得 $(2x - 1)(x - 3) = 0$, $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 3$ 。交点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(3, 0)$ 。(2) 开口向上 ($a = 2 > 0$), 由“大于取两边”:

$$2x^2 - 7x + 3 > 0 \iff x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 3$$

由“小于取中间”:

$$2x^2 - 7x + 3 < 0 \iff \frac{1}{2} < x < 3$$

Try It 2.6: 求不等式 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 的解集。

技术应用: 用绘图软件输入 $y = 2x^2 - 7x + 3$, 观察图象在 x 轴上方的部分对应的 x 范围, 再与例题 2.6 的结论对照。“图象在上方”就是“函数值大于 0”——图象是解不等式最直观的验证工具。

想一想 (真实情境): 估算一下: 你所在的教室, 用 $0.05v^2$ 的模型, 车速要低于多少才能保证 20 m 内刹停? 把“刹停距离限制”翻译成不等式并求近似解。

2.3.2 一元二次不等式的解法

学习目标

- 掌握一元二次不等式的一般解法步骤;
- 会解含参数的一元二次不等式;
- 会用恒成立条件求参数的取值范围。

前置复习: 用因式分解解方程 $x^2 - (a + 1)x + a = 0$ 。

一元二次不等式的一般解法

- **化标准式**: 移项使右边为 0, 化为 $ax^2+bx+c > 0$ (或 $\geq 0, < 0, \leq 0$), 必要时两边同乘-1使 $a > 0$;
- **求根**: 解对应方程 $ax^2+bx+c=0$, 用判别式判断根的情形;
- **写解集**: 用“大于取两边、小于取中间”(口诀对 $a > 0$ 有效)。

例题 2.7

(含参数)

解关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a > 0$ 。

解: 因式分解: $x^2 - (a+1)x + a = (x-1)(x-a)$ 。两根为 1 与 a , 需比较其大小, 分三种情况:

(1) $a < 1$: 开口向上, “大于取两边” $\rightarrow$ 解集为 $x < a$ 或 $x > 1$; (2) $a = 1$: 原式为 $(x-1)^2 > 0 \rightarrow$ 解集为 $x \neq 1$; (3) $a > 1$: 两根大小反过来 $\rightarrow$ 解集为 $x < 1$ 或 $x > a$ 。

Try It 2.7: 解不等式 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ 。(提示: 先两边同乘 -1 化为标准式, 注意变号)

例题 2.8

(恒成立问题)

若不等式 $x^2 - 2x + a > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

解: 配方: $x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$ 。 $(x-1)^2 \geq 0$ 恒成立, 故原式的最小值为 $a-1$ (在 $x=1$ 处取到)。要使原式恒大于 0, 只需最小值 $a-1 > 0$, 即 $a > 1$ 。(也可用判别式: 开口向上且恒大于 0 $\iff \Delta = 4 - 4a < 0 \iff a > 1$ 。)

Try It 2.8: 若不等式 $x^2 + ax + 1 > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围。

例题 2.9

(实际应用)

某企业生产一种产品, 日销售量 y (件) 与售价 x (元) 满足 $y = 400 - x$ ($60 \leq x \leq 380$), 每件成本 60 元。要使日利润不低于 24000 元, 售价应定在什么范围?

解: 每件利润为 $(x-60)$ 元, 日利润

$$L = (x-60)(400-x) = -x^2 + 460x - 24000$$

令 $L \geq 24000$: $-x^2 + 460x - 24000 \geq 24000$, 移项并两边同乘 -1:

$$x^2 - 460x + 48000 \leq 0$$

因式分解: $x^2 - 460x + 48000 = (x-160)(x-300)$ (验证: $160+300=460$, $160 \times 300 = 48000$ ✓)。由“小于取中间”:

$$160 \leq x \leq 300$$

结合定价范围 $60 \leq x \leq 380$ ，售价应定在 **160 元到 300 元之间**。

Try It 2.9: 例题 2.9 中，若要求日利润不低于 30000 元，售价应定在什么范围？（提示：先算 $x^2 - 460x + 54000$ 的判别式）

技术应用：用绘图软件分别画出 $y = x^2 - 460x + 48000$ 与直线 $y = 0$ ，观察抛物线与 x 轴的交点，验证例题 2.9 的解集 $[160, 300]$ 。再把 Try It 2.9 的判别式为负的情况画出来——**图象与 x 轴无交点，就意味着不等式恒正、没有实数解。**

学习提示：恒成立问题三问：(1) 开口向哪？(2) 判别式是正是负？(3) 是“恒大于 0”还是“恒不小于 0”？严格区分“ > 0 恒成立($\Delta < 0$)”与“ ≥ 0 恒成立($\Delta \leq 0$)”，这一字之差，答案的端点开闭就不同。

练一练：若关于 x 的不等式 $mx^2 + mx - 1 < 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，求 m 的取值范围。（提示：分 $m = 0$ 与 $m \neq 0$ 讨论）

本节练习（答案见章末）

- 解不等式 $3x^2 - 10x + 3 < 0$ 。
- 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ ：(1) 求它的图象与 x 轴的交点；(2) 写出 $y > 0$ 与 $y < 0$ 的解集。
- 解关于 x 的不等式 $x^2 - 3ax + 2a^2 > 0$ 。
- 某商品日销售量 y （件）与售价 x （元）满足 $y = 200 - x$ ($80 \leq x \leq 180$)，每件成本 50 元。要使日利润不低于 5600 元，售价应定在什么范围？
- 若不等式 $x^2 + ax + 4 > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。
- 已知方程 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 。(1) 写出判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的完整计算过程，并判断该方程有几个实数根；(2) 若某同学把 Δ 算成 $b^2 - 4ac = -4^2 - 4 \times 3 \times 1 = -28$ ，错在哪？（提示： $b = -4$ 代入时 b^2 是谁的平方？）

本章回顾

概念地图

· 一元二次函数、方程和不等式 · 不等式性质 · 作差法： $a > b \iff a - b > 0$ （配方/因式分解判号）· 性质 (1) ~ (7)：传递、同向可加、乘除看符号、同向正数可乘 · 基本不等式 $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$ ($a, b > 0$ ，等号 $\iff a = b$) · 一正二定三相等 · 最值：和定积最大 · 积定和最小 · 三个二次 · 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ：开口 · 对称轴 · 与 x 轴交点 · 一元二次方程：判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ · 求根公式 · 一元二次不等式：大于取两边 · 小于取中间

关键公式速查

内容	要点
作差法	$a > b \iff a - b > 0$; 变形后配方、因式分解判号
不等式性质	传递性; 同向可加; 乘除正数不变号、负数变号; 同向正数可乘
基本不等式	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b > 0$), 等号当且仅当 $a = b$
最值口诀	一正、二定、三相等; 和定积最大, 积定和最小
三个二次	图象与 x 轴交点横坐标 = 方程根 = 不等式解集端点
一元二次不等式	化标准式 ($a > 0$) $\rightarrow$ 求根 $\rightarrow$ 大于取两边、小于取中间
恒成立	$ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立 $\iff a > 0$ 且 $\Delta < 0$

分层练习

A 基础层

- 比较 $x^2 + 4$ 与 $4x$ 的大小。
- 判断下列命题的真假: (1) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$; (2) $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (3) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ 。
- 已知 $x > 0$, 求 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值。
- 解不等式 $2x^2 - 3x - 2 < 0$ 。
- 解不等式 $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ 。
- 已知 $x > 0, y > 0, xy = 36$, 求 $x + y$ 的最小值。
- 二次函数 $y = 2x^2 - 3x - 2$: (1) 求它与 x 轴的交点; (2) 写出 $y > 0$ 的解集。

B 应用层

- 某商店以每件 40 元的进价购入商品, 定价 60 元时日售 100 件; 市场调查表明, 售价每提高 1 元, 日销量减少 2 件。要使日利润最大, 售价应定为多少? 最大日利润是多少?
- 用 120 m 长的篱笆围一块矩形菜地, 其中一边靠墙 (墙长 100 m)。怎样围, 菜地面积最大? 最大面积是多少?
- 已知不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 求 a, b 的值。

C 拓展层

- 若不等式 $x^2 - ax + a > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。
- 已知 $x > 0, y > 0, \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求 $x + 2y$ 的最小值。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- **2.1:** $(x+1)(x+3) - (x+2)^2 = (x^2 + 4x + 3) - (x^2 + 4x + 4) = -1 < 0$, 故 $(x+1)(x+3) < (x+2)^2$ 。
- **2.2:** (1) 真 ($c = 2 > 0$, 不变号); (2) 真 ($c = -3 < 0$, 变号); (3) 假 (反例 $a = 1, b = -2$: $1 > -2$ 但 $1 < 4$)。
- **2.3:** $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 等号当 $x = 1$ 时成立, 最小值为 2。
- **2.4:** $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$, 等号当 $x = y = 4$ 时成立, 最大值为 16。
- **2.5:** 设长为 x 、宽为 y , $2(x+y) = 100$, $x+y = 50$ 。 $xy \leq 25^2 = 625$, 等号当 $x = y = 25$ 。故围成 25×25 的正方形时面积最大, 最大面积 $625 m^2$ 。
- **2.6:** $(x-2)(x-3) < 0 \Rightarrow 2 < x < 3$ 。
- **2.7:** 两边乘 -1 : $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, 因式分解 $(x-3)(x+1) \leq 0$, 由“小于取中间”得 $-1 \leq x \leq 3$ 。
- **2.8:** 开口向上且恒大于 0 $\iff \Delta = a^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < a < 2$ 。
- **2.9:** $(x-60)(400-x) \geq 30000 \Rightarrow x^2 - 460x + 54000 \leq 0$ 。判别式 $\Delta = 460^2 - 4 \times 54000 = 211600 - 216000 = -4400 < 0$, 且开口向上, 故不等式恒大于 0, 无实数解。即日利润不可能达到 30000 元 (最大日利润为 $x = 230$ 时的 $(170)^2 = 28900$ 元)。

各节练习答案

- **2.1 节:** 1. $x^2 + 3 - (2x + 2) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, 故 $x^2 + 3 \geq 2x + 2$, 等号当 $x = 1$ 时成立。2. (1) 真 (加法性质, 两边同加 2 方向不变); (2) 真 (乘方性质, $a > b > 0 \Rightarrow a^3 > b^3$); (3) 假 (反例 $a = 1, b = -2$: $1 > -2$ 但 $|1| < |-2|$)。3. (1) 甲: $x - 40$ 元, 乙: $0.85x$ 元; (2) $(x-40) - 0.85x = 0.15x - 40$, 乙更划算 $\Leftrightarrow 0.15x - 40 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{800}{3} \approx 266.7$ 。即 $x > \frac{800}{3}$ 时乙划算, $200 \leq x < \frac{800}{3}$ 时甲划算, $x = \frac{800}{3}$ 时两种相同。4. 方案一: $1.2q \times 0.8 = 0.96q$ 元; 方案二: $0.9q$ 元; $0.96q - 0.9q = 0.06q > 0$, 方案一的最终售价更高, 直接打 9 折更便宜。
- **2.2 节:** 1. $2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{8}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$, 等号当 $2x = \frac{8}{x}$, 即 $x = 2$ 时成立, 最小值为 8。2. $x + \frac{4}{x-2} = (x-2) + \frac{4}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{4}{x-2}} + 2 = 6$, 等号当 $x-2 = \frac{4}{x-2}$, 即 $(x-2)^2 = 4$, $x = 4$ 时成立, 最小值为 6。3. $x \cdot 2y \leq \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = 25$, 故 $xy \leq \frac{25}{2} = 12.5$, 等号当 $x = 2y = 5$, 即 $x = 5, y = 2.5$ 时成立, 最大值为 12.5。4. 设直角边为 a, b , 则 $a + b = 20$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 10$, $ab \leq 100$, 面积 $S = \frac{ab}{2} \leq 50$, 等号当 $a = b = 10$ 时成立, 最大面积为 50。5. 不对。 $x^2 \cdot x = x^3$ 不是定值, 套基本不等式后 $2\sqrt{x^3}$ 仍含 x , 不是常数, 谈不上“最小值”——这正是“二定”的前提: 必须是“积为定值”或“和为

定值”。事实上 $y = x^2 + x$ 在 $x > 0$ 上无最小值（当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $y \rightarrow 0$ ，但取不到 0）。6. 不对。等号成立需 $x = \frac{4}{x}$ ，即 $x = 2$ ，但 $2 \notin [3, 5]$ ——取等条件落空，“三相等”不满足。
 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $x > 2$ 时单调递增，故最小值在左端点 $x = 3$ 处取得： $y_{\min} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$ 。

- **2.3 节**：1. $3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(x - 3) < 0$ ，两根 $\frac{1}{3}$ 、3，开口向上，“小于取中间”得 $\frac{1}{3} < x < 3$ 。2. $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ ：(1) 交点 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ ；(2) $y > 0 \Leftrightarrow x < -1$ 或 $x > 3$ ； $y < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ 。3. $x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a)$ ，两根为 a 、 $2a$ 。(1) $a > 0$ ： $x < a$ 或 $x > 2a$ ；(2) $a = 0$ ： $x^2 > 0$ ， $x \neq 0$ ；(3) $a < 0$ ： $x < 2a$ 或 $x > a$ 。4. 日利润 $L = (x - 50)(200 - x) = -x^2 + 250x - 10000$ 。令 $L \geq 5600$ ： $x^2 - 250x + 15600 \leq 0$ ，因式分解 $(x - 120)(x - 130) \leq 0$ ，得 $120 \leq x \leq 130$ ，结合 $80 \leq x \leq 180$ ，售价应定在 120 元到 130 元之间。5. 开口向上且恒大于 0 $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4$ 。6. (1) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4 > 0$ ，方程有两个不相等的实数根（ $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{3}$ ）。(2) 错在把 b^2 写成 -4^2 —— $b^2 = (-4)^2 = 16$ ，负号与平方一起算，而不是“先取负再平方”。

A1： $x^2 + 4 - 4x = (x - 2)^2 \geq 0$ ，故 $x^2 + 4 \geq 4x$ ，等号当 $x = 2$ 时成立。

A2：(1) 假（ $a = 1$ ， $b = -2$ ： $1 > -2$ 但 $1 < 4$ ）；(2) 真（ $a > b > 0$ 时 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} < 0$ ）；(3) 真（性质(4)）。

A3： $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9} = 6$ ，等号当 $x = 3$ 时成立，最小值为 6。

A4： $(2x + 1)(x - 2) < 0$ ，两根 $-\frac{1}{2}$ 、2，开口向上，“小于取中间”得 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 。

A5： $(x - 2)^2 \geq 0$ 对一切实数成立，解集为 $\mathbb{R}$ 。

A6： $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{36} = 12$ ，等号当 $x = y = 6$ 时成立，最小值为 12。

A7：(1) $(2x + 1)(x - 2) = 0$ ，交点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 、 $(2, 0)$ ；(2) 开口向上，“大于取两边”： $y > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 2$ 。

B8：设提价 x 元，日利润 $y = (20 + x)(100 - 2x) = -2x^2 + 60x + 2000$ 。对称轴 $x = \frac{60}{4} = 15$ ， $y_{\max} = 35 \times 70 = 2450$ 。答：定价 75 元，最大日利润 2450 元。

B9：设垂直墙边为 x m，平行墙边为 $(120 - 2x)$ m， $S = x(120 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(120 - 2x) \leq \frac{1}{2} \times 60^2 = 1800$ 。等号当 $2x = 120 - 2x$ ，即 $x = 30$ ，平行边 $60 \leq 100 \checkmark$ 。最大面积 1800 m^2 。

B10：解集为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ，故两根为 $-\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，且 $a < 0$ （解集取两交点之间，开口向下）。设 $ax^2 + bx + 2 = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ ，展开得 $a(x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{6})$ 。常数项： $-\frac{a}{6} = 2 \Rightarrow a = -12$ ； x 项系数： $b = \frac{a}{6} = -2$ 。检验： $-12x^2 - 2x + 2 > 0$ ，除以 -2 得 $6x^2 + x - 1 < 0$ ，即 $(3x - 1)(2x + 1) < 0$ ，两根 $-\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \checkmark$ 。

C11：开口向上且恒大于 0 $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$ 。

C12: $x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 + \frac{x}{y} + \frac{4y}{x} \geq 4 + 2\sqrt{4} = 8$ 。等号当 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$, 即 $x = 2y$, 联立 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 得 $x = 4, y = 2$ 。最小值为 8。

第三章 怎么刻画对应关系：函数的概念与性质

章首情境

3.1 函数的概念及其表示：从“计价器”到“对应规则”

3.1.1 函数的概念：一个输入，一个输出

学习目标

- 能判断一个对应关系是否为函数（会找“一对多”的违规者）；
- 能求具体函数的定义域与函数值；
- 理解函数三要素，能判断两个函数是否相等；
- 会用区间表示数集。

前置复习 (Be Prepared)

- 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，集合 $B = \{2, 4, 6\}$ ，对应关系 “ $b = 2a$ ” ——你能把 A 中每个元素按规则对应到 B 中吗？
- 一次函数 $y = 2x + 1$ 的图象是什么形状？画 $x = 0, 1, 2$ 三个点试试。
- 解不等式： $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ ，用集合表示解集。

情境引入：出租车计价（呼应章首）

计价规则：3 公里以内（含 3 公里）收费 10 元；超过 3 公里后，每公里加收 2.4 元。

里程 x (km)	1	2	3	5	8
车费 y (元)	10	10	10	14.8	22

想一想：给定一个里程数，你能算出唯一的车费吗？反过来，给定一个车费（比如 10 元），能确定唯一的里程吗？

函数的概念

设 A 、 B 是非空的**实数集**，如果对于集合 A 中的**任意一个数** x ，按照某种**确定的对应关系** f ，在集合 B 中都有**唯一确定的数** y 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记作

$$y = f(x), \quad x \in A$$

其中， x 叫做**自变量**， x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**；与 x 的值对应的 y 值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的**值域**。

How To：判断一个对应关系是否为函数

- 找出**输入**（自变量）有哪些；
- 找出每个输入对应的**输出**（函数值）；
- 若某个输入对应两个或更多输出 $\rightarrow$ **不是函数**；每个输入都只对应一个输出 $\rightarrow$ 是函数。

例题 3.1

（判断函数）

下列对应关系，哪些是函数？哪些不是？说明理由。

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 对应关系 $f: x \mapsto 2x$; (2) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, 对应关系 $g: x \mapsto y$, 满足 $y^2 = x$; (3) A 为某班全体学生, B 为全体学号, 对应关系 $h: \text{学生} \mapsto \text{学号}$ 。

解：(1) 是函数—— $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 6$, 每个输入唯一对应一个输出。(2) 不是函数——如 $x = 4$ 时 $y = \pm 2$, 一个输入对应两个输出，违反“唯一确定”。(3) 是函数——每名学生有且只有一个学号。

Try It 3.1: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ 。对应关系“ $y = x - 1$ ”是从 A 到 B 的函数吗？若把对应关系改为“ $y = x + 1$ ”呢？（提示：看每个输入对应的输出是否落在 B 内、是否唯一）

例题 3.2

（求定义域）

求下列函数的定义域：

$$(1) f(x) = \frac{1}{x-2}; \quad (2) f(x) = \sqrt{x-1}; \quad (3) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

解：(1) 分母不能为 0: $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$, 定义域 $\{x \mid x \neq 2\}$, 即 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 。(2) 偶次根号内非负: $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$, 定义域 $[1, +\infty)$ 。(3) 两个约束**同时**满足: $x - 1 \geq 0$ 且 $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \geq 1$ 且 $x \neq 2$, 定义域 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

Try It 3.2: 求 $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+3}$ 的定义域（用区间表示）。

例题 3.3

（求函数值）

已知 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求 $f(1)$ 、 $f(a)$ 、 $f(a+1)$ 。

解：把“模板”中的 x 换成给定的值即可： $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$ ； $f(a) = a^2 - 3a + 1$ ； $f(a+1) = (a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = a^2 + 2a + 1 - 3a - 3 + 1 = a^2 - a - 1$ 。

Try It 3.3: 已知 $f(x) = 2x^2 + 1$ ，求 $f(-1)$ 与 $f(x+1)$ 。

Q&A

- **问：** $f(x)$ 和 $f(a)$ 有什么区别？

答： $f(x)$ 是函数的整体表达式（一个“模板”）； $f(a)$ 是把 a 代入模板得到的**数值或式子**。好比菜谱 f 和按菜谱做出的菜 $f(a)$ 。

- **问：**定义域、值域和集合 B 是什么关系？

答：定义域就是 A ；值域是 $\{f(x) \mid x \in A\}$ ，它是 B 的**子集**—— B 中可以有多余元素。

探究活动：给 10 个不同形状的容器（圆柱、圆锥、漏斗……）匀速注水。**先预测：**水位上升速度随时间如何变化？**再观察：**实际录像中的水位—时间图象，与你的预测对照。每个容器的水位—时间关系都是一个函数——形状不同，函数也长得不一样。

想一想：函数定义里强调“唯一确定”。如果允许“一对多”，会发生什么？（提示：回到出租车计价——同一个里程两个价，谁付？）

3.1.2 函数的表示法：三种记账方式

学习目标

- 掌握函数的三种表示法：解析法、列表法、图象法，会选用合适的表示法；
- 理解分段函数，能求分段函数的函数值；
- 会从函数图象读出信息。

前置复习： $f(x) = 2x + 1$ 的定义域、值域各是什么？画出它的图象。

函数的三种表示法

表示法	含义	优点	缺点
解析法	用数学表达式 $y = f(x)$	精确、便于运算	不够直观
列表法	用表格列出部分对应值	直接可见	只能表示有限个点
图象法	用图象表示对应关系	直观形象	不够精确

How To: 由表格到解析式

- 观察表格中 x 与 y 的变化规律;
- 猜测函数类型 (一次、二次……);
- 代入几组值解出待定系数;
- 用另一组值检验。

例题 3.4

(表示法的转换)

某学习小组测量弹簧的长度 y (cm) 随所挂砝码质量 x (g) 的变化:

x (g)	0	50	100	150
y (cm)	10	14	18	22

(1) y 是 x 的函数吗? 若是, 请用解析式表示; (2) 不挂砝码时弹簧多长? 挂 200 g 砝码时呢? (假设未超过弹性限度)

解: (1) 每个 x 唯一对应一个 y , 是函数。观察表格: x 每增加 50, y 增加 4——线性关系。设 $y = kx + b$, 代入 $(0, 10)$ 得 $b = 10$; 代入 $(50, 14)$ 得 $50k + 10 = 14$, $k = 0.08$ 。故 $y = 0.08x + 10$ 。检验: $x = 100$ 时 $y = 18$ ✓。(2) 不挂砝码 ($x = 0$): $y = 10$ cm; 挂 200 g: $y = 0.08 \times 200 + 10 = 26$ cm。

Try It 3.4: 同一弹簧数据改为: $x = 0, 100, 200$ 时 $y = 10, 16, 22$, 求解析式, 并预测 $x = 250$ 时的 y 。

分段函数

情境: 回到出租车计价。车费 y 与里程 x 的关系要分两段描述:

$$y = \begin{cases} 10, & 0 < x \leq 3 \\ 10 + 2.4(x - 3), & x > 3 \end{cases}$$

像这样, 在定义域的不同部分, 函数用不同的解析式表示, 这样的函数叫**分段函数**。

例题 3.5

(分段函数求值)

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } f(-2)、f(3)、f(f(-1))。$$

解：关键：先看自变量落在哪一段，再用那段的解析式。 $f(-2)$ ： $-2 \leq 0 \rightarrow$ 用第一段， $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ ； $f(3)$ ： $3 > 0 \rightarrow$ 用第二段， $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$ ； $f(f(-1))$ ：先内后外。 $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ ；再算 $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$ 。故 $f(f(-1)) = 3$ 。

Try It 3.5：上题中，若 $f(a) = 7$ ，求 a 的值。（提示：分 $a \leq 0$ 与 $a > 0$ 两类讨论）

How To：读函数图象

- 看横轴、纵轴各代表什么（单位别忘）；
- 找最高点、最低点（最大/最小值）；
- 看图象与坐标轴的交点（特殊函数值）；
- 看增减趋势（哪段上升、哪段下降）。

例题 3.6

（读图象）

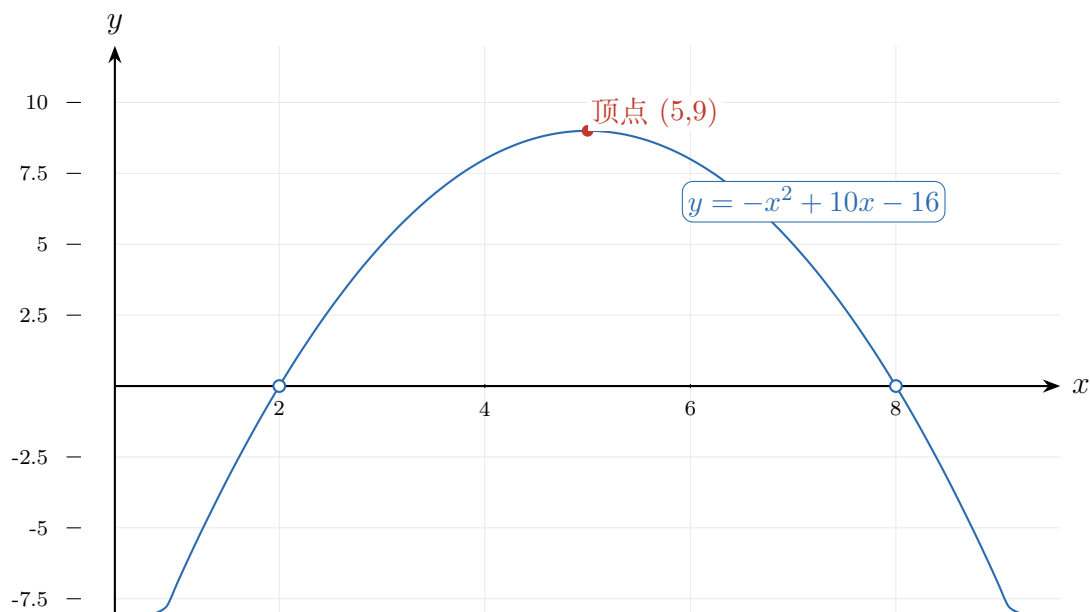


图 3.1: 配图

下图为某城市一天 24 小时的气温 T ($^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (h) 变化的图象（示意）。

(1) 这一天最高气温是多少？出现在几时？(2) $t = 12$ 时气温约为多少？(3) 哪些时段气温在上升？

解：（读图象三步：找最高最低 $\rightarrow$ 定点读数 $\rightarrow$ 看趋势。以下答案对应配图中的示意数据）(1) 最高气温约 32°C ，出现在 14 时；(2) $t = 12$ 时气温约为 29°C ；(3) 气温上升时段约为 6 时 $\sim$ 14 时（日出后升温至午后）。

Try It 3.6：结合图象回答：一天中气温最低出现在几时？ $t \in [0, 24]$ 时气温的取值范围大致是多少？

想一想 (真实情境): 某地居民电费按阶梯计价——月用电 200 度以内每度 0.5 元, 超过 200 度的部分每度 0.8 元。写出电费 y 与用电量 x 的分段函数, 并计算: 小明家月用电 180 度、350 度各交多少电费? 真实世界的计价规则几乎都是分段函数——银行利率、快递费、停车场收费, 皆如此。

想一想: 列表法能表示一个“无限定义域”的函数吗? 为什么? (提示: 表格只能写有限行)

本节练习 (答案见章末)

- 判断: $y^2 = x$ ($x \geq 0$) 是 x 的函数吗? 为什么?
- 求 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ 的定义域 (用区间表示)。
- 已知 $f(x) = 2x^2 - 1$, 求 $f(a + 1)$ 。
- 已知 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(-1)$ 、 $f(1)$ 、 $f(f(0))$ 。

3.2 函数的基本性质: 函数的“性格”

3.2.1 单调性与最大(小)值: 一路向上, 还是一路向下

学习目标

- 理解增函数、减函数的定义, 能用定义判断函数的单调性;
- 会用定义法证明简单函数的单调性;
- 理解最大值、最小值的定义, 会求简单函数的最值。

前置复习: $y = x^2$ 的图象开口向哪? 在 $x < 0$ 与 $x > 0$ 时, y 随 x 增大分别怎么变?

情境引入: 观察 $y = x^2$ 的图象——从左往右看, 图象先下降后上升。“下降”“上升”就是函数的**单调性**。

单调性定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$ 。

- 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增** (I 称为 f 的**单调递增区间**);
- 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**。

How To: 定义法证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 (或递减)

- **取值**: 任取 $x_1, x_2 \in I$, 且设 $x_1 < x_2$;
- **作差**: 计算 $f(x_1) - f(x_2)$;
- **变形**: 因式分解、通分、配方……化成能判断正负的形式;
- **定号**: 判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号, 下结论。

例题 3.7

(定义法证明单调性)

用定义证明: 函数 $f(x) = 2x + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。

解: (按 How To 四步) (1) 取值: 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$; (2) 作差: $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 1) - (2x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2)$; (3) 变形: 已是最简形式; (4) 定号: 因 $x_1 < x_2$, $x_1 - x_2 < 0$, 故 $2(x_1 - x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$ 。由定义, $f(x) = 2x + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。■

例题 3.8

(定义法证明单调性)

用定义证明: 函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

解: (1) 取值: 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$; (2) 作差: $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1) = x_1^2 - x_2^2$; (3) 变形: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$; (4) 定号: $x_1 - x_2 < 0$, 且 $x_1 + x_2 > 0$ (因均在 $(0, +\infty)$), 故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$ 。由定义, $f(x) = x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。■

Try It 3.8: 用定义证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。

最值的定义

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在实数 M , 满足:

(1) $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$; (2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = M$ 。

那么称 M 是函数 $y = f(x)$ 的**最大值**。类似地可定义**最小值**。

例题 3.9

(求最值)

求函数 $f(x) = -x^2 + 4x$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值与最小值。

解: $f(x) = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$ (配方), 对称轴 $x = 2 \in [1, 4]$ 。开口向下 $\rightarrow$ 最大值在顶点: $f_{\max} = f(2) = 4$; 最小值在离对称轴最远的端点: $f(1) = 3$, $f(4) = -16 + 16 = 0 \rightarrow f_{\min} = f(4) = 0$ 。故最大值为 4, 最小值为 0。

Try It 3.9: 求 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。

学习提示：单调性这个抽象概念，用**三步台阶**搭起来最稳——**第一步：**看气温曲线、股票走势图，先“感觉”到升降；**第二步：**用 $y = x^2$ 的图象，把“升降”画出来；**第三步：**再用 $\forall x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$ 的语言精确刻画。**跳过中间一步直接背符号定义，是很多同学“定义看得懂、做题不会用”的病根。**

练一练：判断对错——“若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 和 $[3, 5]$ 上都单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0, 2] \cup [3, 5]$ 上也单调递增。”（提示：画个分段试试）

想一想（对抗 M5）：小华测得函数 f 在 $x = 0, 1, 2, 3$ 四点的值依次为 $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$ ，便断言“ f 在 $[0, 3]$ 上单调递增”。这个判断一定对吗？能不能造出一个函数，使它在这四点的取值如上，却在 $[0, 3]$ 上不是单调递增？（提示：单调递增要求“任取 $x_1 < x_2$ ，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ”——只核对有限个点，算不算验证了“任意”？）

3.2.2 奇偶性：照镜子的玄机

学习目标

- 理解奇函数、偶函数的定义；
- 会判断函数的奇偶性（定义法、图象法）；
- 知道奇偶函数的图象特征（对称性）。

前置复习： $y = x^2$ 与 $y = x^3$ 的图象分别关于什么对称？

奇偶性定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D **关于原点对称** ($\forall x \in D$, 有 $-x \in D$)。

- 如果 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么 $f(x)$ 是**偶函数**（图象关于 y 轴对称）；
- 如果 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么 $f(x)$ 是**奇函数**（图象关于原点对称）。

How To：判断函数的奇偶性

- 先看定义域是否关于原点对称（不对称 $\rightarrow$ 直接判“非奇非偶”）；
- 计算 $f(-x)$ ；
- 比较 $f(-x)$ 与 $f(x)$ ：相等 $\rightarrow$ 偶；互为相反数 $\rightarrow$ 奇；都不满足 $\rightarrow$ 非奇非偶。

例题 3.10

（判断奇偶性）

判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x^4 + x^2$; (2) $f(x) = x^3$; (3) $f(x) = x^2 + x$; (4) $f(x) = \sqrt{x}$ 。

解：(按 How To 三步：定义域对称 $\rightarrow$ 算 $f(-x) \rightarrow$ 比较) (1) 定义域 $\mathbb{R}$ 对称； $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \rightarrow$ **偶函数**；(2) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \rightarrow$ **奇函数**；(3) $f(-x) = x^2 - x$ ，与 $f(x) = x^2 + x$ 既不等、也不互为相反数 $\rightarrow$ **非奇非偶**；(4) 定义域 $[0, +\infty)$ 不关于原点对称 $\rightarrow$ 直接判**非奇非偶**（根本不必算 $f(-x)$ ）。

Try It 3.10：判断 $f(x) = x^3 + x$ 与 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 的奇偶性。

Q&A

- 问： $f(x) = 0$ （常值函数）是什么函数？

答：它既是奇函数又是偶函数—— $f(-x) = 0 = f(x)$ 且 $0 = -0$ 。这是唯一“双重身份”的函数。

- 问：奇函数在 $x = 0$ 处一定有定义吗？若有， $f(0)$ 等于多少？

答：不一定有定义（如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ）。若有定义，则 $f(0) = -f(0)$ ，所以 $f(0) = 0$ 。

技术应用：用 GeoGebra 输入 $y = x^3 - x$ ，选中图象，执行“关于 y 轴反射”（Reflect about y -axis）——观察反射后的图象与原图象是否重合（重合即偶函数）；再试“关于原点反射”。

手算判断之后，用软件 5 秒确认，是检查你判断对错的最快方式。

想一想：为什么奇偶性要求“定义域关于原点对称”？（提示：如果定义域是 $[0, 2]$ ， $f(-1)$ 根本不存在， $f(-x) = f(x)$ 无从谈起）

本节练习（答案见章末）

- 用定义证明： $f(x) = -2x + 3$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减。
- 求 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。
- 判断 $f(x) = x^3 - x$ 的奇偶性。
- 已知 $f(x)$ 是偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，比较 $f(-3)$ 、 $f(1)$ 、 $f(-2)$ 的大小。

3.3 幂函数：几何世界里的熟面孔

学习目标

- 理解幂函数的概念，能区分幂函数与指数函数；
- 掌握五种常见幂函数的图象与性质；
- 会用幂函数的单调性比较大小。

前置复习： $y = x$ 、 $y = x^2$ 、 $y = x^{-1}$ 的图象还记得吗？各经过哪些象限？

幂函数的概念

一般地，函数 $y = x^\alpha$ (α 为常数) 叫做**幂函数**，其中 x 是自变量， α 是常数。

五种常见幂函数

我们重点研究 $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 五种：

函数	定义域	值域	单调性	奇偶性	图象特征
$y = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	增	奇	直线，过原点
$y = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$ 减， $[0, +\infty)$ 增	偶	开口向上抛物线
$y = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	增	奇	过原点，关于原点对称
$y = x^{1/2}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	增	非奇非偶	只在一象限
$y = x^{-1}$	$\{x \mid x \neq 0\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 均减	奇	双曲线

共性规律：幂函数图象都经过点 $(1, 1)$ ； $\alpha > 0$ 时图象过原点且在 $(0, +\infty)$ 单调递增； $\alpha < 0$ 时图象不过原点，在 $(0, +\infty)$ 单调递减。

例题 3.11

(比较大小)

利用幂函数的单调性，比较下列各组数的大小：

(1) $0.2^{0.3}$ 与 $0.3^{0.3}$ ；(2) 2.1^{-1} 与 2.3^{-1} 。

解：(关键：把两个数看成**同一个幂函数**的两个函数值) (1) $y = x^{0.3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $0.2 < 0.3 \rightarrow 0.2^{0.3} < 0.3^{0.3}$ ；(2) $y = x^{-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， $2.1 < 2.3 \rightarrow 2.1^{-1} > 2.3^{-1}$ 。

Try It 3.11：比较 $1.1^{1/2}$ 与 $1.2^{1/2}$ 的大小。

数学视野：幂函数是**建模的万能素材**——正方形面积 $S = a^2$ ($\alpha = 2$)、正方体体积 $V = a^3$ ($\alpha = 3$)、正三角形面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。当你遇到“变化率是自身一部分”的现象(如 $y = x^{1/2}$ 的缓增)，想想幂函数是不是它的模型。

想一想： $y = x^0$ 是幂函数吗？它的图象是什么？(提示： $x \neq 0$ 时 $x^0 = 1$)

本节练习 (答案见章末)

- 下列函数中，哪些是幂函数？ $y = 2x$ 、 $y = x^2$ 、 $y = 2^x$ 、 $y = x^0$ 。
- 利用幂函数单调性比较： $0.3^{-0.2}$ 与 $0.4^{-0.2}$ 。
- 幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象经过点 $(2, 8)$ ，求 α 的值及 $f(3)$ 。

3.4 函数的应用 (一)：拿函数干活

学习目标

- 掌握函数建模的基本流程：审题 → 建模 → 求解 → 检验；
- 能用一次、二次、分段函数解决实际问题；
- 体会函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型。

前置复习：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 的最大值在何处取得？公式是什么？

How To：函数建模四步法

- **审题：**明确已知量与未知量，找出题目中的数量关系；
- **建模：**设自变量 x ，把未知量用 x 表示，写出函数解析式（**注明定义域！**）；
- **求解：**利用函数性质求目标值（最值、特定值……）；
- **检验：**答案是否符合实际意义（定义域、单位、合理范围）。

例题 3.12

（二次函数最值应用）

某商场销售一种进价为 40 元的商品，定价为 60 元时，每天可售出 100 件。市场调查发现：每降价 1 元，日销量增加 10 件。要使日利润最大，应降价多少元？最大日利润是多少？

解：（建模四步）(1) 审题：设降价 x 元 ($0 \leq x \leq 20$ ——降太多会低于进价)。(2) 建模：售价 $60 - x$ ，单件利润 $(60 - x) - 40 = 20 - x$ ；日销量 $100 + 10x$ 。日利润

$$y = (20 - x)(100 + 10x) = -10x^2 + 100x + 2000$$

(3) 求解：对称轴 $x = -\frac{100}{2 \times (-10)} = 5 \in [0, 20]$ ，开口向下 → 最大值在 $x = 5$ ： $y_{\max} = (15)(150) = 2250$ 。(4) 检验：降价 5 元后定价 55 元，高于进价 40 元，日销 150 件，利润 2250 元，合理。答：应降价 **5 元**，最大日利润 **2250 元**。

Try It 3.12：若把“降价 1 元增 10 件”改为“降价 1 元增 5 件”，最优降价是多少？

例题 3.13

（分段函数应用，呼应章首）

出租车计价：3 km 以内 10 元，超出部分每公里 2.4 元（不足 1 km 按 1 km 计）。小王乘了 x km ($x > 3$)，车费 y 元。

(1) 写出 y 与 x 的函数关系；(2) 小王付了 26.8 元，他乘了多少公里？

解：(1) 超出部分为 $x - 3$ km，车费

$$y = 10 + 2.4(x - 3) = 2.4x + 2.8, \quad x > 3$$

(2) 令 $y = 26.8$: $2.4x + 2.8 = 26.8 \rightarrow x = 10$ 。小王乘了 **10 km**。(检验: 10 km 车费 $10 + 2.4 \times 7 = 26.8$ 元 ✓)

Try It 3.13: 某停车场收费: 2 小时内免费, 2 4 小时每小时 5 元, 超过 4 小时每小时 8 元 (不足 1 小时按 1 小时计)。写停车费 y 与停车时长 t (小时) 的分段函数。

项目学习 (小组任务): 为学校设计一份“晚自习教室用电方案”——调查学校 3 间教室一晚上 (18:00–22:00) 的灯光功率与空调功率, 建立“教室总功率随时间变化”的函数模型, 估算一晚耗电量与电费, 并给出“人走灯灭”的节能建议。成果: 一份含函数图象与分段函数表达式的报告。

练一练: 某工厂生产一种产品, 年产量 x (万件) 与年利润 y (万元) 近似满足 $y = -x^2 + 10x - 16$ ($0 \leq x \leq 8$)。何时利润为零? 最大利润是多少?

本节练习 (答案见章末)

- 用一段长为 20 m 的篱笆围一个矩形菜园, 长、宽各为多少时菜园面积最大? 最大面积是多少?
- 手机流量套餐: 月费 30 元含 20 GB, 超出部分每 GB 5 元。写出月费 y 与流量 x (GB, $x \geq 0$) 的分段函数; 若某月用了 35 GB, 月费多少?
- 某产品年利润 y (万元) 与产量 x (万件) 满足 $y = -x^2 + 10x - 16$ ($0 \leq x \leq 8$)。产量为多少时利润最大? 最大利润是多少?

本章回顾

概念地图

· 函数 $y = f(x)$ · 三要素: 定义域 / 对应关系 / 值域 · 表示法: 解析法 · 列表法 · 图象法 (分段函数: 分区间用不同解析式) · 性质 · 单调性: $\forall x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$ (定义法证明 4 步: 取值 $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 定号) · 奇偶性: $f(-x)=f(x)$ 偶 (y 轴对称) · $f(-x)=-f(x)$ 奇 (原点对称) · 幂函数: $y = x^\alpha$ ($\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 五种; 过 (1,1); $\alpha>0$ 增 $\alpha<0$ 减) · 应用: 建模四步 (审题 $\rightarrow$ 建模 $\rightarrow$ 求解 $\rightarrow$ 检验)

关键公式速查

内容	要点
定义域	分母 $\neq 0$; 偶次根号内 ≥ 0 ; 实际问题的现实约束
单调性证明	取值 (任取 $x_1 < x_2$) $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 定号
二次函数最值	$y = ax^2 + bx + c$, 顶点 $x = -\frac{b}{2a}$
分段函数求值	先看自变量落在哪一段, 再用那段的解析式
奇偶性判断	定义域对称 $\rightarrow$ 算 $f(-x) \rightarrow$ 比 $f(x)$

分层练习

A 基础层

- 判断下列对应是否为函数： $A = \{x \mid x \geq 0\}$, $y^2 = x$ ($y \in \mathbb{R}$)。
- 求 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的定义域 (用区间表示)。
- 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x$, 求 $f(-1)$ 、 $f(2a)$ 。
- 判断 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性 (用定义证明)。
- 判断 $f(x) = x^3 + x$ 的奇偶性。
- 比较 $0.5^{0.4}$ 与 $0.6^{0.4}$ 的大小。

B 应用层

- 手机流量套餐：月费 30 元含 20 GB，超出部分每 GB 5 元。写出月费 y 与流量 x (GB, $x \geq 0$) 的分段函数；若某月用了 35 GB，月费多少？
- 某商店进价 50 元/件的商品，定价 90 元时日售 80 件；每提价 1 元日销减 1 件。问定价多少时日利润最大？(提示： $y = (90 + x - 50)(80 - x)$)
- 跳水运动员从离水面 10 m 的跳台跳下，其重心离水面高度 h (m) 随时间 t (s) 变化： $h = -5t^2 + 4t + 10$ ($0 \leq t \leq 2$)。求：入水时刻、最高点高度。

C 拓展层

- 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 单调递减。比较 $f(-3)$ 、 $f(2)$ 、 $f(-4)$ 的大小。
- 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $g(a)$ ，求 $g(a)$ 的解析式。(提示：对称轴 $x = a$ 分三种情况讨论)

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- **3.1:** $y = x - 1$ 是函数 ($1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 3$, 唯一且都在 B 内); $y = x + 1$ 不是从 A 到 B 的函数 ($4 \mapsto 5 \notin B$, 输出越出集合 B)。
- **3.2:** $2x - 1 \geq 0$ 且 $x + 3 \neq 0 \rightarrow$ 定义域 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。
- **3.3:** $f(-1) = 2 \times 1 + 1 = 3$; $f(x+1) = 2(x+1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$ 。
- **3.4:** $y = 0.06x + 10$ (代入 $(0, 10)$ 、 $(100, 16)$ 解出 $k = 0.06$); $x = 250$ 时 $y = 25$ cm。
- **3.5:** $a \leq 0$: $a^2 + 1 = 7 \rightarrow a = -\sqrt{6}$ (取负根); $a > 0$: $2a - 1 = 7 \rightarrow a = 4$ 。故 $a = -\sqrt{6}$ 或 4。

- **3.6:** 最低气温出现在约 5 时; 气温取值范围约 $20 \sim 32^\circ\text{C}$ (依配图数据)。
- **3.8:** $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$; $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 0 \rightarrow$ 差 $> 0 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减。
- **3.9:** $f(x) = (x-1)^2 + 2$, 对称轴 $x = 1 \in [0, 3] \rightarrow$ 最小值 $f(1) = 2$; 端点 $f(0) = 3$, $f(3) = 6 \rightarrow$ 最大值 6。
- **3.10:** $x^3 + x$: $f(-x) = -x^3 - x = -f(x) \rightarrow$ 奇函数; $\frac{1}{x^2}$: $f(-x) = \frac{1}{x^2} = f(x)$, 定义域 $x \neq 0$ 对称 $\rightarrow$ 偶函数。
- **3.11:** $y = x^{1/2}$ 在 $(0, +\infty)$ 递增 $\rightarrow 1.1^{1/2} < 1.2^{1/2}$ 。
- **3.12:** $y = (20-x)(100+5x) = 2000 - 5x^2$, $x \geq 0$ 时递减 $\rightarrow$ 最优不降价 ($x = 0$), 日利润 2000 元——**降价并非总是划算**, 这正是建模检验的价值。
- **3.13:** $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2 \\ 5(t-2), & 2 < t \leq 4 \text{ (连续近似, 实际按小时取整)} \\ 10 + 8(t-4), & t > 4 \end{cases}$

各节练习答案

- **3.1 节:** 1. 不是—— $x > 0$ 时一个输入对应 $y = \pm\sqrt{x}$ 两个输出。2. $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ 。3. $f(a+1) = 2(a+1)^2 - 1 = 2a^2 + 4a + 1$ 。4. $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(f(0)) = f(2) = 4$ 。
- **3.2 节:** 1. $f(x_1) - f(x_2) = 2(x_2 - x_1) > 0 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$ 单调递减。2. $f(x) = (x-1)^2 - 1$, 对称轴 $x = 1 \in [0, 3]$: 最小值 $f(1) = -1$; 端点 $f(0) = 0$, $f(3) = 3 \rightarrow$ 最大值 3。3. $f(-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \rightarrow$ 奇函数。4. 偶函数 $\rightarrow f(-2) = f(2)$, $f(-3) = f(3)$; $[0, +\infty)$ 递增 $\rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \rightarrow f(1) < f(-2) < f(-3)$ 。**想一想 (对抗 M5):** 不对。例如定义 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 0.5 \text{ 或 } 1 \leq x \leq 3 \\ 8, & x = 0.5 \end{cases}$ 这类在 $x = 0.5$ 处“翘起”的函数, 四点取值仍是 1, 2, 3, 4, 但在 $x = 0.5$ 附近 $f(0.5) = 8 > f(1) = 2$, 破坏了单调递增 (也可取 $f(0.5) = 10$ 的简单分段: $x \in [0, 3] \setminus \{0.5\}$ 时 $f(x) = x+1$, $f(0.5) = 10$)。“逐点增大”只是有限个样本, 单调递增必须对区间内**任意**两个点成立。
- **3.3 节:** 1. $y = x^2$ 、 $y = x^0$ 是幂函数 ($y = 2x$ 系数不是 1, $y = 2^x$ 是指数函数)。2. $y = x^{-0.2}$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, $0.3 < 0.4 \rightarrow 0.3^{-0.2} > 0.4^{-0.2}$ 。3. $2^\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 3$, $f(3) = 3^3 = 27$ 。
- **3.4 节:** 1. 设为 x , 宽 $10-x$, 面积 $S = x(10-x) = -(x-5)^2 + 25 \rightarrow$ 长宽各 5 m (正方形), 最大面积 25 m^2 。2. $y = \begin{cases} 30, & 0 \leq x \leq 20 \\ 30 + 5(x-20), & x > 20 \end{cases}$; 35 GB $\rightarrow 30 + 5 \times 15 = 105$ 元。3. 顶点 $x = 5$ ($0 \leq x \leq 8$) $\rightarrow$ 最大利润 $y = -25 + 50 - 16 = 9$ 万元。

A1: 不是函数—— $x > 0$ 时一个输入对应 $y = \pm\sqrt{x}$ 两个输出。

A2: $x + 2 \geq 0$ 且 $x \neq 1 \rightarrow [-2, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

A3: $f(-1) = 5$; $f(2a) = 12a^2 - 4a$ 。

A4: 任取 $x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$; 因 $x_1, x_2 \geq 1$ 且 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 - 2 > 0$, 而 $x_1 - x_2 < 0$, 故差 $< 0 \rightarrow$ 单调递增。

A5: $f(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, 定义域 $\mathbb{R}$ 对称 $\rightarrow$ 奇函数。

A6: $y = x^{0.4}$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, $0.5 < 0.6 \rightarrow 0.5^{0.4} < 0.6^{0.4}$ 。

B7: $y = \begin{cases} 30, & 0 \leq x \leq 20 \\ 30 + 5(x - 20), & x > 20 \end{cases}$; $35 \text{ GB} \rightarrow 30 + 5 \times 15 = 105$ 元。

B8: 设提价 x 元, $y = (40 + x)(80 - x) = -x^2 + 40x + 3200$, 顶点 $x = 20 \rightarrow$ 定价 110 元, 最大日利润 $y = 60 \times 60 = 3600$ 元。

B9: 入水 $h = 0 \rightarrow -5t^2 + 4t + 10 = 0 \rightarrow t = \frac{2 + \sqrt{54}}{5} \approx 1.87 \text{ s}$ (取正根); 最高点 $t = \frac{-4}{2 \times (-5)} = 0.4 \text{ s}$, $h_{\max} = -5 \times 0.16 + 4 \times 0.4 + 10 = 10.8 \text{ m}$ 。

C10: 偶函数 $\rightarrow f(-3) = f(3)$, $f(-4) = f(4)$; 在 $[0, +\infty)$ 递减 $\rightarrow f(2) > f(3) > f(4) \rightarrow f(2) > f(-3) > f(-4)$ 。

C11: 对称轴 $x = a$ 。(1) $a < 0$: 最小值在 $x = 0$ 取, $g(a) = 3$; (2) $0 \leq a \leq 2$: $g(a) = 3 - a^2$; (3) $a > 2$: 最小值在 $x = 2$ 取, $g(a) = 7 - 4a$ 。

第四章 暴涨与压缩的世界：指数函数与对数函数

章首情境

4.1 指数：谁自乘 n 次等于 a ？

你折过纸、翻过倍，可要是有人问你：“几的 3 次方等于 8？”你脱口而出“2”。再问：“几的 5 次方等于 32？”你想想，“2”。那“几的 4 次方等于 16？”答案变成两个：2 和 -2 ——麻烦来了。这一节，我们要把“谁自乘 n 次等于 a ”这件事讲得明明白白，还会发现：开方和“几分之几次方”，其实是同一件事。

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

学习目标

- 理解 n 次方根的概念，会求正数的 n 次方根；
- 掌握分数指数幂的定义，能进行根式与分数指数幂的互化。

前置复习 (Be Prepared)

- 口算： 2^3 、 3^4 、 $(-2)^2$ 、 $(-2)^3$ 分别等于多少？
- 平方根与立方根： $x^2 = 9$ 的解是？ $x^3 = 8$ 的解是？
- 幂的运算法则： $a^m \cdot a^n = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $(a^m)^n = \underline{\hspace{1cm}}$ (m 、 n 为正整数)。

情境引入：细胞分裂的逆向问题

细菌每 30 分钟分裂一次， n 次分裂后数量为 2^n 。若分裂 3 次，数量 $2^3 = 8$ ；那么反过来——数量达到 8 时，经历了几次分裂？这相当于解方程 $2^n = 8$ ，即求“2 的几次方等于 8”。这个“几次方”，数学上叫**对数**，正是本章 4.3 的主角。而在此之前，我们要先把“幂”本身研究透彻。

n 次方根的定义

一般地，如果 $x^n = a$ ($n > 1, n \in \mathbb{N}^*$)，那么 x 叫做 a 的 n 次方根。

关于 n 次方根，奇偶性决定了根的存在形式——你只需记住：奇数次“一锤定音”，偶数次“成双成对”：

条件	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 为奇数	正数 a 的 n 次方根是 正数 ，如 $\sqrt[3]{8} = 2$	0	负数 a 的 n 次方根是 负数 ，如 $\sqrt[3]{-8} = -2$
n 为偶数	两个 互为相反数的根，记 $\sqrt[n]{a}$ 与 $-\sqrt[n]{a}$ ，如 $\sqrt[4]{16} = 2$		不存在实数根 （偶次方必非负）

我们把式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**，这里 n 叫做**根指数**， a 叫做**被开方数**。

根式的性质

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = a$ ；当 n 为偶数时， $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 。

分数指数幂

正数的**正分数指数幂**为

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

正数的**负分数指数幂**与正分数指数幂互为倒数：

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

How To：根式与分数指数幂互化

- 看分母：分数指数的**分母**就是根式的**根指数**；
- 看分子：分数指数的**分子**是被开方数的**幂指数**；
- 处理负号：负指数先取倒数。

例如 $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ 。通常**先开方再乘方**更简单： $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ 。

例题 4.1

(求 n 次方根与分数指数幂的值)

求下列各式的值：

$$(1) \sqrt[3]{-27}; \quad (2) \sqrt[4]{16}; \quad (3) 27^{\frac{2}{3}}; \quad (4) 16^{-\frac{3}{4}}; \quad (5) \sqrt{(-5)^2}.$$

解：(1) 因为 $(-3)^3 = -27$ ，所以 $\sqrt[3]{-27} = -3$ ——奇次根下负数出负数。(2) 因为 $2^4 = 16$ ，所以 $\sqrt[4]{16} = 2$ （偶次根取正的）。(3) 先开方再乘方： $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$ 。(4) 先取倒数： $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ 。(5) 偶次根号吞次方要加绝对值： $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ 。

Try It 4.1: 求值： $\sqrt[5]{-32}$ 、 $\sqrt[4]{81}$ 、 $8^{\frac{2}{3}}$ 、 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 。

例题 4.2

(用运算性质化简)

化简下列各式（字母均取使式子有意义的正数）：

(1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$; (2) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; (3) $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^6$; (4) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$ 。

解：核心是把根式写成分数指数幂，再用指数运算法则——同底数幂相乘指数相加、相除指数相减、乘方指数相乘。

(1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = a^2$ 。(2) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ 。(3) $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^6 = a^{\frac{1}{3} \times 6} \cdot b^{\frac{1}{2} \times 6} = a^2b^3$ 。(4) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}}$ 。

Try It 4.2: 化简： $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$ 、 $\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ 、 $(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}})^3$ 。

Q&A

• 问：为什么规定 $a > 0$ 才讨论分数指数幂？

答：若底数为负，分数指数可能无意义或产生歧义。比如 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 与 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ ：前者 $= -2$ ，后者 $= \sqrt[6]{64} = 2$ ，同一个数却得不同结果。为避免混乱，约定底数为正。

• 问： $\sqrt[n]{a^n} = a$ 什么时候不加绝对值？

答： n 为奇数时不加（如 $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ ）； n 为偶数时加（如 $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ）。

数学视野：为什么要有分数指数幂？古代数学家把平方根、立方根当成完全不同的“怪物”，运算起来要背一大堆口诀。直到 17 世纪，数学家发现“ $\sqrt[3]{a^2}$ ”可以写成“ $a^{2/3}$ ”——根号不过是“几分之几次方”而已。用一个统一记号征服一群特例，这正是代数语言的力量。

想一想： $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 在 $a > 0$ 的约定下“没有意义”，但 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 明明存在。你认为这矛盾吗？（提示：约定是为了规则统一，遇到奇次根下的负数可以直接用根式处理）

4.1.2 实数指数幂及其运算性质

学习目标

- 了解无理数指数幂的意义（用有理数逼近）；
- 掌握实数指数幂的运算性质。

前置复习： $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ 是什么数？你能说出它的小数部分规律吗？

无理数指数幂

$2^{\sqrt{2}}$ 是什么意思？ $\sqrt{2}$ 不是分数，不能用“开根号”直接解释。办法是**逼近**：

取 $\sqrt{2}$ 的不足近似值：1.4、1.41、1.414、1.4142、 $\dots\dots$ 计算 $2^{1.4}$ 、 $2^{1.41}$ 、 $2^{1.414}$ 、 $2^{1.4142}$ 、 $\dots\dots$

r	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421
2^r	2.639	2.657	2.664	2.665	2.665

这些数越来越接近同一个确定的值（约 2.665）。数学上就规定： $2^{\sqrt{2}}$ **就是这些 2^r 的极限值**。一般地，无理数指数幂用有理数指数幂逼近来定义，且原有的运算性质**对实数指数幂全部适用**。

实数指数幂的运算性质

设 $a > 0$ ， $b > 0$ ， r 、 s 为任意实数，则：

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

Try It 4.3：计算： $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$ ； $(\pi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}}$ ； $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ ； $(2^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ 。（提示：把带根号的指数当“字母”，只做指数部分的加减乘除）

学习提示：指数运算四步自查——(1) 底数是否化为正；(2) 根式是否已写成分数指数幂；(3) 指数加减、乘除、乘方是否用对法则（**乘法变指数相加、除法变指数相减**）；(4) 最后结果里 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) 别忘。

练一练：计算 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ 。（提示： $(\frac{9}{4})^{1/2} = \frac{3}{2}$ ， $8^{2/3} = 4$ ）

本节练习（答案见章末）

- 把下列根式与分数指数幂互化： $a^{\frac{3}{4}}$ 、 $\sqrt[5]{b^2}$ ；并求值： $32^{\frac{3}{5}}$ 、 $100^{-\frac{3}{2}}$ 。
- 化简（字母均取正数）： $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}$ ； $\frac{\sqrt[4]{b^5}}{\sqrt[3]{b^2}}$ ； $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^4$ 。
- 开普勒第三定律：行星公转周期 T （年）与轨道半径 r （天文单位 AU）满足 $T = r^{\frac{3}{2}}$ 。已知某颗行星的轨道半径 $r = 4$ AU，求它的公转周期。
- 化简： $\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}\right)^2$ 。
- 逐一计算并说明下列四个式子为何不同： $(-2)^2$ 、 -2^2 、 $(-2)^{-2}$ 、 2^{-2} 。（提示：负号在括号里、括号外，以及指数为负时，位置不同结果就不同）

4.2 指数函数：翻倍翻倍再翻倍

你往游戏里充 1 个币，好友跟你说：“这赛季的福利是每天翻倍！”第 1 天 2 个，第 2 天 4 个，第 10 天 1024 个。可你有没有想过：只要把“每天翻倍”换成“每天乘 1.5”，曲线就从“冲上天”变成“慢慢爬”——差在哪？全差在底数。指数函数的脾气都藏在底数 a 里： $a > 1$ 一路雪崩式暴涨， $0 < a < 1$ 一路压缩式衰减。这一节，我们就来认识这个“翻倍翻倍再翻倍”的家伙。

4.2.1 指数函数的概念

学习目标

- 理解指数函数的概念，能辨析指数函数与幂函数；
- 能由指数函数的形式求出参数并求函数值。

前置复习：幂函数 $y = x^2$ 中“变”的是底数还是指数？反过来说， $y = 2^x$ 呢？

情境引入：细胞分裂再探究

细菌每 30 分钟分裂一次。若初始有 1 个细菌， x 小时后细菌数为 y 。 x 小时含 $2x$ 个“半小时”，所以

$$y = 2^{2x} = 4^x$$

这个函数中，底数 4 是常数，指数 x 是自变量——这就是**指数函数**。相比之下，幂函数 $y = x^2$ 是底数变、指数不变。二者形似而质异，认错人就会掉进“到底谁在变”的坑： x 扛在肩膀上的是指数函数， x 坐在底下当底座的是幂函数。

指数函数的定义

一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做**指数函数**，其中 x 是自变量，定义域为 $\mathbb{R}$ 。

例题 4.3

(指数函数的概念与解析式)

(1) 下列函数中，哪些是指数函数？

(1) $y = 3^x$ ； (2) $y = x^3$ ； (3) $y = (-2)^x$ ； (4) $y = \pi^x$ ； (5) $y = 2^x + 1$ 。

(2) 已知指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象经过点 $(2, 9)$ ，求 $f(3)$ 、 $f(-1)$ 。

解：(1) 逐一对照定义 $y = a^x$ ($a > 0$ ， $a \neq 1$)：(1) 是——底数 $3 > 0$ ，指数是自变量；(2) 不是——这是**幂函数**（底数是自变量，指数是常数 3）；(3) 不是——底数 $-2 < 0$ ，不满足底数为正；(4) 是—— π 是正数且不等于 1；(5) 不是——解析式多了一项 $+1$ ，不是 a^x 的标准形式。(2) 把点代入： $a^2 = 9$ 。因为 $a > 0$ ，所以 $a = 3$ 。故 $f(x) = 3^x$ 。 $f(3) = 3^3 = 27$ ； $f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 。

Try It 4.4: (1) 下列哪些是指数函数? $y = 4^{-x}$ 、 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 、 $y = 0.5^x$ 、 $y = 2^{3x}$ 。(提示: $4^{-x} = (\frac{1}{4})^x$, $2^{3x} = 8^x$) (2) 已知指数函数 $f(x) = a^x$ 过点 $(3, \frac{1}{8})$, 求 $f(0)$ 与 $f(-2)$ 。

4.2.2 指数函数的图象和性质

学习目标

- 会画指数函数 $y = a^x$ 的图象, 掌握底数变化时图象的变化规律;
- 理解并运用指数函数的单调性、过定点等性质;
- 能利用指数函数性质比较大小、求简单指数型函数的值域。

前置复习: 函数 $y = 2^x$ 与 $y = (\frac{1}{2})^x$ 有什么关系? (提示: $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$)

情境引入: 一次性画两张图

用描点法画出 $y = 2^x$ 与 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图象:

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$(\frac{1}{2})^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

观察发现: $y = 2^x$ 从左到右一路攀升 (**单调递增**), $y = (\frac{1}{2})^x$ 一路下滑 (**单调递减**); 两条曲线都过点 $(0, 1)$, 都贴着 x 轴却永不接触。

指数函数的图象与性质

	$y = a^x \ (a > 1)$	$y = a^x \ (0 < a < 1)$
图象	过 $(0, 1)$, 单调递增, 向上翘	过 $(0, 1)$, 单调递减, 向下趴
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
过定点	$(0, 1)$	$(0, 1)$
单调性	在 $\mathbb{R}$ 上单调递增	在 $\mathbb{R}$ 上单调递减
渐近线	x 轴 ($y = 0$)	x 轴 ($y = 0$)

How To: 用指数函数单调性比较大小

- 把两数写成**同一底数**的两个函数值 (如 $2^{0.3}$ 与 $2^{1.7}$);
- 判断底数大于 1 还是小于 1, 确定单调性;
- 比较指数大小, 套用单调性下结论;
- 若底数不同, 找**中间量** 0 或 1 过渡 (如 $2^{0.3} > 1$, 而 $0.3^2 < 1$)。

例题 4.4

(指数函数比较大小)

比较下列各组数的大小:

(1) $2^{1.3}$ 与 $2^{1.7}$; (2) $0.8^{0.5}$ 与 $0.8^{-0.2}$; (3) $2^{0.3}$ 与 0.3^2 。

解: (1) 底数 $2 > 1$, $y = 2^x$ 单调递增。因 $1.3 < 1.7$, 故 $2^{1.3} < 2^{1.7}$ 。(2) 底数 $0.8 \in (0, 1)$, $y = 0.8^x$ 单调递减。因 $0.5 > -0.2$, 故 $0.8^{0.5} < 0.8^{-0.2}$ 。(3) 底数不同, 找中间量: $2^{0.3} > 2^0 = 1$ (底 $2 > 1$ 递增); $0.3^2 = 0.09 < 1$ 。故 $2^{0.3} > 1 > 0.3^2$, 即 $2^{0.3} > 0.3^2$ 。

Try It 4.5: 比较: $0.4^{0.3}$ 与 $0.4^{0.7}$; $1.7^{-0.2}$ 与 $1.7^{0.3}$; $0.9^{0.1}$ 与 $1.1^{0.1}$ 。

Try It 4.6: 求函数 $y = 2^x$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的值域; 再求 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $[0, 3]$ 上的值域。

Q&A

• **问:** 为什么 $y = a^x$ 的值域是 $(0, +\infty)$, 取不到 0?

答: 正数的任何次方都是正数——再小也大于 0。图象贴着 x 轴无限逼近却永不接触, 这条 x 轴就叫**水平渐近线**。

• **问:** 指数函数为什么都过 $(0, 1)$?

答: 因为任何非零数的 0 次方都是 1, 即 $a^0 = 1$, 所以 $x = 0$ 时函数值恒为 1。

技术应用: 用 GeoGebra 输入 $y = a^x$ 并拖动参数 a 。观察: 当 a 从 0.1 增大到 1, 图象“由趴变直”; 当 a 从 1 增大到 10, 图象“越来越陡”。特别注意 $a = 1$ 时图象是一条水平直线——这就是定义中排除 $a = 1$ 的原因。**亲手拖一次参数, 胜过背十遍性质表。**

想一想 (真实情境): 某手机 App 用户数第一年为 1000 万, 若每年增长 30%, 第 t 年用户数为 $y = 1000 \times 1.3^t$ (万)。请估计: 第 5 年用户数约多少? ($1.3^5 = 3.71293$, 约 3713 万) 这类“每年按固定比例增长”的问题, 为什么不能用一次函数描述?

练一练: 判断: $y = a^x$ 与 $y = a^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称吗? 关于 x 轴对称吗? (提示: a^{-x} 是把 x 换成 $-x$, 看图试试)

本节练习 (答案见章末)

- 已知指数函数 $g(x) = a^x$ 的图象经过点 $\left(2, \frac{1}{16}\right)$, 求 a , 并求 $g(0)$ 与 $g(-3)$ 。
- 比较下列各组数的大小: $3^{0.4}$ 与 $3^{0.6}$; $0.5^{-0.3}$ 与 $0.5^{0.2}$; $1.2^{0.5}$ 与 $0.8^{0.5}$ 。
- 某城市投放共享单车 20000 辆, 每月投放量增长 50%, t 个月后投放量为 $y = 20000 \times 1.5^t$ 。求第 3 个月后的投放量。
- 求函数 $y = 3^x$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的值域。
- 在同一坐标系中比较 $y = 2^x$ 与 $y = 3^x$ 的图象: 当 $x = -1$ 时, 哪个函数的图象在上方? (提示: 先算 2^{-1} 与 3^{-1} , 再想想“底越大曲线越靠上”这句话在 $x < 0$ 一侧还成立吗)

4.3 对数：问出“3 的几次方等于 81”

“3 的几次方等于 81?”——你数着指头就能答出 4。可要是换成“2 的几次方等于 10?”你卡壳了，但答案确实存在（约 3.322）。数学的规矩是：**凡是反复出现的问法，就给它一个名字、一个记号**，于是对数诞生了。你可以把对数理解成“问指数”——它不是在算新东西，只是把“问了几次方”这句话写成了 $\log$ 。这一节，我们把“问指数”变成你的第二本能。

4.3.1 对数的概念

学习目标

- 理解对数的概念，掌握对数式与指数式的互化；
- 掌握常用对数 $\lg$ 、自然对数 $\ln$ 及基本恒等式。

前置复习： $2^3 = 8$ 中，哪个数是底数、哪个是指数？把“2 的几次方等于 8”翻译成数学表达式。

情境引入：指数的“逆向开关”

我们知道 $2^3 = 8$ 。现在问：2 的多少次方等于 8？答案当然是 3。再问：2 的多少次方等于 10？这次说不出整数了，但答案确实存在（约 3.322）。为了把这个“多少次方”变成一个能写、能算的数，数学上发明了记号——**对数**。

对数的定义

一般地，如果 $a^x = N$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，那么数 x 叫做**以 a 为底 N 的对数**，记作

$$x = \log_a N$$

其中 a 叫做对数的**底数**， N 叫做**真数**。

两个常用对数

- 以 10 为底的对数叫**常用对数**，记作 $\lg N$ （即 $\log_{10} N$ ）；
- 以 e ($e \approx 2.71828$) 为底的对数叫**自然对数**，记作 $\ln N$ （即 $\log_e N$ ）。

对数恒等式

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a N} = N, \quad \log_a a^x = x$$

How To：指数式与对数式互化

- 找“底”：指数式的底 a 就是对数式的底 a ；
- 找“幂”：指数式的幂 N 是对数式的真数；

- 找“指数”：指数式的指数 x 是对数式的对数值。

即 $a^x = N \iff x = \log_a N$ 。口诀：**底不变，幂变真数，指数变对数**。

例题 4.5

(指数对数互化与求值)

(1) 把下列指数式写成对数式： $2^5 = 32$ ； $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ 。(2) 求值： $\log_3 81$ 、 $\lg 0.01$ 、 $\ln e$ 、 $2^{\log_2 7}$ 。

解：(1) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$ ； $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 。(2) $\log_3 81$ ：问 3 的几次方等于 81， $3^4 = 81$ ，故 $\log_3 81 = 4$ ； $\lg 0.01$ ： $10^{-2} = 0.01$ ，故 $\lg 0.01 = -2$ ； $\ln e$ ： $e^1 = e$ ，故 $\ln e = 1$ ； $2^{\log_2 7}$ ：由恒等式 $a^{\log_a N} = N$ ，得 $2^{\log_2 7} = 7$ 。

Try It 4.7：(1) 把 $\log_3 27 = 3$ 写成指数式；(2) 求值： $\log_2 8$ 、 $\lg 0.001$ 、 $\ln 1$ 、 $5^{\log_5 3}$ 。

Q&A

- 问：对数能取负值吗？

答：能。 $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ ，因为 $2^{-2} = \frac{1}{4}$ 。**对数可以是任何实数，但真数必须大于 0**—— $\log_a N$ 中要求 $N > 0$ （负数和 0 没有对数）。

- 问： $a^x = N$ 中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，那 N 一定是正数吗？

答：是。正数的任何实数次方都大于 0，所以**真数 $N > 0$ 是硬约束**——这是对数函数定义域问题的源头。

数学视野：16 世纪末，天文学家被繁琐的乘法折磨——要算 1.414×1.732 这样的小数乘积。苏格兰数学家纳皮尔发明了对数：**把乘法变成加法** ($\lg a + \lg b = \lg(ab)$)，从而 $a \times b$ 可以查表先取对数、相加、再还原。当时的人们惊叹：“对数把几个月的工作缩短为几天。”拉普拉斯后来说：“**对数的发明，等于把天文学家的寿命延长了一倍。**”

想一想：为什么说“负数和 0 没有对数”？（提示：回看 $a^x = N$ ，正数的任意次方可能为负或 0 吗？）

4.3.2 对数的运算

学习目标

- 掌握对数的运算性质（积、商、幂的对数）；
- 掌握换底公式，能用常用对数进行换底运算。

前置复习： $\lg 2 + \lg 5$ 与 $\lg(2 \times 5) = \lg 10 = 1$ ，你猜 $\lg 2 + \lg 5$ 是多少？

情境引入：查表时代的口算魔术

在没有计算器的年代,要算 7.2×8.5 , 数学家先查对数表: $\lg 7.2 \approx 0.8573$, $\lg 8.5 \approx 0.9294$, 相加得 1.7867, 再反查得 61.2。乘法被“降维”成了加法。为什么能这么干? 因为有对数的运算性质。

对数的运算性质

如果 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (n \in \mathbb{R})$$

换底公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

$$\text{特别地, } \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \text{ 或 } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

How To: 对数式化简求值

- 观察真数能否分解成同底数的幂 (如 $12 = 4 \times 3$, $\frac{1}{8} = 2^{-3}$);
- 用“乘变加、除变减、幂变系数”拆开或合并;
- 套用 $\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a a = 1$ 收尾。

例题 4.6

(对数运算性质化简求值)

求下列各式的值:

$$(1) \lg 2 + \lg 5; \quad (2) \log_3 45 - \log_3 5; \quad (3) 2\lg 3 + \lg 4; \quad (4) \log_2 3 \cdot \log_3 4.$$

解: (1) $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \times 5) = \lg 10 = 1$. (2) $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = 2$. (3) $2\lg 3 + \lg 4 = \lg 3^2 + \lg 4 = \lg 9 + \lg 4 = \lg 36$. 继续: $36 = 6^2$, 故 $\lg 36 = 2\lg 6$. (4) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} = \frac{\lg 4}{\lg 2} = \frac{2\lg 2}{\lg 2} = 2$.

Try It 4.8: 求值: $\lg 25 + \lg 4$; $\log_5 75 - \log_5 3$; $\log_8 4$; $\log_2 5 \cdot \log_5 8$.

学习提示: 对数运算的“三大陷阱”——(1) $\log_a M + \log_a N \neq \log_a(M + N)$; (2) $\log_a(MN)$ 不能拆成 $\log_a M \cdot \log_a N$; (3) $\frac{\log_a M}{\log_a N} \neq \log_a \frac{M}{N}$ (除法没有分配律)。每次用性质前, 先看结构是否符合公式左边。

练一练：化简 $\lg \sqrt{5} + \lg \sqrt{20}$ 。(提示： $\lg \sqrt{5} = \frac{1}{2} \lg 5$, $\lg \sqrt{20} = \frac{1}{2} \lg 20$)

本节练习 (答案见章末)

- 把 $3^{-4} = \frac{1}{81}$ 写成对数式；把 $\log_{0.5} 16 = -4$ 写成指数式；并求值： $\log_5 125$ 、 $\ln \frac{1}{e}$ 。
- 化简求值： $\lg 5 + \lg 20$ ； $\log_5 10 - \log_5 2$ ； $\log_4 8$ 。
- 化学中溶液的酸碱度用 $pH = -\lg[H^+]$ 表示 ($[H^+]$ 为氢离子浓度，单位 mol/L)。某饮料的 $[H^+] = 2 \times 10^{-4}$ mol/L，求该饮料的 pH 值 ($\lg 2 \approx 0.3$)。
- 已知 $\log_3 2 = a$ ，用 a 表示 $\log_3 8$ 与 $\log_2 9$ 。
- 解方程 $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$ 。算出 x 的值后，务必代回检验真数是否都大于 0——若某同学得到两个解都敢写进答案，他漏了什么？
- 判断正误： $\log_2(3+5)$ 与 $\log_2 3 + \log_2 5$ 相等吗？再判断： $\log_2(4 \times 2)$ 与 $\log_2 4 + \log_2 2$ 相等吗？对比这两个式子，你能说出“乘法变加法”到底是对谁生效的吗？
- 计算并比较： $\log_2 \frac{8}{2}$ 与 $\frac{\log_2 8}{\log_2 2}$ ；再算 $\log_2 4^3$ 与 $(\log_2 4)^3$ 。哪一对相等、哪一对不相等？若你不小心写反了，问题出在哪条运算性质？

4.4 对数函数：从“涨了多少”倒推“涨多久”

细菌翻着倍地涨，第 6 次分裂后有 64 个。反过来，数到 64 个，你立刻知道经历了 6 次分裂——这“倒着读账本”的功夫，就是对数的活。指数函数回答“时间到了有多少”，对数函数回答“有多少就说明过了多久”。一个正着念，一个倒着念，念的是同一本账。这一节，我们把“倒着念”练熟，还会发现它对面站着一面奇妙的“镜子”——指数函数。

4.4.1 对数函数的概念

学习目标

- 理解对数函数的概念，掌握其与指数函数的关系；
- 会求对数型函数的定义域。

前置复习： $y = 2^x$ 与 $x = \log_2 y$ 是同一个关系吗？把 $y = 2^x$ 中的 x 、 y 互换，得到什么函数？

情境引入：从“数量”倒推“时间”

细菌数量 $N = 2^t$ (t 为分裂次数)。若某时刻数到 $N = 64$ 个，经历了几次分裂？解 $2^t = 64$ 得 $t = 6$ 。更一般地，**已知数量 N ，求分裂次数 t** ，得到 $t = \log_2 N$ ——把 N 当自变量， t 当函数值，这就是**对数函数**。

对数函数的定义

一般地，函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 叫做**对数函数**，其中 x 是自变量，定义域为 $(0, +\infty)$ 。

How To: 求对数型函数的定义域

- 真数部分**必须大于 0**: $\log_a(\square)$ 中 $\square > 0$;
- 若有分母，分母不为 0; 若有偶次根号，根号内非负;
- 把约束联立解不等式。

例题 4.7

(对数函数的概念与定义域)

(1) 下列哪些是对数函数? $y = \log_2 x$ 、 $y = \log_x 2$ 、 $y = \log_2(x+1)$ 、 $y = \log_3 x$ 。(2) 求函数 $f(x) = \log_3(2x-1)$ 的定义域。

解: (1) $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_3 x$ 是对数函数 (底为常数且不等于 1, 真数为自变量 x); $y = \log_x 2$ 的**底数是自变量**, 不是对数函数; $y = \log_2(x+1)$ 的真数是 $x+1$, 不是标准对数函数 (是“对数型”函数)。(2) 真数必须大于 0: $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ 。定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。

Try It 4.9: 求函数 $g(x) = \log_2(3-x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域。

4.4.2 对数函数的图象和性质

学习目标

- 会画对数函数图象，掌握底数变化时图象的变化规律;
- 理解并运用对数函数的单调性、过定点等性质;
- 能利用性质比较大小、解简单对数不等式。

前置复习: $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象关于哪条直线对称? $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的反函数是谁?

情境引入: 照镜子

既然 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 互为反函数，它们的图象就关于直线 $y = x$ **对称**。于是指数函数的图象“翻个跟头”，就得到对数函数的图象：过 $(0, 1)$ 变成过 $(1, 0)$ ，水平渐近线变成**竖直渐近线** $x = 0$ 。

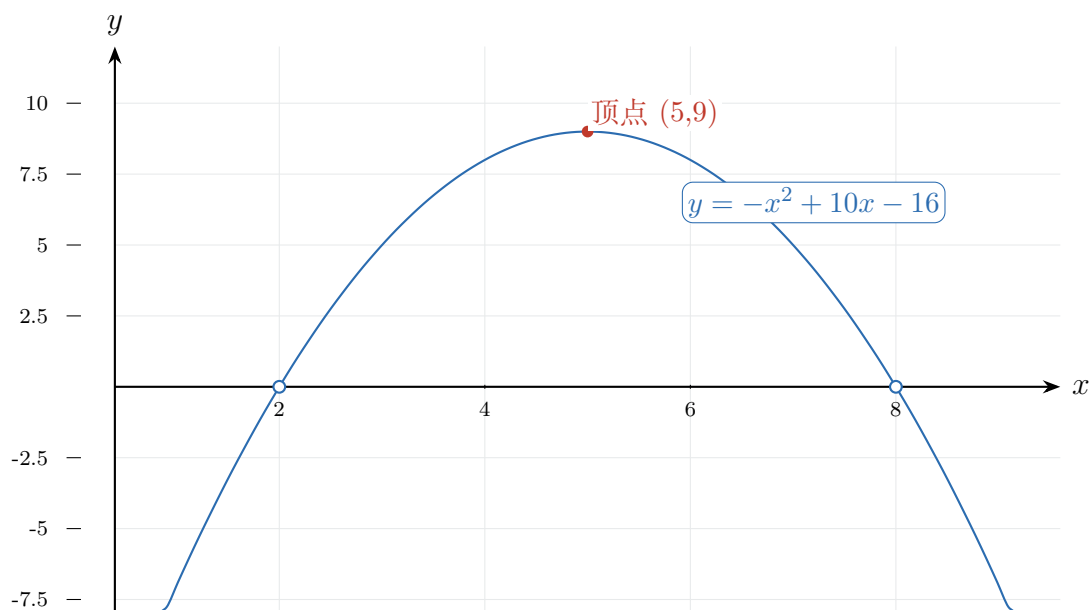


图 4.1: 指数函数与对数函数的图象: $y = 2^x$ 过 $(0, 1)$ 递增, $y = \log_2 x$ 过 $(1, 0)$ 递增, 二者互为反函数

对数函数的图象与性质

	$y = \log_a x \ (a > 1)$	$y = \log_a x \ (0 < a < 1)$
图象	过 $(1, 0)$, 单调递增, 向右伸展	过 $(1, 0)$, 单调递减, 向下垂
定义域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
过定点	$(1, 0)$	$(1, 0)$
单调性	在 $(0, +\infty)$ 上单调递增	在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
渐近线	y 轴 ($x = 0$)	y 轴 ($x = 0$)

例题 4.8

(对数函数比较大小与解不等式)

(1) 比较大小: $\log_2 1.5$ 与 $\log_2 2.5$; $\log_{0.5} 2$ 与 $\log_{0.5} 3$ 。(2) 解不等式: $\log_2 x > 3$ 。

解: (1) $y = \log_2 x$ 底数 $2 > 1$ 递增, $1.5 < 2.5$, 故 $\log_2 1.5 < \log_2 2.5$; $y = \log_{0.5} x$ 底数 $0.5 \in (0, 1)$ 递减, $2 < 3$, 故 $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 3$ 。(2) $\log_2 x > 3 = \log_2 8$, 底数 $2 > 1$ 递增, 故 $x > 8$ 。又真数 $x > 0$ 已满足, 解集为 $(8, +\infty)$ 。

Try It 4.10: 比较 $\log_3 0.8$ 与 $\log_3 1.2$; 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ 。

Try It 4.11: 求 $f(x) = \log_2 x$ 在 $[2, 8]$ 上的值域; 再求 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 9\right]$ 上的值域。

Q&A

- 问: 指数函数与对数函数为什么要“配对”学?

答：它们是同一关系 ($a^x = N$) 的两副面孔。指数函数的图象沿 $y = x$ 翻折就是对数函数图象，底数对单调性的影响规律也完全对称：**同增同减**。分开学容易忘，配对学一遍记住两边。

• 问： $\log_a x$ 的定义域为什么是 $(0, +\infty)$ 而不是 $\mathbb{R}$ ？

答：因为对数式 $\log_a x$ 要求真数 $x > 0$ 。反过来看，指数函数 $y = a^x$ 的值域恰好是 $(0, +\infty)$ ——**定义域与值域在互逆变换下互换**。

探究活动：在同一坐标系中画出 $y = \log_2 x$ 、 $y = \log_3 x$ 、 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象。观察并讨论：(1) 三个图象都过哪个点？(2) 底数大于 1 时，底数越大图象越“躺”还是越“立”？(3) 底数互为倒数 (2 与 $\frac{1}{2}$) 的两条曲线有什么关系？把你的结论与指数函数的对应结论对照，写下“指对规律对照表”。

技术应用：用 GeoGebra 拖动对数函数 $y = \log_a x$ 中的 a ，同时显示对应指数函数 $y = a^x$ 的图象。验证：两图象关于直线 $y = x$ 对称。再试 $a = 1$ 附近，观察图象如何“塌陷”成一条竖线——这就是定义中排除 $a = 1$ 的直观原因。

想一想 (真实情境)：地震震级采用对数标度：震级 $M = \lg \frac{I}{I_0}$ (I 为地震振幅， I_0 为基准振幅)。请回答：(1) 震级 5 级地震的振幅是 4 级的多少倍？(2) 震级每增加 1 级，振幅变为原来的 10 倍还是 100 倍？(提示： $\lg \frac{I_2}{I_1} = M_2 - M_1$)

练一练：判断对错——“ $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象关于 x 轴对称。”(提示： $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{a}} = -\log_a x$)

本节练习 (答案见章末)

- 求函数 $f(x) = \log_2(4 - x) + \lg(x + 1)$ 的定义域。
- 比较大小： $\log_3 2$ 与 $\log_3 5$ ； $\log_{0.4} 3$ 与 $\log_{0.4} 2$ ； $\log_2 0.5$ 与 0 。
- 解不等式： $\log_{0.5}(x - 1) > -2$ 。
- 声音的强弱用分贝 (dB) 表示， $D = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ (I 为声强， I_0 为基准声强)。某公共场所的噪声 $I = 10^4 I_0$ ，求对应的分贝数；若噪声声强变为原来的 10 倍，分贝数增加多少？
- 已知对数函数 $f(x) = \log_a x$ 的图象经过点 $(4, 2)$ ，求 a ，判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性，并比较 $f(0.5)$ 与 $f(3)$ 的大小。
- 求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3)$ 的定义域，并指出它的单调递增区间。(提示：先解 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 得定义域；内层二次函数与外层对数函数一减一增，用“同增异减”判断，注意别把定义域外的区间写进去)

4.5 函数的应用 (二)：把解不出的方程“夹”出来

你有没有玩过“猜价格”的游戏？主持人只说“高了、低了”，你每次取中间数，几轮就能把价格猜个八九不离十。可要是有人让你解 $x^3 - 2x - 5 = 0$ ——它没有求根公式，方程也

“不开口说话”。怎么办？用猜价格的办法：**先在图象上找到根躲在哪个区间，再把区间一次次对半砍，把根“夹”出来。**这一节我们还要看看，指数、对数、一次函数三种“长法”，哪个才是现实问题该用的模型。

4.5.1 函数的零点与二分法

学习目标

- 理解函数零点的概念，会用零点存在性定理判断零点存在；
- 理解二分法的原理，能用二分法求方程的近似解。

前置复习：解方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 。你能画出 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的草图吗？它与 x 轴交在哪？

情境引入：机器上的“打不出根”的方程

很多方程像 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 一样，**没有公式可以直接求根。**但工程上只需要“够用”的近似值。怎么办？一个朴素的想法：先在图象上找到“一根曲线从 x 轴上方穿到下方”的位置——方程的解就在那段区间里。然后**把区间不断对半砍**，就能把解“夹”出来。

函数的零点

对于函数 $y = f(x)$ ，使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数的**零点**。这里藏着一个坑：零点是“数”，不是“点”——**它记的是横坐标，不是那个和 x 轴相交的小圆点。**方程 $f(x) = 0$ 的实数解、函数 $y = f(x)$ 的零点、图象与 x 轴交点的横坐标，三者是**同一件事**。

零点存在性定理：如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数在区间 (a, b) 内有零点。

二分法：每次取区间中点 m ，计算 $f(m)$ ，用它把区间切成两半，判断零点在哪一半，反复进行，直到区间长度小于要求的精确度。

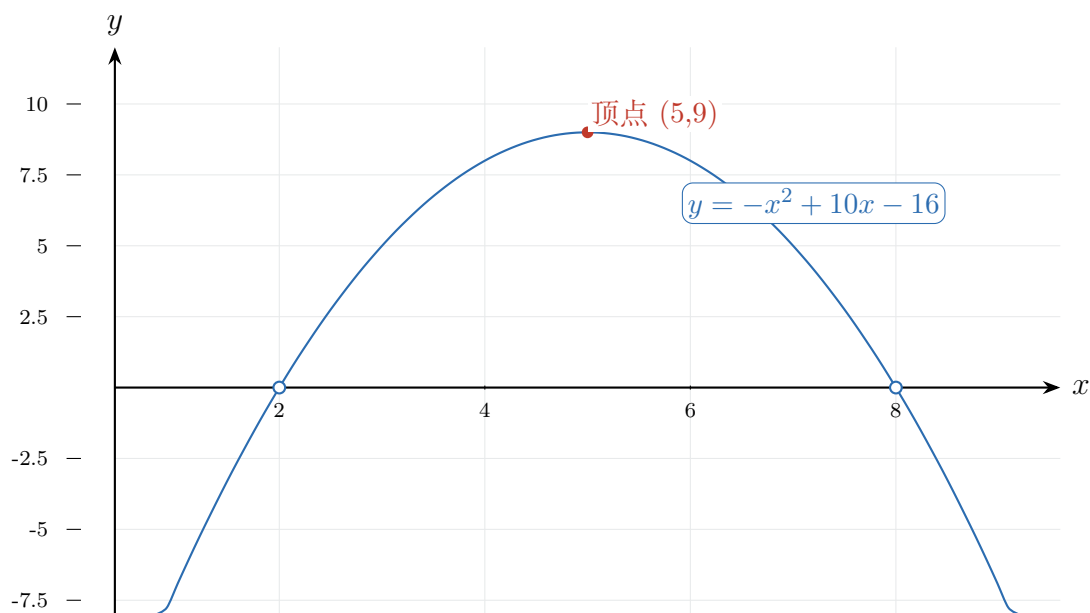


图 4.2: 函数 $f(x) = \ln x + x - 2$ 的图象与零点：零点被“夹”在 $(1, 2)$ 内，用二分法不断对半逼近

How To: 用二分法求方程近似解 (精确到 ε)

- 把方程化为 $f(x) = 0$, 找区间 $[a, b]$ 使 $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- 取中点 $m = \frac{a+b}{2}$, 计算 $f(m)$;
- 若 $f(m) = 0$, 则 m 即零点; 若 $f(a) \cdot f(m) < 0$, 零点在 (a, m) , 令 $b = m$; 否则零点在 (m, b) , 令 $a = m$;
- 重复 2-3, 直到 $|a - b| < \varepsilon$, 取中点作为近似解。

例题 4.9

(二分法求近似解)

用二分法求方程 $x^2 - 3 = 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上的近似解 (精确到 0.1)。

解: 设 $f(x) = x^2 - 3$ 。 $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 1 > 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$, 零点在 $(1, 2)$ 。

次数	区间	中点 m	$f(m)$	新区间
1	(1, 2)	1.5	$-0.75 < 0$	(1.5, 2)
2	(1.5, 2)	1.75	$0.0625 > 0$	(1.5, 1.75)
3	(1.5, 1.75)	1.625	$-0.3594 < 0$	(1.625, 1.75)
4	(1.625, 1.75)	1.6875	$-0.1523 < 0$	(1.6875, 1.75)

此时区间 $(1.6875, 1.75)$ 长度 $0.0625 < 0.1$, 取中点 $m = 1.71875$, 故近似解为 $x \approx 1.7$ 。

Try It 4.12: 用二分法求方程 $x^3 - 2 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上的近似解 (精确到 0.25, 做 3 次即可)。

Q&A

- **问:** $f(a) \cdot f(b) < 0$ 能推出零点唯一吗?

答: 不能, 只能推出至少有一个零点。图象可能穿过 x 轴多次。要保证唯一, 还需函数在区间上单调。

- **问:** 二分法一次能精确到多少?

答: 初始区间长 $b - a$, 二分 k 次后区间长 $\frac{b-a}{2^k}$ 。要求精确到 ε , 需 $2^k \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$ 。

想一想: $f(x) = \lg x + x - 2$ 在 $(1, 2)$ 上有零点吗? (提示: $f(1) = -1$, $f(2) = \lg 2 \approx 0.301 > 0$) 你能不用计算器, 估计这个零点在 $(1.5, 2)$ 还是 $(1, 1.5)$ 吗?

4.5.2 函数模型及其应用

学习目标

- 掌握指数增长、对数增长模型的基本形式;

- 能用指数、对数函数模型刻画实际问题并求解。

前置复习：复利公式：本金 P ，年利率 r ，按年复利， t 年后本息和 $A = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

情境引入：三种“长法”的对比

把 100 元存进三只不同的“账户”， t 年后的金额分别按三种规律变化：

模型	解析式	特征
一次（线性）	$y = 100 + 20t$	每年加固定数，匀速增长
指数	$y = 100 \times 1.2^t$	每年乘固定倍数，越涨越快
对数	$y = 100 + 20 \lg t$	前期快后期慢，越涨越慢

前 5 年指数型与线性型差不多，20 年后指数型遥遥领先，而**对数型适合描述“快速增长后趋于饱和”**的现象（如传染病的累计确诊、物体冷却接近室温）。选对模型，是数学建模的第一步。

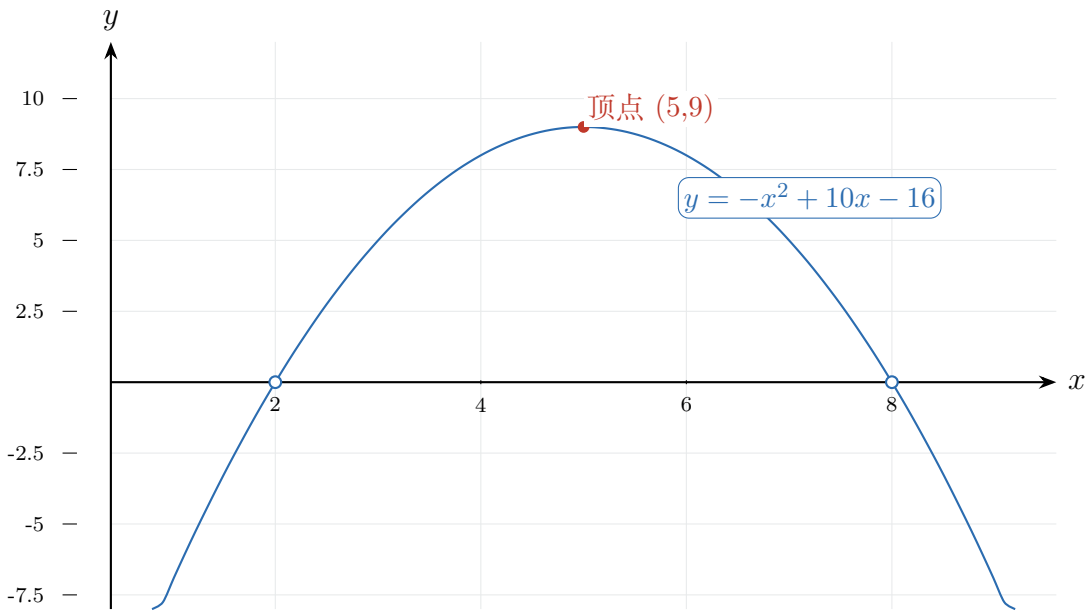


图 4.3: 复利与单利增长对比：本金 1000 元，复利按每年乘 1.05 增长，单利按每年加 50 元增长，30 年后差距逐渐拉开

常见增长模型

- 指数增长：** $y = y_0 \cdot a^{kt}$ ($a > 1, k > 0$)，刻画细菌繁殖、复利、人口增长；
- 指数衰减：** $y = y_0 \cdot a^{-kt}$ ，刻画放射性衰变（半衰期）、药物代谢；
- 对数增长：** $y = a \lg t + b$ ，刻画震级、分贝、信息量。

例题 4.10

(复利模型与半衰期模型)

(1) 小李把压岁钱 1 万元存入银行, 年利率 4%, 按年复利计算。请问: 10 年后本息和约是多少元? ($1.04^{10} \approx 1.4802$) (2) 某放射性元素半衰期为 5 年, 现测得某样品中该元素含量为原来的 12.5%, 求该样品已存在多少年。

解: (1) 复利模型: 每年末金额 = 上年金额 $\times (1 + 4\%)$, 故 t 年后 $A = 10000 \times 1.04^t$ 。 $t = 10$: $A = 10000 \times 1.04^{10} \approx 10000 \times 1.4802 = 14802$ (元)。 答: 约 14802 元, 比单利 ($10000 + 10000 \times 4\% \times 10 = 14000$ 元) 多约 800 元。 (2) 半衰期模型: $y = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$ 。 令 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = 0.125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ 。 同底数幂相等则指数相等: $\frac{t}{5} = 3$, 得 $t = 15$ 。 答: 该样品已存在约 15 年。

Try It 4.13: (1) 某湖泊中藻类面积每 10 天翻一番, 初始面积为 5 平方米。写出面积 S 与天数 t 的函数关系, 并求第 30 天的面积。 (2) 承第 (1) 问: 大约多少天后面积达到 320 平方米? (提示: $320 = 5 \times 64$, 解指数方程)

项目学习 (小组任务): 为学校设计一份“人口变化趋势分析报告”。 任务: (1) 查找你所在城市近 20 年常住人口数据; (2) 分别用一次函数 $y = a + bt$ 与指数函数 $y = y_0 a^t$ 拟合数据, 画出两条拟合曲线; (3) 用两种模型分别预测 10 年后的人口, 比较差异并讨论哪种模型更合理 (提示: 人口增长率会因政策、经济而变化, 纯指数模型长期会失真); (4) 写出报告: 含数据表、拟合图、预测值与理由。 **选模型、拟合、预测、检验, 就是数学建模的完整流程。**

想一想 (真实情境): 你手机里收到“连续点击红包翻倍, 第 10 次可得 1024 元”的活动广告。 请用指数函数算出: 第 1 次点击得多少? ($2^{10} = 1024$, 故第 1 次是 1 元) 再想想: 如果平台规定“每天只能点一次”, 你真的能拿到 1024 元吗? **用指数函数看穿营销话术**, 是本章给你的一项生活技能。

练一练: 某种细菌每 20 分钟分裂一次 (数量翻倍)。 某同学在中午 12:00 放了 1 个细菌进培养皿, 问她下午 3:00 能数到多少个? (提示: 3 小时 = 9 个 20 分钟, $2^9 = 512$)

本节练习 (答案见章末)

- 用零点存在性定理判断: 函数 $f(x) = x^3 - x - 1$ 在区间 $(1, 2)$ 内是否有零点?
- 用二分法求方程 $x^3 + x - 3 = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 内的近似解 (做 3 次, 写出每次的新区间)。
- 某药物在体内的含量按半衰期规律衰减, 已知其半衰期为 6 小时, 初始剂量为 400 mg。 写出 t 小时后含量 y (mg) 的函数关系, 并求 6 小时、12 小时后各剩多少; 大约多少小时后含量降到 50 mg?
- 判断函数 $g(x) = \lg x + x - 3$ 在区间 $(2, 3)$ 内是否有零点? 若有, 用二分法再二分一次, 指出零点落在哪个子区间内。
- 三个实际问题, 请你先判断各用哪种模型 (线性/指数), 再写出函数式:

(1) 小赵每年往存款账户里固定多存 1000 元, 第 t 年的本金总和 y (元) 与 t 的关系; (2) 小钱每年把本金乘以 1.05 (年利率 5%, 复利), 第 t 年的本息和 y (元) 与 t 的关系; (3) 某种细菌每 3 小时数量变为原来的 8 倍, t 小时后的数量 y 与 t 的关系。(提示: 先问自己一句——每步增加的量是“固定的数”还是“固定的比例”?)

本章回顾

概念地图

· 指数与对数 (一枚硬币的两面) · 指数 · n 次方根: $x^n = a \rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ (偶次根号下非负) · 分数指数幂: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ · 运算性质: $a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$ · 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) · 定义域 $\mathbb{R}$, 值域 $(0, +\infty)$, 过 $(0, 1)$ · $a > 1$ 增, $0 < a < 1$ 减 · 对数: $x = \log_a N \iff a^x = N$ (真数 $N > 0$) · 运算性质: $\log(MN) = \log M + \log N$, $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$, $\log M^n = n \log M$ · 换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ · 对数函数 $y = \log_a x$ (与指数函数互为反函数) · 定义域 $(0, +\infty)$, 值域 $\mathbb{R}$, 过 $(1, 0)$ · $a > 1$ 增, $0 < a < 1$ 减; 图象关于 $y = x$ 与 $y = a^x$ 对称 · 应用 · 二分法: $f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow$ 对半夹逼求零点 · 模型: 指数增长/衰减 (复利、半衰期)、对数模型 (震级、分贝)

关键公式速查

内容	公式
分数指数幂	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$
指数运算	$a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$
指数函数	$y = a^x$, 过 $(0, 1)$, $a > 1$ 增、 $0 < a < 1$ 减
对数定义	$x = \log_a N \iff a^x = N$
对数运算	$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$; $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$; $\log_a M^n = n \log_a M$
换底公式	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
对数函数	$y = \log_a x$, 过 $(1, 0)$, $a > 1$ 增、 $0 < a < 1$ 减
恒等式	$a^{\log_a N} = N$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
半衰期模型	$y = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (T 为半衰期)

分层练习

A 基础层

- 求值: $\sqrt[3]{64}$ 、 $\sqrt[4]{81}$ 、 $\sqrt{(-7)^2}$ 。
- 化简: $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$; $\frac{b^2}{b^{\frac{3}{2}}}$ 。
- 判断: $y = 3^x$ 、 $y = x^3$ 、 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 中哪些是指数函数?
- 求值: $\log_3 81$ 、 $\lg 100$ 、 $\ln e^2$ 。
- 化简: $\lg 2 + \lg 50$; $\log_2 6 - \log_2 3$ 。

- 比较大小: $2^{0.2}$ 与 $2^{0.5}$; $\log_{0.5} 2$ 与 $\log_{0.5} 5$ 。
- 求定义域: $f(x) = \log_3(x-2)$ 。
- 用零点存在性定理判断方程 $x^3 - 3 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内是否有根。

B 应用层

- 某城市人口今年为 500 万, 若年增长率为 1.2%, 写出人口 y (万) 与年份 t 的函数关系, 并估计 20 年后人口。 $(1.012^{20} \approx 1.2696)$
- 已知 $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$, 用 a 、 b 表示 $\log_2 15$ 与 $\log_2 \frac{3}{5}$ 。
- 放射性元素每 6 年衰变为原来的一半。某文物测得碳含量为原来的 25%, 问文物距今多少年?
- 用二分法求方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的近似解 (精确到 0.25, 做 3 次)。

C 拓展层

- 已知 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, 用 a 、 b 表示 $\log_2 12$ 。
- 某工厂年产值第一年为 100 万元, 若年增长率为 p , 写出解不等式 $100(1+p)^t \geq 400$ (翻两番) 的求解思路。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 4.1: $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $8^{\frac{2}{3}} = 4$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8$ 。
- 4.2: $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$; $\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = b$; $(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}})^3 = x^2y^{-\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{y^{\frac{3}{2}}}$ 。
- 4.3: $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$ (指数相加: $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$); $(\pi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} = \pi^{\frac{1}{4}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} = \pi^0 = 1$; $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}} = 3^1 = 3$; $(2^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$ 。
- 4.4: (1) $y = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 、 $y = 0.5^x$ 、 $y = 2^{3x} = 8^x$ 是指数函数; $y = x^{\frac{1}{2}}$ 是幂函数。(2) $a^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $a = \frac{1}{2}$; $f(0) = 1$, $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ 。
- 4.5: $0.4^{0.3} > 0.4^{0.7}$ (底 $0.4 < 1$ 递减, $0.3 < 0.7$); $1.7^{-0.2} < 1.7^{0.3}$ (底 > 1 递增); $0.9^{0.1} < 1 < 1.1^{0.1}$, 故 $0.9^{0.1} < 1.1^{0.1}$ 。

- **4.6:** $y = 2^x$ 在 $[-1, 2]$ 递增: $y_{\min} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $y_{\max} = 2^2 = 4$, 值域 $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $[0, 3]$ 递减, $y_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $y_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, 值域 $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$ 。
- **4.7:** (1) $3^3 = 27$ 。(2) $\log_2 8 = 3$; $\lg 0.001 = -3$; $\ln 1 = 0$; $5^{\log_5 3} = 3$ 。
- **4.8:** $\lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$; $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 25 = 2$; $\log_8 4 = \frac{2}{3}$; $\log_2 5 \cdot \log_5 8 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{3 \lg 2}{\lg 5} = 3$ 。
- **4.9:** $3 - x > 0$ 且 $x > 0 \rightarrow$ 定义域 $(0, 3)$ 。
- **4.10:** $\log_3 0.8 < \log_3 1.2$ (底 $3 > 1$ 递增); $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$, 底 $\frac{1}{2} < 1$ 递减, $x \geq \frac{1}{4}$, 又 $x > 0$, 解集 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 。
- **4.11:** $f(x) = \log_2 x$ 在 $[2, 8]$ 递增, 值域 $[\log_2 2, \log_2 8] = [1, 3]$; $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 9\right]$ 递减, $f_{\max} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$, $f_{\min} = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, 值域 $[-2, 1]$ 。
- **4.12:** $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 6 > 0$ 。第 1 次: 中点 1.5, $f(1.5) = 1.375 > 0 \rightarrow$ 区间 $(1, 1.5)$; 第 2 次: 中点 1.25, $f(1.25) = -0.047 < 0 \rightarrow$ 区间 $(1.25, 1.5)$; 第 3 次: 中点 1.375, $f(1.375) = 0.60 > 0 \rightarrow$ 区间 $(1.25, 1.375)$ 。区间长 $0.125 < 0.25$, 近似解 $x \approx 1.3$ 。
- **4.13:** (1) $S = 5 \times 2^{\frac{t}{10}}$; $t = 30$: $S = 5 \times 2^3 = 40$ 平方米。(2) $5 \times 2^{\frac{t}{10}} = 320 \Rightarrow 2^{\frac{t}{10}} = 64 = 2^6 \Rightarrow \frac{t}{10} = 6 \Rightarrow t = 60$ 天。

各节练习答案

- **4.1 节:** 1. $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$; $32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$; $100^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{100})^3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ 。2. $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$; $\frac{b^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}} = b^{\frac{7}{12}}$; $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^4 = \frac{x^2}{y^{\frac{4}{3}}}$ 。3. $T = 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ 年。4. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$, 平方后 $= a^{\frac{11}{6}}$ 。5. $(-2)^2 = 4$ (负号在括号内被平方, 得正); $-2^2 = -4$ (负号在括号外, 只给 2^2 加负号); $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ (负指数取倒数, 底数仍为 -2); $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ (负指数取倒数, 底数为 2)。“负号位置”和“取倒数”是两件独立的事, 先各算各的。
- **4.2 节:** 1. $a^2 = \frac{1}{16}$, $a > 0 \rightarrow a = \frac{1}{4}$; $g(0) = 1$, $g(-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$ 。2. 底 $3 > 1$ 递增 $\rightarrow 3^{0.4} < 3^{0.6}$; 底 $0.5 \in (0, 1)$ 递减, $-0.3 < 0.2 \rightarrow 0.5^{-0.3} > 0.5^{0.2}$; $1.2^{0.5} > 1 > 0.8^{0.5}$, 故 $1.2^{0.5} > 0.8^{0.5}$ 。3. $t = 3$: $y = 20000 \times 1.5^3 = 20000 \times 3.375 = 67500$ 辆。4. 3^x 在 $[-2, 1]$ 上递增, $y_{\min} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$, $y_{\max} = 3^1 = 3$, 值域 $\left[\frac{1}{9}, 3\right]$ 。5. $x = -1$ 时 $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 故 $y = 2^x$ 的图象在上方。结论: 在 $x < 0$ 一侧, 底数越大的指数函数图象反而越靠下——“底越大越靠上”只在 $x > 0$ 一侧成立。

- 4.3 节:** 1. $3^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$; $\log_{0.5} 16 = -4 \Rightarrow 0.5^{-4} = 16$; $\log_5 125 = 3$; $\ln \frac{1}{e} = -1$. 2. $\lg 5 + \lg 20 = \lg 100 = 2$; $\log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 5 = 1$; $\log_4 8 = \frac{\lg 8}{\lg 4} = \frac{3 \lg 2}{2 \lg 2} = \frac{3}{2}$. 3. $pH = -\lg(2 \times 10^{-4}) = -(\lg 2 + \lg 10^{-4}) = 4 - \lg 2 \approx 4 - 0.3 = 3.7$. 4. $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3a$; $\log_2 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 2} = \frac{2}{a}$. 5. 先由对数定义知 $x > 0$ 且 $x + 1 > 0$, 即 $x > 0$. 合并: $\log_2(x^2 + x) = 1$, $x^2 + x = 2$, $x = 1$ 或 $x = -2$. 代回验真数: $x = -2$ 时 $x + 1 = -1 < 0$, $x = -2 < 0$, 真数非正应舍去; $x = 1$ 时两个真数分别为 2、1, 均大于 0. 故方程的解为 $x = 1$. “算完必须验真数”正是对数方程与普通方程最大的不同. 6. 不相等: $\log_2(3 + 5) = \log_2 8 = 3$, 而 $\log_2 3 + \log_2 5 \approx 1.585 + 2.322 = 3.907 \neq 3$. 相等: $\log_2(4 \times 2) = \log_2 8 = 3$, $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$. “乘法变加法”只对积的真数生效, $\log_a(M + N)$ 没有分配律. 7. $\log_2 \frac{8}{2} = \log_2 4 = 2$, 而 $\frac{\log_2 8}{\log_2 2} = \frac{3}{1} = 3$, 不相等——“除变减”是对真数的商生效, 不是对两个对数值相除. $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 6$, 而 $(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$, 不相等——幂的指数可以“降为系数”, 但不能对整个对数式再乘方.
- 4.4 节:** 1. $4 - x > 0$ 且 $x + 1 > 0 \rightarrow$ 定义域 $(-1, 4)$. 2. 底 $3 > 1$ 递增 $\rightarrow \log_3 2 < \log_3 5$; 底 $0.4 \in (0, 1)$ 递减 $\rightarrow \log_{0.4} 3 < \log_{0.4} 2$; $\log_2 0.5 = -1 < 0$. 3. $\log_{0.5}(x - 1) > -2 = \log_{0.5} 4$, 底 $0.5 < 1$ 递减 $\rightarrow x - 1 < 4$ 且 $x - 1 > 0$, 解集 $(1, 5)$. 4. $D = 10 \lg 10^4 = 40 \text{ dB}$; 声强为原来的 10 倍, 分贝增加 $10 \lg 10 = 10 \text{ dB}$. 5. $\log_a 4 = 2 \rightarrow a = 2$; 底 $a > 1 \rightarrow$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $f(0.5) = \log_2 0.5 = -1 < \log_2 3 = f(3)$. 6. 定义域: $x^2 - 4x + 3 > 0$, 即 $(x-1)(x-3) > 0$, 得 $x < 1$ 或 $x > 3$. 内层 $t = x^2 - 4x + 3$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减、在 $(3, +\infty)$ 上单调递增; 外层 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 单调递减. 由同增异减: 定义域内 $(1, 3)$ 写进答案、忘了先求定义域, 是本题最常见的错误.
- 4.5 节:** 1. $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$, $f(1)f(2) < 0$ 且 f 连续 $\rightarrow$ 在 $(1, 2)$ 内有零点. 2. $f(0) = -3$, $f(2) = 7$, 零点在 $(0, 2)$. 第 1 次: 中点 1, $f(1) = -1 < 0 \rightarrow (1, 2)$; 第 2 次: 中点 1.5, $f(1.5) = 1.875 > 0 \rightarrow (1, 1.5)$; 第 3 次: 中点 1.25, $f(1.25) = 0.203 > 0 \rightarrow (1, 1.25)$, 近似解约 1.1. 3. $y = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$; $t = 6$ 剩 200 mg, $t = 12$ 剩 100 mg; 令 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow t = 18$ 小时. 4. $g(2) = \lg 2 - 1 < 0$, $g(3) = \lg 3 > 0 \rightarrow$ 在 $(2, 3)$ 内有零点; 二分一次取中点 2.5, $g(2.5) = \lg 2.5 - 0.5 \approx 0.398 - 0.5 < 0 \rightarrow$ 零点在 $(2.5, 3)$ 内. 5. (1)(2) 是“每年增加固定金额”, 属于**线性 (等差)**模型: (1) $y = 1000t$; (2) 本金固定存入则仍是线性, 但若指本息和 (每年按 5% 复利增长), 则每步乘固定比例, 属于**指数 (等比)**模型 $y = 1000 \times 1.05^t$ ——第 (2) 问的关键正是“看它乘的是固定数还是固定比例”. (3) 每 3 小时变为 8 倍 (固定比例), 指数模型: $y = y_0 \cdot 8^{\frac{t}{3}}$ (或写作 $y = y_0 \cdot 2^t$, 因为 $8^{\frac{1}{3}} = 2$). 判断模型时先问“每步是加固定数还是乘固定比例”, 是选型的第一步.

A 基础层答案

A1: $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt{(-7)^2} = 7$ (偶次根号加绝对值)。

A2: $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = a^1 = a$; $\frac{b^2}{b^{\frac{3}{2}}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$ 。

A3: $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是指数函数; $y = x^3$ 是幂函数。

A4: $\log_3 81 = 4$; $\lg 100 = 2$; $\ln e^2 = 2$ 。

A5: $\lg 2 + \lg 50 = \lg 100 = 2$; $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1$ 。

A6: $2^{0.2} < 2^{0.5}$ (底 $2 > 1$ 递增); $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 5$ (底 $0.5 < 1$ 递减)。

A7: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, 定义域 $(2, +\infty)$ 。

A8: $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 5 > 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$ 且 f 连续 $\rightarrow$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 方程有根。

B 应用层答案

B9: $y = 500 \times 1.012^t$; $t = 20$: $y \approx 500 \times 1.2696 = 634.8 \approx 635$ 万人。

B10: $\log_2 15 = \log_2(3 \times 5) = a + b$; $\log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5 = a - b$ 。

B11: 半衰期 6 年, 含量 $25\% = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$ 两个半衰期 $\rightarrow$ 距今 12 年。

B12: $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ 。第 1 次: 中点 0.5, $f(0.5) = 0.125 + 0.5 - 1 = -0.375 < 0 \rightarrow (0.5, 1)$; 第 2 次: 中点 0.75, $f(0.75) = 0.4219 + 0.75 - 1 = 0.1719 > 0 \rightarrow (0.5, 0.75)$; 第 3 次: 中点 0.625, $f(0.625) = 0.244 + 0.625 - 1 = -0.131 < 0 \rightarrow (0.625, 0.75)$ 。区间长 $0.125 < 0.25$, 近似解 $x \approx 0.7$ 。

C 拓展层答案

C13: $\log_2 12 = \frac{\lg 12}{\lg 2} = \frac{\lg(3 \times 4)}{\lg 2} = \frac{\lg 3 + 2\lg 2}{\lg 2} = \frac{b + 2a}{a}$ 。

C14: 解 $100(1+p)^t \geq 400$, 即 $(1+p)^t \geq 4$ 。两边取对数: $t \lg(1+p) \geq \lg 4$, 因 $\lg(1+p) > 0$, 故 $t \geq \frac{\lg 4}{\lg(1+p)}$ 。取满足不等式的最小整数即可。例如 $p = 5\%$ 时 $t \geq \frac{0.6021}{0.0212} \approx 28.4$, 即至少 29 年。

第五章 世界为什么是周期性的：三角函数

章首情境

5.1 任意角和弧度制：360° 装不下运动员的三周跳

花样滑冰运动员一个“三周跳”在空中转 1080° ——初中那个“角的范围只到 360° ”的脑子，根本装不下它。更让人头疼的是：同样转到 30° 的位置，顺时针转和逆时针转竟是两个完全不同的动作。你只要在方向盘上多打几圈就会明白：角不只是“两条射线之间的缝隙”，而是一次旋转的“账本”。这一节，我们把角从“ 0° 到 360° 的框框”里解放出来，再顺手换一把更趁手的尺子——弧度。

5.1.1 任意角

学习目标

- 理解正角、负角、零角的概念，理解象限角；
- 掌握终边相同的角的表示，能判断角所在的象限。

前置复习 (Be Prepared)

- 初中时你学过的角有多大范围？一个圆周是多少度？
- 时钟从 12 点走到 3 点，分针转了多少度？从 3 点走到 9 点呢？
- 锐角、直角、钝角、平角、周角分别是多少度？

情境引入：转体运动员需要“超过一周”的角

花样滑冰运动员做“三周跳”，身体在空中旋转 $3 \times 360^\circ = 1080^\circ$ ；体操运动员的“后空翻两周”则是 720° 。初中阶段角的范围只到 360° ，根本装不下这些旋转。更麻烦的是：同样转到 30° 的位置，顺时针转和逆时针转是两个完全不同的动作。所以，我们需要把“角”从“两条射线之间的空隙”升级为“一条射线的旋转量”。

任意角的定义

一条射线绕其端点旋转，就形成了角。按旋转方向分类：

- **正角**：按**逆时针**方向旋转形成的角（如 30° ）；
- **负角**：按**顺时针**方向旋转形成的角（如 -30° ）；
- **零角**：射线没有作任何旋转（ 0° ）。

象限角

在平面直角坐标系中，把角的顶点放在**原点**，角的**始边**放在 x 轴**正半轴**上，角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限角。终边落在坐标轴上的角（如 90° 、 180° 、 270° ）不属于任何象限。

终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可以构成一个集合：

$$\{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

How To：判断给定角所在的象限

- 用角除以 360° ，写成“角 $= k \times 360^\circ + \theta$ ”（ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ）；
- 看余角 θ 落在哪个象限（或坐标轴）；
- 终边与 θ 相同的角，象限也相同。

例题 5.1

（终边相同的角与象限角）

（1）写出与 -330° 终边相同的角的集合，并判断 -330° 是第几象限角。（2）判断 1230° 是第几象限角。

解：（1）集合为 $\{\beta \mid \beta = -330^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 。取 $k = 1$ ： $\beta = -330^\circ + 360^\circ = 30^\circ$ 。 -330° 与 30° 终边相同，而 30° 的终边在第一象限，故 -330° 是第一象限角。（2） $1230^\circ = 3 \times 360^\circ + 150^\circ$ 。 150° 的终边在第二象限，故 1230° 是第二象限角。

Try It 5.1：（1）写出与 45° 终边相同的角的集合；（2）判断 -210° 、 960° 各是第几象限角。

Q&A

- **问**：锐角一定是第一象限角吗？第一象限角一定是锐角吗？

答：锐角（ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ）一定是第一象限角；但第一象限角不一定是锐角——比如 390° 是第一象限角，却不是锐角。“**第一象限角**”是一个范围，锐角是一个具体的数。

- **问**： $k \cdot 360^\circ$ 中 k 可以为负吗？

答：可以。 k 是任意整数： $k = 0$ 得到 α 本身， $k = 1$ 逆时针多转一圈， $k = -1$ 顺时针退一圈。

想一想：时针和分针在 12 点重合后，到下一次重合，分针转过的角用正角还是负角表示？是多少度？

5.1.2 弧度制

学习目标

- 理解 1 弧度的定义，掌握角度与弧度的互化；
- 会用弧长公式、扇形面积公式解决问题。

前置复习：一个圆的周长公式是什么？ 60° 的圆心角所对的弧长占整个圆周的几分之几？

情境引入：角度制的“别扭”

用度来度量角：一个圆周 360° ， 1° 是圆周的 $\frac{1}{360}$ 。这很直观，但有个麻烦——圆越大，同样 60° 的角所对的弧长越大，弧长公式总要乘一个和圆周率、半径有关的系数。能不能让“角的度量”和“半径”脱钩，用弧长与半径的比值来定义角？

1 弧度的定义

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 **1 弧度的角**，用符号 **rad** 表示。

由于半径为 r 的圆，整个圆周的弧长是 $2\pi r$ ，所以整个圆周的角为 $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ 弧度。于是：

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

角度与弧度的互化

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3$$

常用换算： $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ， $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ， $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ， $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ， $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ， $180^\circ = \pi$ ， $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ 。

弧长与扇形面积公式

设圆心角为 α （弧度制， $0 < \alpha < 2\pi$ ），半径为 r ：

- 弧长： $l = \alpha r$ ；
- 扇形面积： $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\alpha r^2$ 。

How To：角度与弧度互化

- 角度 $\rightarrow$ 弧度：乘以 $\frac{\pi}{180}$ ；
- 弧度 $\rightarrow$ 角度：乘以 $\frac{180}{\pi}$ ；
- 结果中常含有 π ，不必换算成小数（如 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ 保持这个形式）。

例题 5.2

(角度弧度互化与弧长)

(1) 把 135° 化成弧度; 把 $\frac{7\pi}{6}$ rad 化成角度。(2) 已知半径为 4 的圆中, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 求该圆心角所对的弧长与扇形面积。

解: (1) $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad; $\frac{7\pi}{6}$ rad $= \frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 210^\circ$ 。(2) 弧长 $l = \alpha r = \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3} \approx 4.19$; 扇形面积 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 4^2 = \frac{8\pi}{3} \approx 8.38$ 。

Try It 5.2: (1) 把 210° 化成弧度; 把 $\frac{5\pi}{4}$ rad 化成角度。(2) 半径为 2, 圆心角为 $\frac{\pi}{6}$, 求弧长。

学习提示: 弧度制下“ 60° ”写成“ $\frac{\pi}{3}$ ”, 不带单位。看到“ $\frac{\pi}{3}$ ”要能瞬间想到 60° , 看到 120° 要能瞬间想到 $\frac{2\pi}{3}$ ——把这张换算表刻进条件反射。

数学视野: “弧度”(radian)这个词直到 1873 年才被英国物理学家汤姆逊正式提出。但弧度制的思想早被牛顿、欧拉使用——他们发现, 只有用弧度制, 公式 $\sin' x = \cos x$ 才不用带 $\frac{\pi}{180}$ 的“尾巴”。物理和微积分最终选择了弧度制, 因为弧度制下公式最简单。

练一练: 半径为 6 的扇形面积为 12, 求该扇形的圆心角的弧度数与弧长。(提示: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$, 解出 α , 再求 $l = \alpha r$)

本节练习 (答案见章末)

- 写出与 -150° 终边相同的角的集合, 并判断 -150° 与 780° 各是第几象限角。
- 把 225° 化成弧度; 把 $\frac{11\pi}{6}$ rad 化成角度。
- 半径为 3 的圆中, 圆心角为 120° , 求该圆心角所对的弧长与扇形面积。
- 时钟的分针长 10 cm, 从 12 点走到 12 点 20 分, 分针尖端扫过的弧长是多少?

5.2 三角函数的概念: 绕圈圈的坐标学

在游乐场的摩天轮上, 你每转到一个位置, 坐着的轿厢就有确定的横、纵坐标。反过来, 你盯着轮子上一个点绕圈圈, 它的坐标也在绕圈圈——正弦、余弦、正切, 不过是“把圈圈上的坐标记下来”的学问。初中用直角三角形定义 $\sin A$ 只够应付锐角, 可 120° 、 270° 根本塞不进直角三角形。这一节, 我们把三角函数从“三角形的边”升级成“圆上的坐标”, 从此什么角都装得下。

5.2.1 任意角的三角函数定义

学习目标

- 理解任意角的三角函数的定义 (单位圆定义);

- 会求给定角的三角函数值，掌握三角函数值的符号规律。

前置复习：在直角三角形中， $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 分别是哪两条边的比？如果角度是 120° ，直角三角形还装得下吗？

情境引入：从直角三角形到圆

初中用直角三角形定义三角函数，但 120° 、 270° 这些角根本放不进直角三角形。怎么把 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 推广到任意角？答案是**圆**：在坐标系中画一个以原点为圆心、半径为 1 的圆（**单位圆**），让角的顶点在原点、始边在 x 轴正半轴，角的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ 。这个交点就是推广的钥匙。

任意角三角函数的定义

设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，则：

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

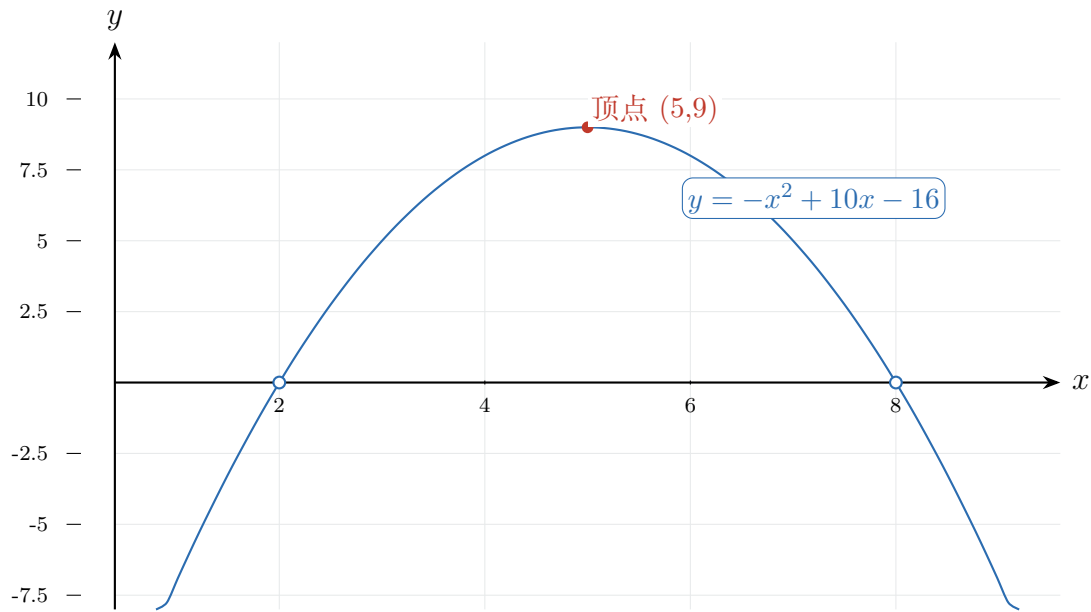


图 5.1: 单位圆上角 α 的终边与圆交于点 $P(x, y)$: $\sin \alpha = y$ 、 $\cos \alpha = x$ 、 $\tan \alpha = y/x$

一般角的三角函数：若角 α 的终边经过点 $P(x, y)$ (x, y 不同时为 0)， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

三角函数值的符号（“一全正、二正弦、三正切、四余弦”）

象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin \alpha$ (y)	+	+	-	-
$\cos \alpha$ (x)	+	-	-	+
$\tan \alpha$ (y/x)	+	-	+	-

特殊角的三角函数值

角 α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在

How To: 求特殊角的三角函数值

- 把角“归位”到 $0 \sim 2\pi$ (或 $0^\circ \sim 360^\circ$) 内的等价角 (去掉整圈);
- 在单位圆上标出终边位置, 读出交点坐标;
- 用口诀“一二三四、符号各不同”确认符号。

例题 5.3

(利用终边上的点求三角函数值)

已知角 α 的终边经过点 $P(3, -4)$, 求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。

解: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ 。 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$;
 $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$ 。

Try It 5.3: 已知角 β 的终边经过点 $P(-5, 12)$, 求 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 、 $\tan \beta$ 。

Try It 5.4: 求 $\sin \frac{2\pi}{3}$ 、 $\cos \frac{5\pi}{4}$ 、 $\tan \frac{7\pi}{6}$ 的值。

Q&A

- 问: 为什么 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 要求 $x \neq 0$?

答: 分母不能为 0。 $x = 0$ 对应终边在 y 轴上, 即 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 此时正切不存在。

- 问: $\sin 2$ 中的 2 是什么意思?

答: 是 2 弧度, 约 114.6° , 在第二象限, 故 $\sin 2 > 0$ 。没有单位符号的数字都按弧度理解。

技术应用: 用 GeoGebra 画单位圆, 输入 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ 并拖动参数 t 。观察: 角度从 0 转到 2π 时, 交点绕圆一周, $\sin t$ (纵坐标) 先升后降, $\cos t$ (横坐标) 先减后增——三角函数值就是单位圆上点的运动轨迹。

想一想: $\sin \alpha$ 的最大值、最小值分别是多少? $\cos \alpha$ 呢? (提示: 单位圆上点的横纵坐标取值范围是什么?)

5.2.2 同角三角函数的基本关系

学习目标

- 掌握同角三角函数的基本关系式；
- 会利用基本关系求值、化简、证明。

前置复习： $\sin 30^\circ$ 、 $\cos 30^\circ$ 各是多少？它们满足什么关系？ $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ 等于多少？

情境引入：同一个角的“身份证号码”

同一个角 α ，它的 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 不是三个孤立的数。回顾定义： $P(x, y)$ 在单位圆上，所以 $x^2 + y^2 = 1$ ，即 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ；又 $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 。这两个关系就是同角三角函数的“血缘纽带”——知道 $\sin \alpha$ ，就能推出 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 。

同角三角函数的基本关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

How To：已知一个三角函数值，求其余两个

- 用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求出另一个“平方函数值”；
- 用角所在象限**确定符号**（开方后取正还是取负）；
- 用 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 求正切。

例题 5.4

（同角关系求值）

已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，且 α 是第四象限角，求 $\sin \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 的值。

解：由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，得 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ 。 α 在第四象限，正弦为负，故 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ 。 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ 。

Try It 5.5：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，且 α 是第二象限角，求 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。

Try It 5.6：已知 $\tan \alpha = 3$ ，求 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ 的值。

Q&A

- **问：** $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 为什么叫“勾股关系”？

答：单位圆上 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 就是点 P 的坐标，勾股定理给出 $x^2 + y^2 = r^2$ ，而 $r = 1$ ，故 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ——它就是单位圆上的勾股定理。

- 问：已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 能求出 $\cos \alpha$ 吗？

答：能求出两个候选值 $\pm \frac{4}{5}$ ，但**必须知道象限才能确定符号**。题目不给象限，答案就要写“ $\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$ ”。

学习提示：同角关系的两大用法——**求值**（知一求二，先平方关系再定符号）和**化简**（遇 $\frac{\sin + \cos}{\sin - \cos}$ 除以 $\cos$ 化成 $\tan$ ）。口诀：“平方关系定大小，象限关系定符号，比值关系求正切。”

练一练：化简 $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha$ 。（提示： $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1$ ）

本节练习（答案见章末）

- 已知角 α 的终边经过点 $P(8, -6)$ ，求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。
- 求值： $\sin \frac{3\pi}{4}$ 、 $\cos \frac{5\pi}{3}$ 、 $\tan \frac{5\pi}{4}$ 。
- 判断 $\sin 250^\circ$ 、 $\cos 940^\circ$ 、 $\tan(-120^\circ)$ 的符号。
- 已知 $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ，且 α 是第四象限角，求 $\cos \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 。
- 已知 $\tan \alpha = 2$ ，求 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值。

5.3 诱导公式：转半圈、翻个面，大角变小角

390° 长得吓人，可你仔细一看——它跟 30° 终点一模一样，函数值当然一样。再琢磨： 150° 、 210° 、 -30° 的终边，分别是 30° 的终边关于 y 轴、原点、 x 轴对称翻出来的。“**翻个面，坐标要么不变、要么变号**”——把这几条规律写成公式，就是**诱导公式**：一套专治“大角、怪角”的降维武器。这一节学会它，再大的角到你手里都能“扳”回熟悉的锐角。

学习目标

- 理解诱导公式的推导思路（单位圆的对称性）；
- 会运用诱导公式把任意角的三角函数化为锐角三角函数求值。

前置复习： 30° 、 150° 、 210° 、 330° 的终边与单位圆交点的纵坐标各是多少？它们与 $\sin 30^\circ$ 有什么关系？

诱导公式（二）~（六）

公式	内容
公式一 (周期)	$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$
公式二	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式三	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
公式四	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
公式五	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
公式六	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

How To: 用诱导公式求任意角的三角函数值

- 用公式一 (去整圈): 把角化到 $0 \sim 2\pi$ 内;
- 用公式二 ~ 四: 把 $\pi \pm \alpha$ 、 $-\alpha$ 型化为锐角 α 的三角函数;
- 用公式五、六: 处理 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 型 (变名)。

例题 5.5

(用诱导公式求值)

求下列各式的值:

(1) $\sin 210^\circ$; (2) $\cos 120^\circ$; (3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; (4) $\sin \frac{7\pi}{6}$ 。

解: (1) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ 。 (2) $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ 。 (3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ 。 (4) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。

Try It 5.7: 求 $\sin 150^\circ$ 、 $\cos 240^\circ$ 、 $\tan(-45^\circ)$ 、 $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值。

Try It 5.8: 化简 $\sin(-\alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ 。

Q&A

- **问:** “符号看象限”里 α 真的必须是锐角吗?

答: 不必。这只是**记忆技巧**——把 α 假想成锐角来确定右边符号。公式本身对任意角都成立 (比如 $\alpha = 200^\circ$ 时代入也正确)。

- **问:** 诱导公式本质是什么?

答: 本质是**单位圆的对称性**: 终边关于坐标轴、原点、直线 $y = x$ 对称的点, 其坐标有确定的关系。公式一 ~ 四来自 “关于原点/ x 轴/ y 轴对称”, 公式五、六来自 “关于直线 $y = x$ 对称”。

探究活动: 用纸片做一次 “翻折实验”。画单位圆, 标出 30° 角的终边点 P 。(1) 把纸沿 y 轴对折—— P 到了哪个角的位置? 坐标怎么变? (2) 沿 x 轴对折呢? (3) 先沿 y 轴再沿直线 $y = x$

呢？每做一次翻折，就“发现”一条诱导公式。纸上得来终觉浅，动手折一次，公式刻进肌肉记忆。

想一想： $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ 等于什么？（提示： $\frac{3\pi}{2}$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，变名；再判断 $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ 所在象限）

本节练习（答案见章末）

- 求值： $\sin 300^\circ$ 、 $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ 、 $\tan \frac{4\pi}{3}$ 。
- 化简： $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\tan(\pi + \alpha)}$ 。
- 求 $\cos 1110^\circ$ 的值。
- 已知 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ，且 α 为第二象限角，求 $\sin(\pi + \alpha)$ 与 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ 的值。

5.4 三角函数的图象与性质：摸清波浪的脾气

你做过心电图、看过股市行情图，那些“上上下下、没完没了”的线，都长着一张正弦脸。可光会说“好像波浪”没用，你得**摸清它的脾气**：多高（值域）、多快（周期）、几点见顶、几点见底（单调性），以及它是不是个“对称控”（奇偶性）。这一节我们把波浪画下来、量一遍，连那个“不是波浪、是台阶”的正切，也一并收编。

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象与性质

学习目标

- 会用“五点法”画正弦、余弦函数的图象；
- 掌握正弦、余弦函数的周期性、奇偶性、单调性、最值。

前置复习：函数 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上，哪些点最特殊？（提示：最大值、最小值、零点）

情境引入：把单位圆“展开”成曲线

让一个点在单位圆上匀速转动，把它的纵坐标（sin 值）随时间记录下来——**上下起伏、周而复始**，这就是正弦曲线。它的形状像什么？像海面的波浪、像弹簧的振动记录。这条曲线是三角函数最直观的名片。

正弦函数、余弦函数的图象（正弦曲线、余弦曲线）

函数	图象特征
$y = \sin x$	波浪形，过原点，最高 1、最低 -1，关于原点对称
$y = \cos x$	与正弦曲线形状相同，整体右移 $\frac{\pi}{2}$ ，关于 y 轴对称

五点法：画 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象，只需描出五个关键点：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

把五点连成光滑曲线，就是正弦曲线的一个“周期”。余弦曲线同理（五点： $(0, 1)$ 、 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 、 $(\pi, -1)$ 、 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 、 $(2\pi, 1)$ ）。

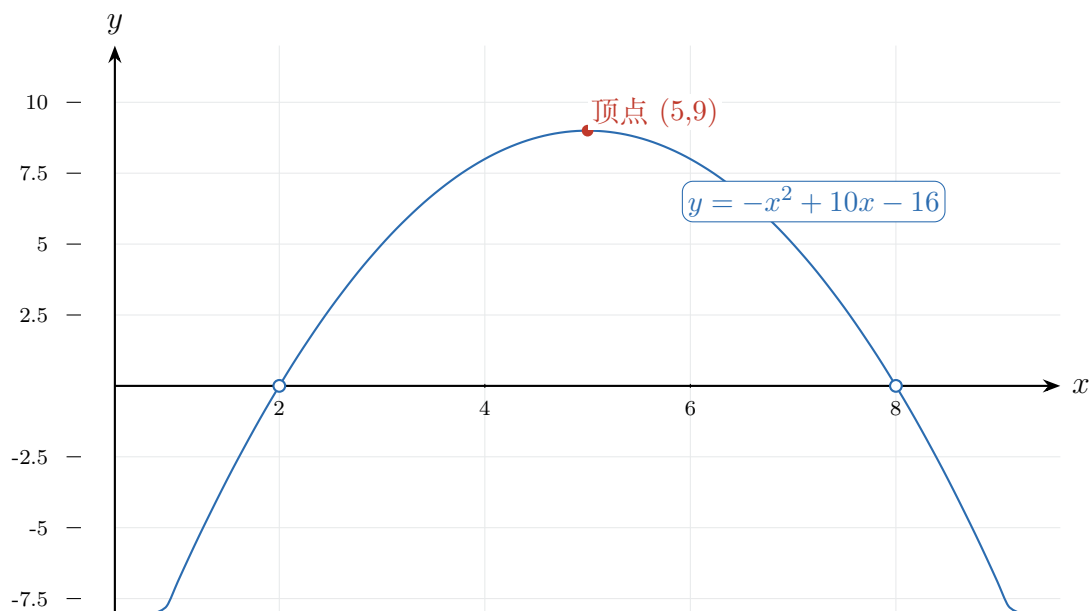


图 5.2: 五点法作正弦曲线 $y = \sin x$: 在 $[0, 2\pi]$ 上取 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 五个关键点连成光滑曲线

周期函数与最小正周期

对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得对定义域内的每一个 x ，都有 $f(x+T) = f(x)$ ，那么 $f(x)$ 叫做**周期函数**， T 叫做这个函数的**周期**。正弦、余弦函数的最小正周期都是 2π 。

正弦、余弦函数的性质

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
最小正周期	2π	2π
奇偶性	奇函数（关于原点对称）	偶函数（关于 y 轴对称）
最大值	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时取 1	$x = 2k\pi$ 时取 1
最小值	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时取 -1	$x = \pi + 2k\pi$ 时取 -1
单调递增区间	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$	$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$
单调递减区间	$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$	$[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

How To: 五点法画图

- 列表：找 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 五点的函数值；
- 描点：在坐标系中标出五个点；
- 连线：用光滑曲线连接，注意在最大最小值处“转弯”要平滑。

例题 5.6

(五点法画图与性质综合)

用五点法画出函数 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象，并回答：

(1) $y = \cos x$ 与 $y = \sin x$ 的图象有什么关系？(2) 求 $y = 2 + 3\cos x$ 的最大值、最小值。

解：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

描点连线。(1) 余弦曲线与正弦曲线形状完全相同，只是把正弦曲线沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 得到，即 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。(2) $\cos x$ 的最大值为 1，最小值为 -1。故 $y_{\max} = 2 + 3 \times 1 = 5$ (当 $x = 2k\pi$ 时取到)； $y_{\min} = 2 + 3 \times (-1) = -1$ (当 $x = \pi + 2k\pi$ 时取到)。

Try It 5.9: (1) 用五点法画出 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象，标出最大值、最小值点的坐标；(2) 求 $y = 1 - 2\sin x$ 的最大值、最小值。

Try It 5.10: (1) 求 $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期；(2) 求 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的单调递减区间。

Q&A

- 问：为什么说 $y = \sin x$ 是奇函数， $y = \cos x$ 是偶函数？

答： $\sin(-x) = -\sin x$ (诱导公式三)，奇； $\cos(-x) = \cos x$ ，偶。图象上：正弦曲线关于原点对称，余弦曲线关于 y 轴对称——这正是第 3 章学的奇偶性的图象特征。

- 问：求 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间有什么技巧？

答：把 $\omega x + \varphi$ 看作整体 t ，先写出 $\sin t$ 的单调区间 (关于 t 的不等式)，再解出 x 。注意 $\omega < 0$ 时不等号要变向。

技术应用：用 GeoGebra 输入 $y = \sin x$ ，再用“滑动条”把参数 a 从 0 拖到 2π ，构造点 $(a, \sin a)$ 并开启“跟踪轨迹”。拖动 a 时，点的轨迹“画”出一条正弦曲线——这就是单位圆展开成曲线的全过程。

练一练：判断：“ $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递增。”这句话对吗？(提示： $\frac{\pi}{2}$ 到 π 是从最大值开始往下走)

5.4.2 正切函数的图象与性质

学习目标

- 会画正切函数图象（正切曲线）；
- 掌握正切函数的定义域、周期性、奇偶性、单调性。

前置复习： $\tan 90^\circ$ 存在吗？为什么？（提示： $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ）

情境引入：不是波浪，是“阶梯”

正切函数的图象和正弦、余弦完全不同——它由一条条间隔 π 、穿过原点、无限攀升的曲线组成，像一道不断重复的“台阶”。因为 $\tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 处没有定义，图象在这些位置垂直断裂。

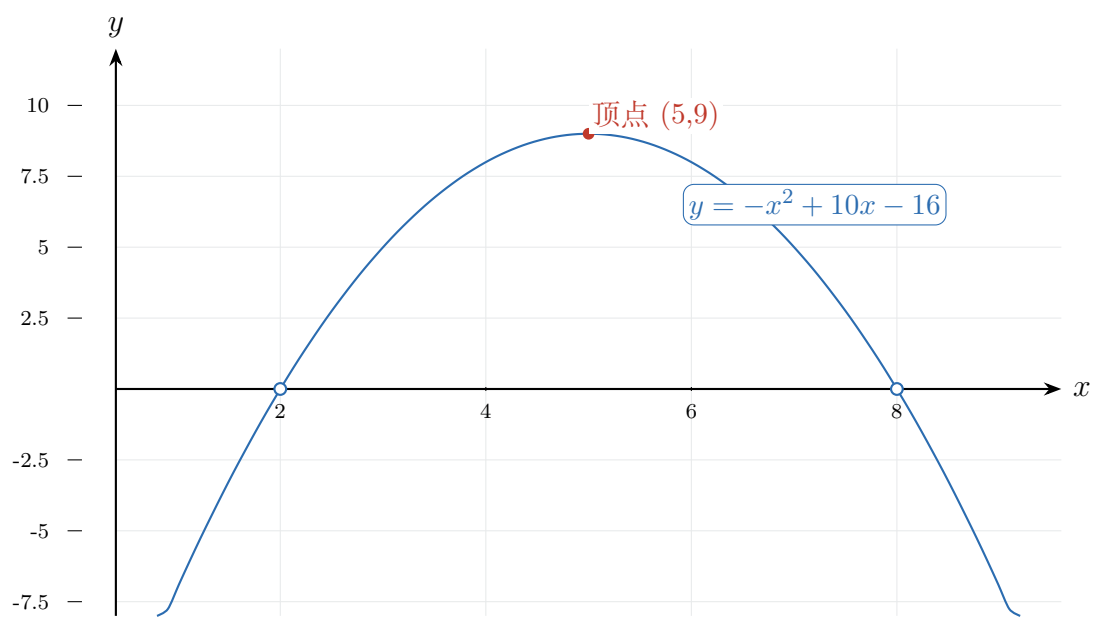


图 5.3: 正弦、余弦、正切函数的图象：正弦、余弦为周期 2π 的波浪，正切在 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 处有竖直渐近线

正切函数的图象与性质

内容	$y = \tan x$
定义域	$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
值域	$\mathbb{R}$
最小正周期	π
奇偶性	奇函数 ($\tan(-x) = -\tan x$)
单调性	在每一个区间 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 上单调递增
特殊点	过原点、过 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 、 $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$

例题 5.7

（正切函数的定义域与周期）

- （1）求函数 $y = \tan(2x)$ 的定义域与最小正周期；（2）比较 $\tan \frac{\pi}{5}$ 与 $\tan \frac{2\pi}{5}$ 的大小。

解: (1) 令 $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, 得 $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$; 最小正周期 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ 。(2) $\frac{\pi}{5}$ 、 $\frac{2\pi}{5}$ 都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 正切在该区间单调递增, $\frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5}$, 故 $\tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{2\pi}{5}$ 。

Try It 5.11: (1) 求 $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期; (2) 比较 $\tan 80^\circ$ 与 $\tan 120^\circ$ 的大小。

Q&A

- **问:** 为什么正切图象在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处“断掉”?

答: 因为 $\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$, 分母为 0, 无意义。从图象看, x 从左边逼近 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x$ 趋向正无穷; 从右边逼近时, 趋向负无穷——这就是“垂直渐近线”。

- **问:** 正切函数在整个 $\mathbb{R}$ 上单调递增吗?

答: 不是。它在每个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 上单调递增, 但跨过断裂点后函数值从“正无穷”跳到“负无穷”, 不能连起来说整个定义域上单调递增。

想一想: 借助正切曲线, 说明方程 $\tan x = 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上有多少个解? (提示: $y = 1$ 这条水平线与正切曲线在每个周期内相交几次?)

本节练习 (答案见章末)

- 求函数 $y = \sin 3x$ 与 $y = \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期。
- 求 $y = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调递增区间。
- 求函数 $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的定义域。
- 求函数 $y = -2\sin x + 3$ 的最大值与最小值, 并写出取最大值时 x 的取值集合。
- 比较大小: $\sin \frac{\pi}{7}$ 与 $\sin \frac{2\pi}{7}$; $\cos \frac{3\pi}{7}$ 与 $\cos \frac{5\pi}{7}$ 。
- 求函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间。(提示: 令 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, 先由 $x \in [0, \pi]$ 定出 t 的范围, 再套 $\sin t$ 的递增区间解出 x ——不要照抄 $\sin x$ 的原版区间)
- 已知 $\sin x = \frac{1}{2}$, 求 x 在 $[0, 2\pi]$ 上的所有解, 并写出它在 $\mathbb{R}$ 上的通解。(提示: $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上与直线 $y = \frac{1}{2}$ 相交几次?)
- 化简 $\frac{\sin x \cos x}{\cos x}$ 。有同学直接约分写成 $\sin x$, 这样做对吗? 写出正确的化简结果, 并指出这个函数的定义域与 $y = \tan x$ 的定义域有何关系。(提示: 约分前先问“分母 $\cos x$ 允许为 0 吗”)

5.5 三角恒等变换：75° 也能拆出来算

考试只给你背过 30°、45°、60° 的三角函数值，可卷子上偏偏冒出个 75°。别慌，75° = 45° + 30——**不是特殊角的角，拆成特殊角的组合再算**，这就是恒等变换的路子。但这里藏着一个大坑： $\sin(\alpha + \beta)$ **绝不是** $\sin \alpha + \sin \beta$ （不信你算算 $1.366 \neq 1$ ）。正确的“拆法”长什么样？这一节，我们把 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 的“拆家口诀”逐一收齐。

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

学习目标

- 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式；
- 会用公式求值、化简、证明。

前置复习： $\sin 30^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 各是多少？ $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ ，那么 $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ 是 1 吗？

情境引入：75° 的三角函数值从哪来？

75° 不是特殊角，但它可以写成 $45^\circ + 30^\circ$ 。如果能用 45°、30° 的三角函数值“拼”出 $\sin 75^\circ$ ，一切特殊角的组合就都能算了。注意： $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ （ $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \approx 0.5 + 0.866 = 1.366 \neq 1$ ）。正确的“拼法”需要下面这套公式。

两角和与差公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

例题 5.8

（两角和公式求值）

求 $\sin 75^\circ$ 与 $\cos 15^\circ$ 的值。

$$\begin{aligned}\text{解：}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}。 \\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}。 \end{aligned}$$

Try It 5.12：求 $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 105^\circ$ 的值。

Try It 5.13：已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ （第二象限）， $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ （第三象限），求 $\cos(\alpha - \beta)$ 。

Q&A

- 问： $\tan(\alpha + \beta)$ 公式有什么限制？

答：要求 α 、 β 、 $\alpha + \beta$ 都不等于 $\frac{\pi}{2} + k\pi$ （正切定义域）。当 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 时公式分母为 0，正切不存在。

- 问：两角和公式怎么记最牢？

答：先记正弦“正余余正”($\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$) 和余弦“余余正正”($\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)，其他都从这两个变形。正切用 $\frac{\sin}{\cos}$ 相除得到。

数学视野：两角和公式可以追溯到托勒密（公元 2 世纪）的弦表，而真正把它写成一般公式的是阿拉伯数学家阿布·瓦法。**这套公式是三角函数这座大厦的承重墙**——后面的二倍角、半角、积化和差，全部由它推导而来。

练一练：利用公式计算 $\tan 15^\circ$ 。（提示： $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ ，或先算 $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 15^\circ$ 再相除）

5.5.2 二倍角公式

学习目标

- 掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；
- 会用二倍角公式求值、化简。

前置复习：在两角和公式中令 $\beta = \alpha$ ， $\sin(\alpha + \alpha)$ 会变成什么？

情境引入：让公式“自己发现”二倍角

把两角和公式中的 β 换成 α ： $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ 。看，二倍角公式不用背，用两角和公式代一代就出来。

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

How To：用二倍角公式求值

- 看清已知的是 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 还是 $\tan \alpha$ ；
- 已知 $\sin \alpha$ 求 $\sin 2\alpha$ ：先求 $\cos \alpha$ （注意象限定符号），再用 $2 \sin \alpha \cos \alpha$ ；
- 已知 $\sin \alpha$ 求 $\cos 2\alpha$ ：直接用 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ，不用求 $\cos \alpha$ 。

例题 5.9

(二倍角公式求值)

已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, α 为第一象限角, 求 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 、 $\tan 2\alpha$ 。

解: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ (第一象限取正)。 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$;
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$; $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$ 。

Try It 5.14: 已知 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 为第二象限角, 求 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 。

Try It 5.15: 化简 $\frac{\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ 。(提示: $\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$)

学习提示: 二倍角公式要能正用(求值)、反用(化简, 如 $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$)、变形用(如 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$)。同一个公式三个方向, 三角恒等变换的灵活就来自这里。

想一想: 用二倍角公式推导 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ 和 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ 。(提示: 从 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ 和 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ 各解出 $\cos^2 \alpha$ 、 $\sin^2 \alpha$)

本节练习 (答案见章末)

- 求值: $\tan 75^\circ$ 、 $\cos 75^\circ$ 。
- 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (α 为第二象限角), $\cos \beta = \frac{5}{13}$ (β 为第四象限角), 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 。
- 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\tan 2\alpha$ 的值。
- 把 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 化成 $y = A \sin(x + \varphi)$ 的形式, 并求其最大值。
- 证明恒等式: $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ 。

5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$: 三个旋钮, 一条波浪

一台音响摆在面前, 上面有三个旋钮: 音量、音调、相位。你有没有想过, 正弦曲线其实也长着同样的三个旋钮? A 管高矮(音量), ω 管快慢(音调), φ 管起跑线(什么时候开始响)。这一节, 我们把 $y = \sin x$ 这根“标准波浪”交给三个旋钮摆弄, 看它是怎么被拧成 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的——学会拧旋钮, 你就掌握了给波浪“整容”的本事。

学习目标

- 理解参数 A 、 ω 、 φ 对图象的影响;
- 掌握 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的振幅、周期、频率、相位;
- 会用五点法画 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

前置复习： $y = \sin x$ 的周期、值域各是什么？若把 $\sin x$ 前面乘以 3，图象和值域怎么变？

相关概念

- **振幅：** $|A|$ （函数值波动的最大偏离）；
- **周期：** $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ；
- **频率：** $f = \frac{1}{T} = \frac{|\omega|}{2\pi}$ （每秒完成的周期数）；
- **相位：** $\omega x + \varphi$ ；**初相：** $x = 0$ 时的相位 φ 。

图象变换：从 $y = \sin x$ 到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

- **相位变换：** $y = \sin(x + \varphi)$ ——向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位；
- **周期变换：** $y = \sin(\omega x)$ ——横坐标缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ；
- **振幅变换：** $y = A \sin x$ ——纵坐标伸长 ($|A| > 1$) 或缩短 ($|A| < 1$) 为原来的 $|A|$ 倍。

How To：用五点法画 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

- 令 $\omega x + \varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ，解出五个 x 值；
- 对应的五个函数值依次为 $0, A, 0, -A, 0$ ；
- 描点连线，得到一个周期的图象。

例题 5.10

(五点法画图与性质)

已知函数 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。

(1) 求振幅、最小正周期、初相；(2) 用五点法画出一个周期的图象的草图。

解：(1) 振幅 $A = 2$ ；周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ ；初相 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ 。(2) 令 $3x - \frac{\pi}{4} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ，解得 $x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$ 。

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
$3x - \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0

描点连线，得到振幅为 2、周期 $\frac{2\pi}{3}$ 的波浪。

Try It 5.16: 已知函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，求振幅、周期、初相，并用五点法画出草图。

Try It 5.17: 函数 $y = A \sin(\omega x)$ ($A > 0, \omega > 0$) 图象过点 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ 且最小正周期为 π ，求 A, ω 。

技术应用: 用 GeoGebra 构造三个滑动条 A, ω, φ ，输入 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 并拖动。观察：拖 A 图象上下伸缩；拖 ω 图象水平压缩拉伸；拖 φ 图象左右平移。三个旋钮各管一件事，亲自拖一次，胜过读十遍定义。

想一想: 要得到 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，可以从 $y = \sin x$ 出发按哪些步骤变换？顺序可以交换吗？（提示：先平移再伸缩，和先伸缩再平移，平移量不同）

本节练习（答案见章末）

- 求函数 $y = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的振幅、最小正周期与初相。
- 描述从 $y = \sin x$ 的图象经过怎样的变换得到 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（写出一种变换路径）。
- 函数 $y = A \sin(\omega x)$ ($A > 0, \omega > 0$) 在一个周期内的最高点为 $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ ，求 A, ω 及最小正周期。
- 某音叉振动时，其位移 y （米）与时间 t （秒）满足 $y = 0.002 \sin(880\pi t)$ 。求振幅、周期与频率。
- 函数 $y = 2 \sin(2x + \varphi)$ 的图象经过点 $(0, 1)$ ，求 φ 的一个值。

5.7 三角函数的应用：给世界的心跳做记录

你手腕上的脉搏、海边的潮位、电网里的电流——它们的心跳都被同一条数学曲线记录着。现实里没有谁会长得跟教科书一样标准，真实数据会东偏西歪，但三角函数模型能帮你从“乱糟糟的数据”里拎出振幅、周期和相位，写出一条能预测未来的式子： $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 。学完这一节，给你一叠水位记录，你就能告诉船长：今天几点船能进港。

学习目标

- 会用三角函数模型 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 刻画周期现象；
- 能建立简单的实际模型（简谐运动、摩天轮、潮汐）并求解。

前置复习: $y = \sin x$ 的最大值、最小值、周期各是多少？加上一个常数 b : $y = \sin x + 2$ 的最大值、最小值变成什么？

三角函数模型的建立步骤

- **读数据**：从问题中找到最大值 M 、最小值 m 、周期 T ；
- **定参数**：振幅 $A = \frac{M-m}{2}$ ，基线 $b = \frac{M+m}{2}$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ；
- **定相位**：代入一个已知点（如起点）求 φ ——相位是“起跑线”，起跑位置不同，整条波浪就整体错位；
- **写模型**： $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ ，并标注实际定义域。

例题 5.11

（摩天轮模型）

某摩天轮的直径为 90 米，轮心离地面 50 米。轿厢从最低点出发，每 10 分钟转一圈。设时间为 t （分钟），轿厢离地高度为 $h(t)$ 。

（1）求 $h(t)$ 的函数解析式；（2）轿厢离地高度的最大值、最小值各是多少？

解：（1）半径 $r = \frac{90}{2} = 45$ 米，振幅 $A = 45$ ；轮心离地 50 米，基线 $b = 50$ ；转一圈 10 分钟，周期 $T = 10$ ， $\omega = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ 。轿厢从**最低点**出发： $h(0) = 50 - 45 = 5$ 。设 $h(t) = 50 + 45 \sin\left(\frac{\pi}{5}t + \varphi\right)$ ，代入 $t = 0$ ： $50 + 45 \sin \varphi = 5$ ，得 $\sin \varphi = -1$ ， $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 。故 $h(t) = 50 + 45 \sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) = 50 - 45 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ 。（2）最大值 $= 50 + 45 = 95$ 米（轿厢转到最高点），最小值 $= 50 - 45 = 5$ 米（最低点）。

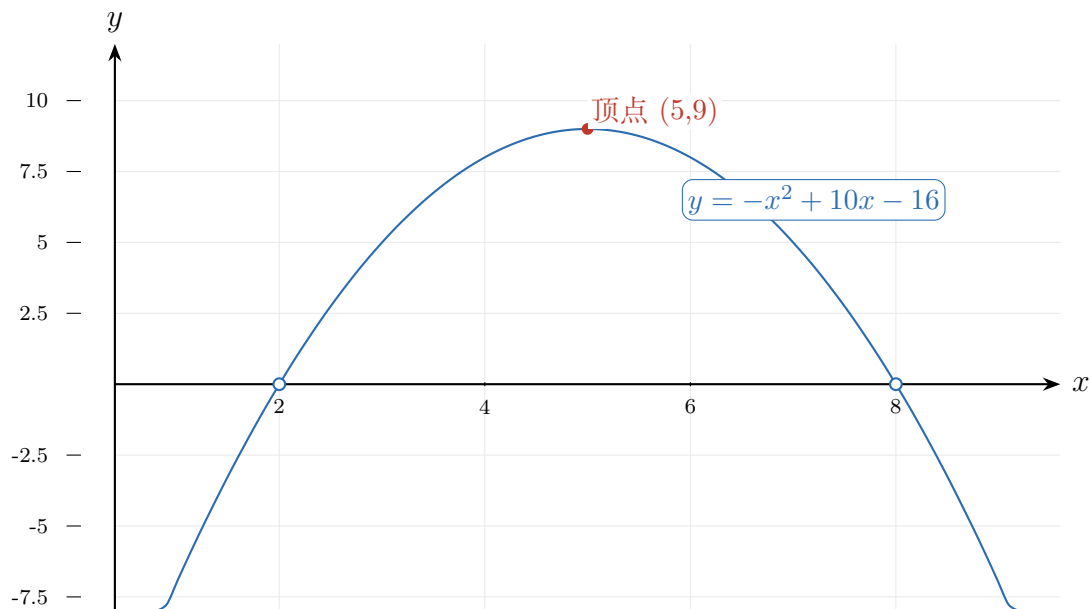


图 5.4: 摩天轮轿厢高度的变化曲线： $h(t) = 15 + 15 \sin(\pi t/10)$ 在最高点 30 与最低点 0 之间周期波动（简化示意）

Try It 5.18：上题中，轿厢经过多少分钟第一次到达离地 95 米？（提示：解 $h(t) = 95$ ）

例题 5.12

(简谐运动模型)

弹簧振子做简谐运动，位移 x (厘米) 与时间 t (秒) 的关系为 $x = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(1) 求振幅、周期、频率；(2) 求 $t = 0$ 时的位移。

解：(1) 振幅 $A = 8$ 厘米；周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 秒；频率 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$ 赫兹 (每秒 $\frac{1}{4}$ 次)。(2)

$$x(0) = 8 \sin \frac{\pi}{6} = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ 厘米。}$$

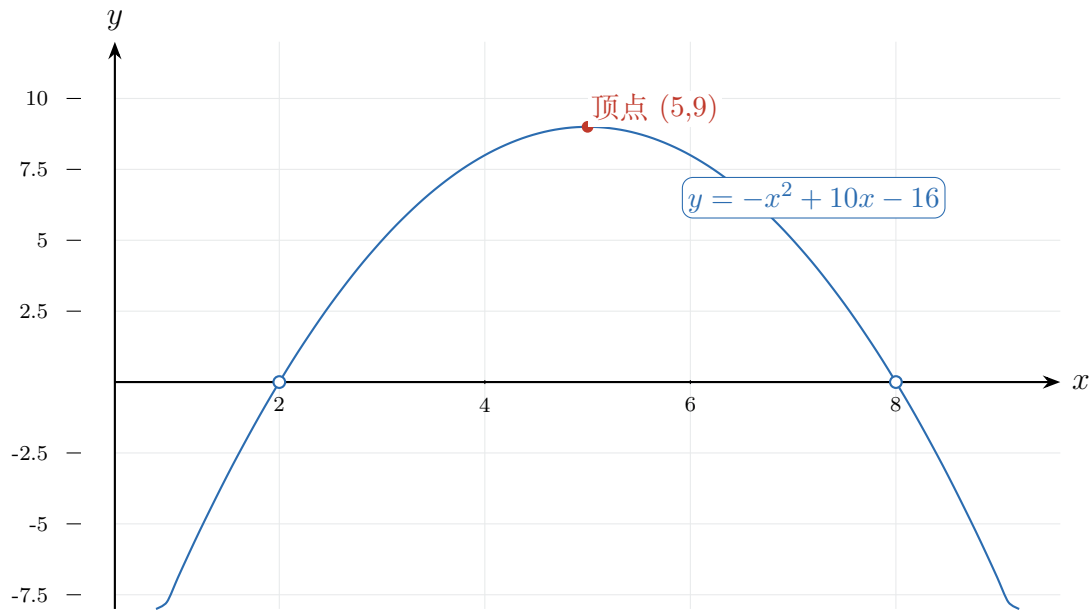


图 5.5: 弹簧振子的位移曲线: $x(t) = 8 \sin(\pi t/2)$ 在 $+8$ 与 -8 之间往复, 周期 4 秒

Try It 5.19: 某交流电的电压 u (伏) 随时间 t (秒) 变化: $u = 311 \sin(100\pi t)$ 。求电压的最大值、周期和频率。

项目学习 (小组任务): 制作一份“城市脉搏”报告。任务: (1) 选择一种你身边的周期现象 (海水潮位、日出日落时间、昼夜温差、自己的心率) 收集至少两个周期的数据; (2) 用三角函数模型 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 拟合数据, 确定参数; (3) 用模型预测下一个周期的变化并验证; (4) 写报告: 数据表、拟合曲线图、参数说明、预测与误差分析。真实数据不会完美落在正弦曲线上, 误差分析就是模型改进的起点。

想一想 (真实情境): 某地港口水深 (米) 与时间 (小时) 近似满足 $y = 4 + 3 \sin \frac{\pi}{6}t$ ($t = 0$ 为当日 0 点)。一艘吃水深度为 5.5 米的货船想进港, 水深至少 6 米才能安全通过。请判断: 它在 $t = 3$ 时能否进港? 一天中有几个时段可以进港? (提示: $y(3) = 4 + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 7 > 6$, 可以进港; 解 $4 + 3 \sin \frac{\pi}{6}t \geq 6$ 得 $\sin \frac{\pi}{6}t \geq \frac{2}{3}$)

练一练: 把 $y = \sin x + \cos x$ 化成 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 并求最大值与周期。(提示: $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$)

本节练习 (答案见章末)

- 某海港的水深 y (米) 与时间 t (小时) 近似满足 $y = 6 + 2\sin\frac{\pi}{6}t$ 。求最大水深、最小水深与水位变化的周期。
- 某摩天轮的直径为 60 米, 轮心离地面 35 米, 轿厢从最低点出发, 每 8 分钟转一圈。写出轿厢离地高度 $h(t)$ (米) 关于时间 t (分钟) 的函数, 并求轿厢离地的最大、最小高度。
- 我国生活用电的电压 $u = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ (伏)。求电压的最大值、周期与频率; 并求 $t = \frac{1}{600}$ 秒时的电压值。
- 承第 2 题: 求 $t = 2$ 分钟时轿厢离地的高度。
- 承第 2 题: 轿厢第一次到达离地 50 米时, 经过了多长时间?

本章回顾

概念地图

· 三角函数 (圆的语言) · 角度与弧度: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$; $l = \alpha r$; $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ · 定义 (单位圆): $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\tan\alpha = y/x$ · 符号: 一全正、二正弦、三正切、四余弦 · 同角关系: $\sin^2 + \cos^2 = 1$; $\tan = \sin/\cos$ · 诱导公式: 奇变偶不变, 符号看象限 · 图象与性质 · 正弦 $y = \sin x$: 周期 2π , 奇, $[-1, 1]$ · 余弦 $y = \cos x$: 周期 2π , 偶, $[-1, 1]$ · 正切 $y = \tan x$: 周期 π , 奇, 间断点 $\pi/2 + k\pi$ · 恒等变换 · 两角和差: $\sin(\alpha \pm \beta)$ 、 $\cos(\alpha \pm \beta)$ 、 $\tan(\alpha \pm \beta)$ · 二倍角: $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 、 $\tan 2\alpha$ · $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ · A 振幅, $T = 2\pi/\omega$ 周期, φ 初相 · 变换: 平移 $\rightarrow$ 伸缩 $\rightarrow$ 振幅 · 应用: 简谐运动、摩天轮、潮汐、交流电

关键公式速查

内容	公式
角度互化	$180^\circ = \pi \text{ rad}; 1^\circ = \frac{\pi}{180}, 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$
弧长与面积	$l = \alpha r; S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\alpha r^2$
同角关系	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
诱导公式	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
正弦周期	$T = \frac{2\pi}{\omega};$ 正切周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$
正弦最值	$y_{\max} = 1, y_{\min} = -1; \sin x = 1 \text{ 时 } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
两角和	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
两角差余弦	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
二倍角	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
$y = A \sin(\omega x + \varphi)$	振幅 $ A $, 周期 $\frac{2\pi}{ \omega }$, 频率 $\frac{ \omega }{2\pi}$

分层练习

A 基础层

- 把 150° 化成弧度; 把 $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ 化成角度。

- 求值: $\sin \frac{\pi}{6}$ 、 $\cos \frac{\pi}{3}$ 、 $\tan \frac{\pi}{4}$ 。
- 判断 $\sin 200^\circ$ 、 $\cos 120^\circ$ 、 $\tan 225^\circ$ 的符号。
- 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, α 为第二象限角, 求 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。
- 求 $y = \cos(2x)$ 的最小正周期和最大值、最小值。
- 求值: $\sin 150^\circ$ 、 $\cos 240^\circ$ 、 $\tan(-60^\circ)$ 。
- 用五点法画出 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象, 标出五个关键点。
- 求 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的振幅、周期、初相。

B 应用层

- 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值。
- 化简 $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 计算 $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$ 。
- 已知 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, α 为第一象限角, 求 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 。
- 某弹簧振子的位移 $x = 6 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ (厘米, t 为秒)。求振幅、周期, 以及 $t = 2$ 秒时的位移。

C 拓展层

- 证明恒等式: $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ 。(提示: 左边用二倍角公式展开, 右边分子分母同乘 $\cos \alpha + \sin \alpha$)
- 已知 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 且 $0 < x < \pi$, 求 $\sin x \cos x$ 与 $\sin x - \cos x$ 的值。(提示: 两边平方; 由 $\sin x \cos x < 0$ 判断 $\sin x - \cos x$ 的符号)

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- **5.1:** (1) $\{\beta \mid \beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 。(2) $-210^\circ = -360^\circ + 150^\circ$, 第二象限; $960^\circ = 2 \times 360^\circ + 240^\circ$, 第三象限。
- **5.2:** (1) $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$ 。(2) $l = \frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3} \approx 1.05$ 。
- **5.3:** $r = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$; $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, $\tan \beta = -\frac{12}{5}$ 。
- **5.4:** $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

- **5.5:** $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ (第二象限余弦为负), $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ 。
- **5.6:** 分子分母同除以 $\cos \alpha$: $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$ 。
- **5.7:** $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan(-45^\circ) = -1$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 。
- **5.8:** $\sin(-\alpha) \cos(\pi + \alpha) \tan(\pi - \alpha) = (-\sin \alpha)(-\cos \alpha)(-\tan \alpha) = -\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sin^2 \alpha$ 。
- **5.9:** (1) 五个关键点 $(0, 0)$ 、 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 、 $(\pi, 0)$ 、 $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ 、 $(2\pi, 0)$; 最大值点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, 最小值点 $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ 。(2) $\sin x \in [-1, 1]$, $y_{\max} = 1 - 2 \times (-1) = 3$, $y_{\min} = 1 - 2 \times 1 = -1$ 。
- **5.10:** (1) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ 。(2) 余弦在 $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ 递减, 取 $k = 0$: $[0, \pi]$ 。
- **5.11:** (1) $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ 。(2) $\tan 80^\circ > 0$, $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ < 0$, 故 $\tan 80^\circ > \tan 120^\circ$ 。
- **5.12:** $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ 。
- **5.13:** $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \beta = -\frac{5}{13}$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$ 。
- **5.14:** $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (第二象限正弦为正); $\sin 2\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = 2 \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$ 。
- **5.15:** $\frac{\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2 \sin 20^\circ$ 。
- **5.16:** 振幅 3, 周期 $T = \pi$, 初相 $\frac{\pi}{3}$ 。五点: $2x + \frac{\pi}{3} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$, 对应 $y = 0, 3, 0, -3, 0$ 。
- **5.17:** 周期 $\pi \rightarrow \omega = 2$; 代入 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$: $A \sin \frac{\pi}{3} = 2$, $A \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$, $A = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。
- **5.18:** $h(t) = 95$: $50 - 45 \cos \frac{\pi}{5}t = 95$, $\cos \frac{\pi}{5}t = -1$, $\frac{\pi}{5}t = \pi$, $t = 5$ 分钟。
- **5.19:** 最大值 311 伏; $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$ 秒; 频率 $f = 50$ 赫兹。

- **5.1 节**: 1. $\{\beta \mid \beta = -150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$; $-150^\circ = -360^\circ + 210^\circ$, 第三象限; $780^\circ = 2 \times 360^\circ + 60^\circ$, 第一象限。2. $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6} = 330^\circ$ 。3. $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, $l = \alpha r = \frac{2\pi}{3} \times 3 = 2\pi$; $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 3 = 3\pi$ 。4. 分针 20 分钟转 $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, $l = \frac{2\pi}{3} \times 10 = \frac{20\pi}{3} \approx 20.9 \text{ cm}$ 。
- **5.2 节**: 1. $r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ 。2. $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$ 。3. 250° 第三象限 $\rightarrow \sin 250^\circ < 0$; $940^\circ = 2 \times 360^\circ + 220^\circ$ 第三象限 $\rightarrow \cos 940^\circ < 0$; -120° 第三象限 $\rightarrow \tan(-120^\circ) > 0$ 。4. $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, 第四象限余弦为正 $\rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$; $\tan \alpha = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ 。5. 分子分母同除以 $\cos \alpha$: $\frac{\tan \alpha + 1}{2 \tan \alpha - 1} = \frac{2 + 1}{4 - 1} = 1$ 。
- **5.3 节**: 1. $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 。2. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$, 原式 $= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\tan \alpha} = \cos^2 \alpha$ 。3. $1110^\circ = 3 \times 360^\circ + 30^\circ$, $\cos 1110^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。4. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{12}{13}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{12}{13}$ 。
- **5.4 节**: 1. $\sin 3x: T = \frac{2\pi}{3}$; $\cos \frac{x}{3}: T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ 。2. 正弦的递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, 取 $k = 0$, 在 $[-\pi, \pi]$ 内为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。3. $3x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$)。4. $\sin x \in [-1, 1]$, $y_{\max} = -2 \times (-1) + 3 = 5$ ($\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$), $y_{\min} = -2 \times 1 + 3 = 1$ 。5. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 正弦在该区间递增 $\rightarrow \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7}$; $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 递减, $\frac{3\pi}{7} < \frac{5\pi}{7} \rightarrow \cos \frac{3\pi}{7} > \cos \frac{5\pi}{7}$ 。6. 令 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, 由 $x \in [0, \pi]$ 得 $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 。 $\sin t$ 的递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 。与 t 的范围相交: $k = 0$ 时 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $k = 1$ 时 $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 。反解 x : $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{11\pi}{12} \leq x \leq \pi$ 。故单调递增区间为 $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$ 。7. 直线 $y = \frac{1}{2}$ 与 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上相交两次: $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{5\pi}{6}$ 。通解为 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ——只写一个解, 就漏掉了另一半。8. 不对。原函数的分母 $\cos x$ 不能为 0, 即 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; 化简得 $\sin x$, 但定义域保持为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ ——它恰与 $y = \tan x$ 的定义域相同。若直接写成 “ $\sin x$ 且 $x \in \mathbb{R}$ ”, 就把 $\cos x \neq 0$ 这一约束丢了。
- **5.5 节**: 1. $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$; $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 。2. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta = -\frac{12}{13}$; $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) =$

$$\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}. \quad 3. \tan 2\alpha = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}. \quad 4. y = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right), \text{ 最大值 } 2. \quad 5. \text{ 右边 } = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha = \text{左边} \checkmark.$$

- **5.6 节:** 1. 振幅 $A = 4$; 周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; 初相 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 2. 先向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 得 $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$, 再把横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 得 $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ (也可先缩横坐标为 $\frac{1}{2}$ 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$). 3. 最高点纵坐标 $3 \rightarrow A = 3$; $\omega \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega = 2$, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 4. 振幅 0.002 米; $T = \frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}$ 秒; 频率 $f = 440$ Hz. 5. $2 \sin \varphi = 1 \rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2}$, 取 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- **5.7 节:** 1. $y_{\max} = 6 + 2 = 8$ 米, $y_{\min} = 6 - 2 = 4$ 米, 周期 $T = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ 小时. 2. 半径 30, 振幅 $A = 30$, 基线 $b = 35$, $\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, 最低点出发: $h(t) = 35 - 30 \cos \frac{\pi}{4}t$; 最大高度 65 米, 最小高度 5 米. 3. 最大值 $220\sqrt{2} \approx 311$ 伏; $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$ 秒; 频率 50 Hz; $t = \frac{1}{600}$ 秒时 $u = 220\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} = 110\sqrt{2} \approx 155.6$ 伏. 4. $h(2) = 35 - 30 \cos \frac{\pi}{2} = 35$ 米. 5. 令 $35 - 30 \cos \frac{\pi}{4}t = 50$, 得 $\cos \frac{\pi}{4}t = -\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{4}t = \frac{2\pi}{3}$, $t = \frac{8}{3} \approx 2.67$ 分钟.

A 基础层答案

A1: $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$.

A2: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

A3: 200° 第三象限, $\sin 200^\circ < 0$; 120° 第二象限, $\cos 120^\circ < 0$; 225° 第三象限, $\tan 225^\circ > 0$ (且 $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$).

A4: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$; $\tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

A5: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$.

A6: $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$.

A7: 五个关键点 $(0, 0)$ 、 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 、 $(\pi, 0)$ 、 $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ 、 $(2\pi, 0)$, 连成光滑曲线.

A8: 振幅 3, 周期 $T = 2\pi$, 初相 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

B 应用层答案

B9: 分子分母同除以 $\cos \alpha$: $\frac{\tan \alpha + 2}{\tan \alpha - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$.

B10: $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$; $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B11: $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; $\sin 2\alpha = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{5}{13} \right)^2 = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$.

B12: 振幅 6 厘米; 周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ 秒; $x(2) = 6 \sin \frac{2\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 厘米。

C 拓展层答案

C13: 左边 $= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \text{右边} \checkmark$ 。

C14: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{25}$, 故 $\sin x \cos x = \frac{\frac{1}{25} - 1}{2} = -\frac{12}{25}$ 。由 $0 < x < \pi$ 且 $\sin x \cos x < 0$ 知 $\cos x < 0$, x 在第二象限, 故 $\sin x - \cos x > 0$, $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$, $\sin x - \cos x = \frac{7}{5}$ 。

第六章 规律怎么一步步长出来：数列

章首情境

6.1 数列的概念：从“一堆数”到“一系列数”

6.1.1 数列的概念与通项公式

学习目标

- 能说出数列的定义，能区分“有序的数列”与“无序的集合”；
- 能写出数列的通项公式，并能用通项公式求任意一项；
- 能判断某个数是否为给定数列的项。

前置复习 (Be Prepared)

- 函数 $y = x^2$ 的自变量如果只取正整数 $1, 2, 3, \dots$ ，对应的函数值依次是什么？
- 当 n 取正整数时， $2n$ 、 $2n - 1$ 、 n^2 各对应哪些数？
- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 与 $\{3, 1, 5\}$ 相等吗？为什么？

情境引入：折纸堆叠（呼应章首）

把一张纸对折 1 次，得到 2 层；对折 2 次，4 层；对折 3 次，8 层……“层数”按对折次数依次排开：

2, 4, 8, 16, ...

想一想：第 6 次对折后有多少层？能否写出一个公式，直接“算出”任意一次对折后的层数，而不必一层层往下数？

数列的概念

一般地，我们把按**确定顺序**排成的一系列数叫做**数列**。数列中的每一个数叫做这个数列的**项**，数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项, $n \in \mathbb{N}^*$ 。数列 $\{a_n\}$ 可以看作定义在正整数集 (或其有限子集) 上的函数, $a_n = f(n)$ 。

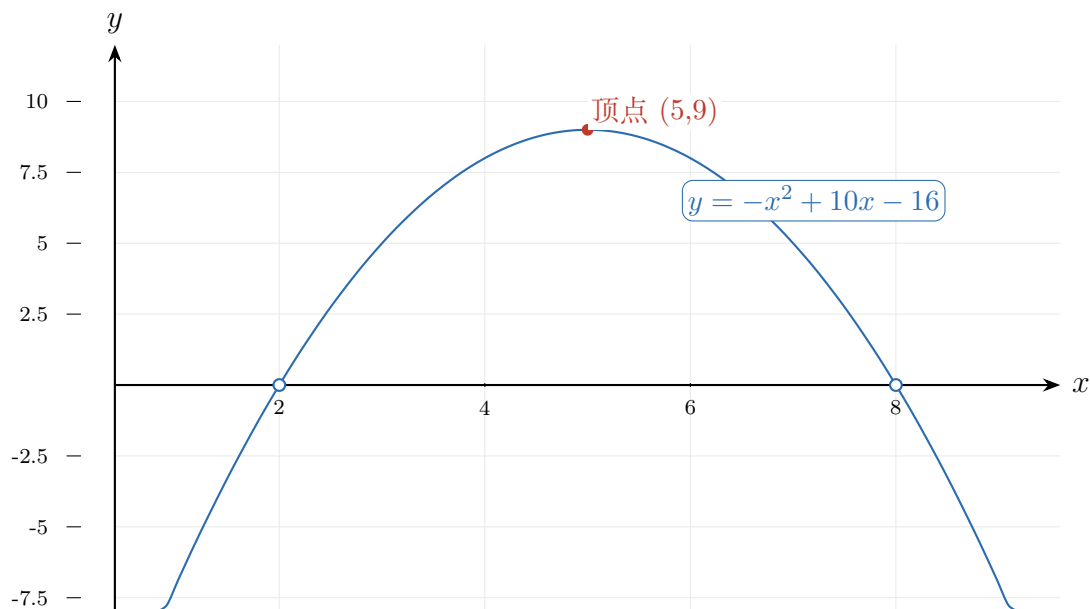


图 6.1: 数列 $a_n = n^2$ 的图象: 定义在正整数上的函数, 图象是一系列孤立的点, 落在抛物线 $y = x^2$ 上

通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的关系可以用一个式子表示, 那么这个式子叫做这个数列的**通项公式**。

How To: 由数列的前几项写通项公式

- 观察相邻两项之差 (差恒定 $\rightarrow$ 很可能是等差数列, 6.2 节学习);
- 观察相邻两项之比 (比恒定 $\rightarrow$ 很可能是等比数列, 6.3 节学习);
- 观察项与序号 n 的关系 (常见的模板: n 、 $2n$ 、 $2n-1$ 、 n^2 、 $\frac{1}{n}$ 、 $(-1)^n$);
- 用前 1、2 项**检验**你写出的公式, 再多代几项验证。

例题 6.1

(由前几项写通项公式)

写出下列数列的一个通项公式:

(1) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$; (2) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$; (3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; (4) $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ 。

解：(1) 各项分别是 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ ，故 $a_n = n^2$ 。(2) 第 1 项为 1，且 $1 = 2 \times 1 - 1$ ， $3 = 2 \times 2 - 1$ ， $5 = 2 \times 3 - 1$ ，故 $a_n = 2n - 1$ 。(3) $a_n = \frac{1}{n}$ 。(4) 奇数项为 1、偶数项为 -1，交替出现，故 $a_n = (-1)^{n+1}$ 。

检验 (4)： $n = 1$ 时 $(-1)^2 = 1$ ✓； $n = 2$ 时 $(-1)^3 = -1$ ✓； $n = 5$ 时 $(-1)^6 = 1$ ✓。

Try It 6.1：写出数列 3, 5, 7, 9, 11, ... 的一个通项公式，并用它求第 10 项。

Q&A

- 问：数列和集合有什么区别？

答：数列强调顺序，(1, 3, 5) 与 (3, 1, 5) 是不同数列；集合不强调顺序，是同一个集合。另外数列允许重复项（如 1, 1, 2, 3），集合不允许。

- 问： a_n 与 $\{a_n\}$ 有什么区别？

答： a_n 表示第 n 项这一个数； $\{a_n\}$ 表示整个数列。

探究活动：用围棋棋子摆“三角形数”——1 个、3 个、6 个、10 个、15 个……每摆一层，就在原来的三角形底下垫一层。数出第 1 层到第 4 层的棋子数，写下数列 1, 3, 6, 10, ...，并验证它的通项公式是 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。先预测第 5 项，再摆出来核对。

想一想：数列 1, 2, 3, 4, ... 能看作函数吗？如果能，它的定义域和值域分别是什么？

6.1.2 数列的递推公式与前 n 项和

学习目标

- 能根据递推公式写出数列的前几项；
- 理解前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，会用 S_n 求 a_n 。

前置复习：已知 $a_1 = 1$ ，且从第二项起每一项都是前一项的 2 倍。写出这个数列的前 5 项。

情境引入：存款复利（呼应章首）

存入 10000 元，年利率 3%，每年复利一次。记 a_n 为第 n 年年末的本息和，则

$$a_1 = 10300, \quad a_n = 1.03 a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

用“前一项表示后一项”来定义整个数列，这就是**递推公式**。

递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项（或前几项），且从第 2 项（或某一项）起，任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} （或前几项）之间的关系可以用一个式子表示，那么这个式子叫做数列的**递推公式**。

前 n 项和

数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项到第 n 项的和叫前 n 项和, 记作

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

它和通项 a_n 之间有如下基本关系:

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

How To: 由 S_n 求 a_n

- 先算 $a_1 = S_1$ (把 $n = 1$ 代入 S_n);
- 当 $n \geq 2$ 时, 计算 $a_n = S_n - S_{n-1}$;
- **单独检验** $n = 1$ 时公式是否也成立: 成立 $\rightarrow$ 统一写成一段; 不成立 $\rightarrow$ 分段写。

例题 6.2

(由 S_n 求 a_n)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$, 求 a_n 。

解: $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$ 。当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - [(n-1)^2 + (n-1)] = n^2 + n - (n^2 - n) = 2n$$

检验: $a_1 = 2$, 而 $2n$ 在 $n = 1$ 时也为 2, 公式对 $n = 1$ 也成立。

故 $a_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

验算: $S_3 = 9 + 3 = 12$, 而 $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ ✓。

Try It 6.2: 已知 $S_n = n^2 + n + 1$, 求 a_n 。

数学视野: 斐波那契数列——1202 年, 斐波那契在《算盘全书》中提出著名的兔子问题: 一对兔子每月生下一对小兔, 小兔出生后的第二个月起也能生育。若最初有一对小兔, 每月兔子的对数依次为

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

它由递推公式给出: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$)。向日葵种子排列的螺旋数、菠萝鳞片的螺旋数、黄金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\dots$ 都藏着斐波那契数的影子。

想一想 (真实情境): 向日葵花盘上, 顺时针与逆时针的螺旋数常常是相邻的两个斐波那契数 (如 21 和 34)。在你身边找一找, 还有哪些自然物的数量排列符合斐波那契数列?

练一练：已知 $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} - 1$ ($n \geq 2$), 写出数列的前 4 项。

本节练习 (答案见章末)

- 写出数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ 的一个通项公式, 并用它求第 10 项。
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n \cdot n$, 写出它的前 4 项, 并求 a_8 。
- 判断 40 是否为数列 $a_n = n^2 + 3n$ 的项? 若是, 求出它的序号。
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 2n$, 求 a_n (注意 $n = 1$ 与 $n \geq 2$ 要分别讨论)。

6.2 等差数列：每一步都加同一个数

6.2.1 等差数列的概念与通项公式

学习目标

- 理解等差数列的定义, 会求公差;
- 掌握通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$, 能灵活求首项、公差或项数;
- 会用等差中项判断三个数是否成等差数列。

前置复习：写出数列 2, 5, 8, 11, 14 相邻两项的差, 你发现了什么规律?

情境引入：影院的座位 (呼应章首“堆叠”)

某影院第一排有 20 个座位, 往后每一排都比前一排多 2 个座位。每排座位数构成一列数

$$20, 22, 24, 26, \dots$$

相邻两项的差恒为 2。这种“等差”规律, 就是本节的主角。

等差数列的概念

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于**同一个常数**, 那么这个数列叫做**等差数列**, 这个常数叫做等差数列的**公差**, 通常用字母 d 表示。即

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2)$$

通项公式

若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

How To：解等差数列问题

- 辨认已知量：首项 a_1 、公差 d 、项数 n 、末项 a_n ；
- 套用通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ；
- 已知条件不足时，把每个条件都转成关于 a_1 、 d 的方程（组），解出未知量。

例题 6.3

（等差数列通项）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 9$ ， $a_7 = 21$ ，求通项公式 a_n 与 a_{20} 。

解：由 $a_7 - a_3 = (7 - 3)d$ ，得 $4d = 21 - 9 = 12$ ，所以 $d = 3$ 。由 $a_3 = a_1 + 2d$ ，得 $a_1 = 9 - 2 \times 3 = 3$ 。于是通项公式为

$$a_n = 3 + (n - 1) \times 3 = 3n$$

$$a_{20} = 3 \times 20 = 60。$$

验算： $a_3 = 3 \times 3 = 9 \checkmark$ ， $a_7 = 3 \times 7 = 21 \checkmark$ 。

Try It 6.3：在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 12$ ， $a_{10} = 27$ ，求 a_1 、 d 与 a_n 。

等差中项

如果三个数 a 、 A 、 b 成等差数列，那么 $A - a = b - A$ ，即 $A = \frac{a + b}{2}$ 。这时 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**。反过来，若 $A = \frac{a + b}{2}$ ，则 a 、 A 、 b 一定成等差数列。

Q&A

- **问：**等差数列的图象有什么特征？

答：把 (n, a_n) 描在平面直角坐标系中， $a_n = dn + (a_1 - d)$ 是 n 的一次函数，图象是落在一条直线上的一组孤立的点。 $d > 0$ 时递增， $d < 0$ 时递减， $d = 0$ 时为常数列。

- **问：**常数列 $5, 5, 5, \dots$ 是等差数列吗？

答：是。 $a_n - a_{n-1} = 0$ ，公差 $d = 0$ 。

6.2.2 等差数列的前 n 项和公式

学习目标

- 理解等差数列前 n 项和公式的推导（倒序相加）；
- 会用 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 与 $S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d$ 求解；
- 能结合单调性判断前 n 项和的最值情形。

前置复习： $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ 等于多少？高斯是怎么算的？（提示：首尾配对）

情境引入： 高斯的算法

传说高斯 10 岁时，老师让大家计算 1 加到 100。高斯很快写出答案：把首尾配对， $(1 + 100)$ 、 $(2 + 99)$ 、 $\cdots$ 、 $(50 + 51)$ ，共 50 对，每对都是 101，所以

$$S = 50 \times 101 = 5050$$

这个“配对”思想，就是等差数列求和公式的核心。

前 n 项和公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，则

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

推导（倒序相加）： 把 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 倒过来写： $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ 。两式相加，对应项 $a_k + a_{n+1-k} = a_1 + a_n$ （由等差中项性质），共有 n 对，故 $2S_n = n(a_1 + a_n)$ ，两边除以 2 即得。

How To： 求等差数列前 n 项和

- 找出首项 a_1 、末项 a_n （或公差 d ）与项数 n ；
- 选公式：已知首末项 $\rightarrow$ 用 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ；已知首项和公差 $\rightarrow$ 用 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ；
- 若项数 n 未知，先由通项公式 $a_1 + (n-1)d = a_n$ 反解出 n 。

例题 6.4

（求等差数列前 n 项和）

求 $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ 的值。

解： 这是首项 1、公差 2 的等差数列求和。先求项数：由通项公式

$$1 + (n-1) \times 2 = 99$$

解得 $n = 50$ 。于是

$$S_{50} = \frac{50(1+99)}{2} = 50 \times 50 = 2500$$

答：和为 2500。

验算：前 50 个奇数之和恰为 $50^2 = 2500$ ——把奇数摆成 $1 + 3 + 5 + \cdots$ 逐层叠放，正好拼出一个 50×50 的方格阵，这也是 $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ 的直观解释。

Try It 6.4： 求 $2 + 5 + 8 + \cdots + 101$ 的值。

例题 6.5

(等差数列应用, 呼应章首)

某剧院有 25 排座位, 第一排 20 个, 往后每一排都比前一排多 2 个座位。

(1) 最后一排有多少个座位?; (2) 全场共有多少个座位?

解: 每排座位数构成等差数列: $a_1 = 20$, $d = 2$, $n = 25$ 。

(1) $a_{25} = 20 + (25 - 1) \times 2 = 20 + 48 = 68$ 。最后一排有 68 个座位。 (2) 全场座位数为前 25 项和:

$$S_{25} = \frac{25(20 + 68)}{2} = 25 \times 44 = 1100$$

全场共有 1100 个座位。

验算: 用另一公式 $S_{25} = 25 \times 20 + \frac{25 \times 24}{2} \times 2 = 500 + 600 = 1100$ ✓。

Try It 6.5: 若该剧院第一排 30 座, 往后每排多 1 座, 共 20 排, 全场共有多少个座位?

技术应用: 用 WPS 表格或 Excel 验证例题 6.5——A 列输入排数 1 至 25, B 列输入公式 `'=20+2*(A1-1)'` 并向下填充, 观察 B 列是否依次为 20、22、24、……, 再用 `'=SUM(B1:B25)'` 求和, 核对是否等于 1100。

练一练: 等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 10$, $d = -1$, 前 n 项和最大时 n 等于多少? (提示: $a_n = 11 - n$, 写几项感受符号变化)

本节练习 (答案见章末)

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 14$, $a_9 = 34$, 求公差 d 、首项 a_1 与 a_{15} 。
- 已知 x 、 $2x + 1$ 、 11 三个数成等差数列, 求 x 的值。
- 求 $5 + 10 + 15 + \cdots + 200$ 的值。
- 小宇制定训练计划: 第 1 周跑 10 km, 以后每周比上一周多跑 3 km。(1) 第 8 周跑多少公里? (2) 前 8 周共跑多少公里?
- 三个数成等差数列, 它们的和为 15, 平方和为 83。求这三个数。(提示: 设三数为 $a - d$, a , $a + d$, 先由“和”求出 a , 再代入“平方和”求 d)
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 23 - 2n$ 。(1) 写出前几项, 找出“最后一个不小于 0 的项”是哪一项; (2) 判断前 n 项和 S_n 在哪一项取得最大值, 并求出这个最大值。(提示: S_n 的最大值在“最后一个非负项”处取到, 还是“第一个负项”处取到?)

6.3 等比数列: 每一步都乘同一个数

6.3.1 等比数列的概念与通项公式

学习目标

- 理解等比数列的定义，会求公比；
- 掌握通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ ，能灵活求解；
- 会用等比中项判断三个数是否成等比数列。

前置复习：把一张纸对折 1、2、3、4 次，层数分别是多少？相邻两项之比有什么规律？

情境引入：折纸堆叠（呼应章首）

一张纸对折 1 次 2 层、2 次 4 层、3 次 8 层……层数数列 2, 4, 8, 16, … 的相邻两项之比恒为 2。同类的现象还有：细胞分裂（1 变 2，2 变 4）、存款复利、病毒传播。这种“等比”规律，是本节的主角。

等比数列的概念

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于**同一个常数**（不为 0），那么这个数列叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示。即

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, q \neq 0)$$

通项公式

若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ($a_1 \neq 0$)，公比为 q ，则

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

等比中项

如果三个数 a 、 G 、 b 成等比数列，那么 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$ ，即 $G^2 = ab$ （且 $ab > 0$ ）。这时 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**， $G = \pm\sqrt{ab}$ 。

例题 6.6

（等比数列通项）

在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 6$ ， $a_5 = 48$ ，求 a_n 。

解：由 $a_5 = a_2 q^{5-2}$ ，得 $48 = 6q^3$ ，所以 $q^3 = 8$ ， $q = 2$ 。由 $a_2 = a_1 q$ ，得 $a_1 = \frac{6}{2} = 3$ 。于是通项公式为

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

验算： $a_2 = 3 \times 2 = 6 \checkmark$ ， $a_5 = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48 \checkmark$ 。

Try It 6.6：在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 9$ ， $a_6 = 72$ ，求 a_n 。

6.3.2 等比数列的前 n 项和公式

学习目标

- 理解等比数列前 n 项和公式的推导（错位相减）；
- 会用 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ($q \neq 1$) 求解；
- 能解决复利、增长率等实际应用问题。

前置复习： $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = ?$ 如果把这个和整体乘 2，再与原式相减，会发生什么？

情境引入： 棋盘上的麦粒

传说一位聪明的臣子向国王请求赏赐：在国际象棋棋盘的第一个格子里放 1 粒麦子，第二个格子放 2 粒，第三个格子放 4 粒……每个格子放前一个格子的 2 倍，放满全部 64 个格子。这需要多少粒麦子？答案就是

$$S_{64} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63}$$

一个大到难以想象的数字。怎么算“比较快”？

前 n 项和公式

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公比为 q ，则当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

当 $q = 1$ 时， $S_n = na_1$ 。

推导（错位相减）： $S_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1}$ ，两边同乘 q ：

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^n$$

两式相减，中间各项全部抵消：

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

当 $q \neq 1$ 时，两边除以 $1-q$ 即得公式。

How To： 求等比数列前 n 项和

- 确认首项 a_1 、公比 q 、项数 n ；
- 判断 q 是否等于 1（等于 1 时直接用 $S_n = na_1$ ）；
- 套公式，注意 n 是“项数”——从 q^0 到 q^{10} 共 11 项，别数错。

例题 6.7(求等比数列前 n 项和)求 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10}$ 的值。解：这是首项 1、公比 2 的等比数列，从 2^0 到 2^{10} 共 11 项。

$$S_{11} = \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

验算： $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2047$ ✓。**Try It 6.7:** 求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$ 的值。**例题 6.8**

(等比数列应用，呼应章首“存款复利”)

王阿姨把 10000 元存入银行，年利率 3%，每年复利一次（上一年的本息和作为下一年本金）。

(1) 第 n 年年底的本息和 a_n 是多少?； (2) 5 年后 she 可以取回多少钱?解：(1) 每年本息和是上一年的 $1 + 3\% = 1.03$ 倍，所以 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 10000 \times 1.03 = 10300$ 、公比 $q = 1.03$ 的等比数列：

$$a_n = 10300 \times 1.03^{n-1}$$

(2) 第 5 年年底本息和为 $a_5 = 10300 \times 1.03^4 = 10000 \times 1.03^5$ 。逐次计算： $1.03^2 = 1.0609$ ， $1.03^3 \approx 1.092727$ ， $1.03^4 \approx 1.12550881$ ， $1.03^5 \approx 1.159274$ 。

$$a_5 \approx 10000 \times 1.159274 \approx 11592.74$$

答：5 年后 she 可以取回约 11592.74 元。

Try It 6.8: 某种细菌每小时分裂一次（1 个变成 2 个）。最初有 100 个细菌，6 小时后有多少个?**数学视野：**72 法则——估算“钱多少年翻倍”，金融业有一个快捷心算法：

$$\text{翻倍年数} \approx \frac{72}{\text{年利率 (百分数)}}$$

年利率 3% 时， $\frac{72}{3} = 24$ 年；精确计算 $1.03^n = 2$ ，得 $n = \frac{\ln 2}{\ln 1.03} \approx \frac{0.693}{0.02956} \approx 23.45$ 年。24 与 23.45 相当接近——“72 法则”是经验的、近似的，但它把指数运算变成了心算。**练一练：**等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 2$ ， $q = \frac{1}{2}$ ，求 S_5 。**本节练习**（答案见章末）

- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 12$, $a_5 = 48$, 求公比 q 与通项公式 a_n 。
- 求 2 与 18 的等比中项。
- 求 $3 + 6 + 12 + \cdots + 96$ 的值。
- 某品牌手机电池满电容量为 5000 mAh。每完成一次充放电循环, 满电容量降为前一次的 90%。求第 5 次循环后的满电容量 (结果保留整数)。
- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $q = 1$, 求 S_6 。有同学套公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 分母变成 0 算不下去——问题出在哪里? 公比 q 等于 1 时, 前 n 项和应该怎么写?
- 设 $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$ 。先验证恒等式 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$, 再求 S_n 的表达式。(提示: 裂项相消前先配系数, 把 $\frac{1}{n(n+2)}$ 拆成 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$)
- 求 $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ 。(提示: 这是“等差 $\times$ 等比”型, 用错位相减: 写出 $2S_n$ 并错一位对齐, 两式相减后检查“首项和末项各剩一个、中间全部抵消”; 最后用 $n = 2$ 代入验证 S_2)

6.4 数学归纳法: 推倒第一块骨牌, 推倒全部骨牌

学习目标

- 理解数学归纳法的原理与适用对象 (与正整数有关的命题);
- 掌握数学归纳法的两个步骤: 奠基与递推;
- 能区分“奠基”与“递推”各自的作用, 会用数学归纳法证明求和公式与整除性问题。

前置复习: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 验证 $n = 1, 2, 3$ 时成立——但你能保证它对一切正整数都成立吗?

情境引入: 多米诺骨牌

要使“任意多块骨牌全部倒下”, 只需要两件事: 第一, 把**第一块**骨牌推倒 (奠基); 第二, 保证**任意一块**倒下后, **下一块**一定跟着倒下 (递推)。数学归纳法就是把“证明一个命题对一切正整数成立”变成这两件事。

数学归纳法的原理

证明一个与正整数 n 有关的命题 $P(n)$, 只需完成两步:

- (1) **奠基:** 证明 $n = 1$ 时命题成立 (若命题从 $n = n_0$ 开始有意义, 则从 $n = n_0$ 奠基);
- (2) **递推:** 假设 $n = k$ (k 不小于起点) 时命题成立, 证明 $n = k + 1$ 时命题也成立。

由 (1) (2), 命题对一切符合条件的正整数 n 都成立。

How To: 用数学归纳法证明

- 明确要证明的命题 $P(n)$ (先看它“从几开始有意义”);
- 奠基: 验证起点 $n = 1$ (或 $n = n_0$) 时命题成立;
- 递推: **假设** $n = k$ 时命题成立 (这叫归纳假设), 把 $n = k$ 代入原命题;
- 从归纳假设出发, 推导 $n = k + 1$ 时命题成立——关键是把 $P(k)$ 转化出 $P(k + 1)$;
- 下结论: “由 (1) (2), 命题对一切正整数 n 成立。”

例题 6.9

(用数学归纳法证明求和公式)

用数学归纳法证明: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

解: 设命题 $P(n): 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

(1) 奠基: $n = 1$ 时, 左边 = 1, 右边 = $\frac{1 \times 2}{2} = 1$, 等式成立。 (2) 递推: 假设 $n = k$ ($k \geq 1$) 时等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

那么当 $n = k + 1$ 时,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

这正是 $n = k + 1$ 时的右边 ($\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$), 等式成立。

由 (1) (2), 等式对一切正整数 n 成立。■

Try It 6.9: 用数学归纳法证明: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ 。

例题 6.10

(用数学归纳法证明整除性)

用数学归纳法证明: $n^3 + 5n$ 能被 6 整除 ($n \in \mathbb{N}^*$)。

解: 设命题 $P(n): n^3 + 5n$ 能被 6 整除。

(1) 奠基: $n = 1$ 时, $1^3 + 5 \times 1 = 6$, 能被 6 整除, 命题成立。 (2) 递推: 假设 $n = k$ 时命题成立, 即 $k^3 + 5k$ 能被 6 整除。

当 $n = k + 1$ 时,

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6$$

其中 $k^3 + 5k$ 能被 6 整除 (归纳假设); $k(k+1)$ 是相邻两个整数之积, 必为偶数, 故 $3k(k+1)$ 能被 6 整除; 6 显然能被 6 整除。三者之和仍能被 6 整除, 即 $n = k+1$ 时命题成立。

由 (1) (2), $n^3 + 5n$ 对一切正整数 n 都能被 6 整除。■

Try It 6.10: 用数学归纳法证明: $4^n - 1$ 能被 3 整除。

学习提示: 数学归纳法最常见的错误, 是把“假设 $n = k$ 时命题成立”误当成“已经证明 $n = k$ 时成立”。归纳假设只是**临时借用**——假定它能成立, 借此推证下一项也能成立。把它想成爬梯子: 第一步把梯子立起来 (奠基), 之后每一级都踩在上一级上 (递推), 但每一级之间必须有真正“踩上去”的动作, 不能跳过。

项目学习 (小组任务): 研究“朋友圈认识问题”——有 2^n 个人, 任意两人之间要么认识要么不认识。请从 $n = 1$ (2 个人) 验证开始, 尝试用数学归纳法的框架思考: 是否总能找到若干人, 使得他们两两互相认识或两两互相不认识? 不必追求完整证明, 重点是练习“奠基 + 递推”的思考结构。

想一想: 小明声称“用数学归纳法证明 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ ”。他的第一步写了: $n = 1$ 时, 左边 = 1, 右边 = $\frac{1 \times 2}{2} + 1 = 2$, 两边不相等。于是证明进行不下去。这件事说明了什么? (提示: 奠基步就是“第一块骨牌”)

本节练习 (答案见章末)

- 用数学归纳法证明: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ 。
- 用数学归纳法证明: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ 。
- 用数学归纳法证明: $n^3 - n$ 能被 3 整除 $(n \in \mathbb{N}^*)$ 。
- 用数学归纳法证明: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$ 。(提示: 先验证 $n = 2$; 递推步必须从归纳假设出发做放缩——要证 $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$, 只需说明 $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)
- 用数学归纳法证明: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$ 。(提示: 命题从 $n = 2$ 起才有意义——奠基应验证 $n = 2$ 而不是 $n = 1$, 验证 $n = 1$ 时 $n - 1 = 0$ 无法代入)
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$ 。用数学归纳法证明: $a_n = \frac{1}{n}$ 。(提示: 递推步必须“代入归纳假设”—— a_{k+1} 应由递推关系 $a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + a_k}$ 结合 $a_k = \frac{1}{k}$ 推得, 而不是另起炉灶直接证)

本章回顾

概念地图

· 数列 a_n (按确定顺序排成的一列数) · 表示法 · 通项公式: $a_n = f(n)$ · 递推公式: a_1 已知, a_n 由前项表示 (如斐波那契 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) · 前 n 项和 S_n 与 a_n : $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$); $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) · 等差数列 (公差 d : $a_n - a_{n-1} = d$) · 通项: $a_n = a_1 + (n-1)d$ · 求和: $S_n = n(a_1 + a_n)/2 = na_1 + n(n-1)d/2$ (倒序相加) · 等比数列 (公比 q : $a_n / a_{n-1} = q$) · 通项: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ · 求和: $S_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$, $q = 1$ 时 $S_n = na_1$ (错位相减) · 数学归纳法 (证明与正整数 n 有关的命题) · 奠基: 验证 $n = n_0$ 时命题成立 · 递推: 假设 $n = k$ 成立 $\Rightarrow n = k+1$ 成立

关键公式速查表

内容	公式 / 要点
通项公式 (等差)	$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad d = a_n - a_{n-1}$
前 n 项和 (等差)	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d$
通项公式 (等比)	$a_n = a_1q^{n-1}, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
前 n 项和 (等比)	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad S_n = na_1 \quad (q = 1)$
S_n 与 a_n	$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$
等差中项 / 等比中项	$A = \frac{a + b}{2}; \quad G^2 = ab$
数学归纳法	奠基 ($n = n_0$) + 递推 ($k \Rightarrow k + 1$)
求和经典结论	$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2; \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

分层练习

A 基础层

- 写出数列 2, 5, 8, 11, ... 的第 6 项。
- 已知 $a_n = 3n - 1$, 求 a_1 、 a_2 、 a_5 。
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 5$, $d = -2$, 求 a_{10} 。
- 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 3$, $q = 2$, 求 a_6 。
- 求 $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ 的值。
- 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2 = 6$, $a_5 = 162$, 求公比 q 与首项 a_1 。

B 应用层

- 某公司第 1 天售出 100 件商品, 之后每天比前一天多售 5 件。第 10 天售出多少件? 前 30 天共售出多少件?
- 某城市人口 100 万, 若每年增长 2%, 5 年后约多少万人? (结果保留一位小数)

- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n^2 - n$, 求 a_n , 并证明 $\{a_n\}$ 是等差数列。

C 拓展层

- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 求数列的通项公式 a_n 。
- 用数学归纳法证明: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

参考答案 (章末集中)

Try It 即时练习答案

- 6.1:** $a_n = 2n + 1$; $a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$ 。
- 6.2:** $a_1 = S_1 = 3$; $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$, $n = 1$ 时 $3 \neq 2$ 。故 $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$ 。
- 6.3:** $a_{10} - a_5 = 5d = 15$, $d = 3$; $a_1 = a_5 - 4d = 12 - 12 = 0$; $a_n = 0 + (n-1) \times 3 = 3n - 3$ 。
- 6.4:** $2 + (n-1) \times 3 = 101$, $n = 34$; $S_{34} = \frac{34(2+101)}{2} = 34 \times 51.5 = 1751$ 。
- 6.5:** $a_{20} = 30 + 19 \times 1 = 49$; $S_{20} = \frac{20(30+49)}{2} = 10 \times 79 = 790$ 。
- 6.6:** $a_6 = a_3 q^3$, $72 = 9q^3$, $q = 2$; $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{9}{4}$; $a_n = \frac{9}{4} \cdot 2^{n-1}$ 。
- 6.7:** $S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$ 。
- 6.8:** $100 \times 2^6 = 6400$ 个。
- 6.9:** 奠基 $n = 1$: 左边 1, 右边 $1^2 = 1$ ✓。递推: 假设 $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$, 则 $n = k+1$ 时左边 $= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$, 成立。■
- 6.10:** 奠基 $n = 1$: $4^1 - 1 = 3$, 能被 3 整除 ✓。递推: 假设 $4^k - 1$ 能被 3 整除, 则 $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$, 第一项是 4 倍的整除式、第二项 3 能被 3 整除, 故 $4^{k+1} - 1$ 能被 3 整除。■

各节练习答案

- 6.1 节:** 1. $a_n = \frac{n}{n+1}$; $a_{10} = \frac{10}{11}$ 。2. 前 4 项为 $-1, 2, -3, 4$; $a_8 = (-1)^8 \times 8 = 8$ 。3. 令 $n^2 + 3n = 40$, 即 $(n+8)(n-5) = 0$, $n = 5$ (正根) —— 40 是数列的第 5 项。4. $a_1 = S_1 = 5$; $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 + 2n) - [3(n-1)^2 + 2(n-1)] = 6n - 1$; $n = 1$ 时 $6 \times 1 - 1 = 5$ 也成立, 故 $a_n = 6n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

- **6.2 节:** 1. $a_9 - a_4 = 5d = 34 - 14 = 20$, $d = 4$; $a_1 = a_4 - 3d = 14 - 12 = 2$; $a_{15} = 2 + 14 \times 4 = 58$. 2. 等差中项: $2(2x+1) = x+11$, $4x+2 = x+11$, $x = 3$ (三数为 3, 7, 11). 3. 项数: $5 + (n-1) \times 5 = 200$, $n = 40$; $S_{40} = \frac{40(5+200)}{2} = 4100$. 4. $a_8 = 10 + 7 \times 3 = 31$ km; $S_8 = \frac{8(10+31)}{2} = 4 \times 41 = 164$ km. 5. 设三数为 $a-d$, a , $a+d$. 由“和”: $(a-d) + a + (a+d) = 3a = 15$, $a = 5$. 由“平方和”: $(5-d)^2 + 25 + (5+d)^2 = 75 + 2d^2 = 83$, $d^2 = 4$, $d = \pm 2$. 三数为 3, 5, 7 (顺序可反). 6. $a_n = 23 - 2n$: $a_{11} = 23 - 22 = 1 \geq 0$, $a_{12} = 23 - 24 = -1 < 0$. 最后一个非负项是 a_{11} , 故 S_{11} 最大. $a_1 = 21$, $S_{11} = \frac{11(21+1)}{2} = 11 \times 11 = 121$; $S_{12} = S_{11} + a_{12} = 121 - 1 = 120 < 121$ ✓. 最大值为 121 (S_{11} 处取得).

- **6.3 节:** 1. $\frac{a_5}{a_3} = q^2 = \frac{48}{12} = 4$, $q = \pm 2$; $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 3$, 故 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 或 $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$. 2. $G^2 = 2 \times 18 = 36$, $G = \pm 6$. 3. 项数: $3 \cdot 2^{n-1} = 96$, $2^{n-1} = 32$, $n = 6$; $S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189$. 4. $a_5 = 5000 \times 0.9^5 \approx 5000 \times 0.59049 = 2952.45$, 故约 2952 mAh. 5. $q = 1$ 时通项公式退化为 $a_n = a_1 = 2$ (常数列), 前 n 项和就是 n 个首项相加: $S_n = na_1$, 故 $S_6 = 6 \times 2 = 12$. 公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 只在 $q \neq 1$ 时成立, $q = 1$ 时 $1-q = 0$, 分母为零——套公式前必须先判断 q 是否等于 1. 6. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2) - n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$, 故 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$. 于是

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

化简得 $S_n = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ (检验 $n=1$: $\frac{1 \times 8}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{3}$ ✓). 漏配 $\frac{1}{2}$ 是最常见的错. 7. 错位相减:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$$

$$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

两式相减: $-S_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n2^{n+1} = (2^{n+1} - 2) - n2^{n+1}$, 故 $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$. 验证 $n=2$: $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$, 公式 $(2-1)2^3 + 2 = 10$ ✓.

- **6.4 节:** 1. 奠基 $n=1$: 左边 1, 右边 $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ ✓. 递推: 假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时左边 = $\frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}$, 成立. ■ 2. 奠基 $n=1$: $1 = \left(\frac{1 \times 2}{2} \right)^2$ ✓. 递推: 假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时左边 = $\left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$, 成立. ■ 3. 奠基 $n=1$: $1-1=0$, 能被 3 整除 ✓. 递推: 假设 $k^3 - k$ 能被 3 整除, 则 $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3k(k+1)$, 第一项由归纳假设可被 3 整除, 第二项含因子 3, 故 $(k+1)^3 - (k+1)$ 能被 3 整除. ■ 4. 奠基 $n=2$: 左边 = $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, 右边 = $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ ✓. 递推: 假设 $n=k$ ($k \geq 2$) 时成立, 即 $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$, 则 $n=k+1$ 时

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

要证它小于 $2 - \frac{1}{k+1}$, 只需 $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, 即 $k+1 > k$, 显然成立。故 $n = k+1$ 时不等式成立。■——递推步用上了归纳假设, 若“另起炉灶直接证 $k+1$ ”就失去了归纳法的意义。5. 奠基 $n = 2$: 左边 $= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$, 右边 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓ (注意: 命题从 $n = 2$ 起有意义, 验证 $n = 1$ 时 $n - 1 = 0$ 无意义)。递推: 假设 $n = k$ ($k \geq 2$) 时成立, 则 $n = k+1$ 时左边 $= 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{k+1-1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$, 成立。■6. 奠基 $n = 1$: $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$ ✓。递推: 假设 $a_k = \frac{1}{k}$ ($k \geq 1$), 则由递推关系

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + a_k} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}$$

成立。■——递推步的关键是代入归纳假设 $a_k = \frac{1}{k}$ 于递推式中, 而不是抛开假设重新算。

A1: $a_1 = 2$, $d = 3$, $a_6 = 2 + 5 \times 3 = 17$ 。

A2: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$ 。

A3: $a_{10} = 5 + 9 \times (-2) = -13$ 。

A4: $a_6 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ 。

A5: 首项 2, 公差 2, 末项 100, 项数 $n = 50$; $S_{50} = \frac{50(2+100)}{2} = 2550$ (也等于 50×51)。

A6: $a_5 = a_2 q^3$, $162 = 6q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$; $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$ 。

B7: $a_1 = 100$, $d = 5$ 。第 10 天 $a_{10} = 100 + 9 \times 5 = 145$ 件; $a_{30} = 100 + 29 \times 5 = 245$, $S_{30} = \frac{30(100+245)}{2} = 15 \times 345 = 5175$ 件。

B8: 人口数列是首项 100、公比 1.02 的等比数列, $a_6 = 100 \times 1.02^5$ 。 $1.02^5 \approx 1.1040808$, 故 $a_6 \approx 110.4$ 万。

B9: $a_1 = S_1 = 1$ 。 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n) - (2n^2 - 5n + 3) = 4n - 3$ 。 $n = 1$ 时 $4 \times 1 - 3 = 1$ 也成立, 故 $a_n = 4n - 3$ 。 检验 $a_n - a_{n-1} = 4$ (常数), $\{a_n\}$ 是首项 1、公差 4 的等差数列。

C10: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, 猜测 $a_n = 2^n - 1$ 。 验证递推: $2^{n+1} - 1 = 2(2^n - 1) + 1$ 恒成立, 且 $a_1 = 2 - 1 = 1$ ✓。 故 $a_n = 2^n - 1$ 。(另法: $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 令 $b_n = a_n + 1$ 得 $b_1 = 2$, $b_n = 2^n$ 。)

C11: 奠基 $n = 1$: 右边 $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ✓。 递推: 假设 $n = k$ 时成立, 则

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

这正是 $n = k+1$ 时右边的形式, 命题成立。由 (1) (2), 命题对一切正整数 n 成立。■

第七章 变化有多快：一元函数的导数及其应用

章首情境

7.1 导数的概念及其意义：从“一段的平均”到“那一刻的精确”

7.1.1 平均变化率与瞬时变化率

学习目标

- 会求函数在给定区间上的平均变化率，并能说出它的实际意义；
- 理解“瞬时变化率”是平均变化率的极限；
- 能从平均速度过渡到瞬时速度，体会“无限逼近”的思想。

前置复习 (Be Prepared)

- 一次函数 $y = 2x + 1$ 的斜率是多少？斜率刻画了 y 随 x 变化的什么特性？
- 物体以速度 5 m/s 匀速运动， t 秒内位移 s 是多少？速度 = 位移 ÷ 时间，对吗？
- 两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 确定的直线斜率公式是什么？

情境引入：高铁加速（呼应章首）

某列车出站后，位移 s （米）与时间 t （秒）的关系近似为 $s(t) = 2t^2$ 。

- 从 $t = 2$ 到 $t = 3$ 这一秒内，平均每秒前进多少米？
- 从 $t = 2$ 到 $t = 2.1$ 这 0.1 秒内呢？
- 在 $t = 2$ 那一刻，速度到底是多少？

前两个问题问的是**平均速度**，第三个问的是**瞬时速度**——它不能用“位移÷时间”直接算（那一刻时间间隔为0）。怎么办？

平均变化率

对于函数 $y = f(x)$ ，自变量从 x_1 变到 x_2 时，函数值的变化量与自变量变化量的比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

叫做函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的**平均变化率**。在图象上，它等于过点 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$ 的割线斜率。

How To：求平均变化率

- 确定区间 $[x_1, x_2]$ ；
- 计算增量： $\Delta x = x_2 - x_1$ ， $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ；
- 求比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，化简结果，并标注实际单位。

例题 7.1

(求平均变化率)

已知 $s(t) = 2t^2$ (s 单位：m， t 单位：s)。

- (1) 求 t 从 2 到 3 的平均速度；
- (2) 求 t 从 2 到 $2+h$ ($h \neq 0$) 的平均速度。

解：(1) $\Delta t = 1$ ， $\Delta s = s(3) - s(2) = 2 \times 9 - 2 \times 4 = 18 - 8 = 10$ 。

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{1} = 10 \text{ m/s}$$

(2) $\Delta t = h$ ， $\Delta s = s(2+h) - s(2) = 2(2+h)^2 - 8 = 8 + 8h + 2h^2 - 8 = 8h + 2h^2$ 。

$$\bar{v} = \frac{8h + 2h^2}{h} = 8 + 2h \text{ m/s}$$

取 $h = 0.1$ ，得 $\bar{v} = 8.2$ ；取 $h = 0.01$ ，得 $\bar{v} = 8.02$ 。 h 越小，平均速度越接近 $t = 2$ 时刻的瞬时速度。

Try It 7.1: $f(x) = x^2$ ，求 x 从 1 到 3 的平均变化率。

瞬时速度与瞬时变化率

当 h 无限趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 无限趋近于一个确定的数，这个数叫做函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**瞬时变化率**。当函数是位移函数时，它就是**瞬时速度**。

$$v(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h}$$

例题 7.2

(求瞬时速度)

物体自由落体, 位移 $s(t) = 5t^2$ (g 取 10 m/s^2 , s 单位: m)。求 $t = 2 \text{ s}$ 时的瞬时速度。

解: $\Delta s = s(2+h) - s(2) = 5(2+h)^2 - 20 = 20 + 20h + 5h^2 - 20 = 20h + 5h^2$ 。

$$v(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20h + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (20 + 5h) = 20$$

所以 $t = 2 \text{ s}$ 时的瞬时速度为 20 m/s 。

验算: 7.2 节学完公式后可得 $v(t) = s'(t) = 10t$, $v(2) = 20 \checkmark$ 。

Try It 7.2: $s(t) = 5t^2$, 求 $t = 1 \text{ s}$ 时的瞬时速度。

Q&A

- 问: 平均速度与瞬时速度有什么联系和区别?

答: 平均速度是“一段时间”的总体快慢; 瞬时速度是“某一时刻”的快慢。瞬时速度是当时时间间隔 h 趋于 0 时平均速度的极限——它是“极限版”的平均速度。

- 问: 为什么不能直接把 $h = 0$ 代入 $\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h}$?

答: 因为分母为 0, 分式无意义。必须先把分式化简 (约去 h), 再取极限。这正是“先化简、再逼近”的过程。

技术应用: 在电子表格中模拟“逼近 $t = 2$ 的瞬时速度”——对 $s(t) = 2t^2$, 分别取 $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$, 计算 $\frac{s(2+h) - s(2)}{h}$ 。观察结果是否越来越接近 8。你也可以让 h 从负数一侧 ($h = -0.1, -0.01, \dots$) 逼近, 结果相同——从两侧逼近同一个数, 正是“极限存在”的直观意义。

想一想: 从 $x = 2$ 到 $x = 2 + h$ 的平均变化率 $8 + 2h$ 在 $h > 0$ 时比瞬时变化率 8 大, 在 $h < 0$ 时比 8 小。你能从 $y = 2x^2$ 图象的割线斜率解释这是为什么吗?

7.1.2 导数的概念及其几何意义

学习目标

- 理解导数的定义: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$;
- 理解导数的几何意义: 切线的斜率;
- 会求曲线在某点处的切线方程。

前置复习: 直线过点 $(2, 4)$ 且斜率 $k = 3$, 写出该直线的点斜式方程。

导数的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在，那么这个极限值叫做函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**导数**，记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ ，
即

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

导数的几何意义

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线的斜率**等于 $f'(x_0)$ ，切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

直观上：当 h 趋近于 0 时，割线绕着切点转动，越来越接近切线；割线斜率（平均变化率）随之趋于切线斜率（导数）。打个比方：切线就是“放大镜下的曲线”——把曲线在一点附近放到足够大，它越来越像一条直线，这条直线的斜率，就是导数。

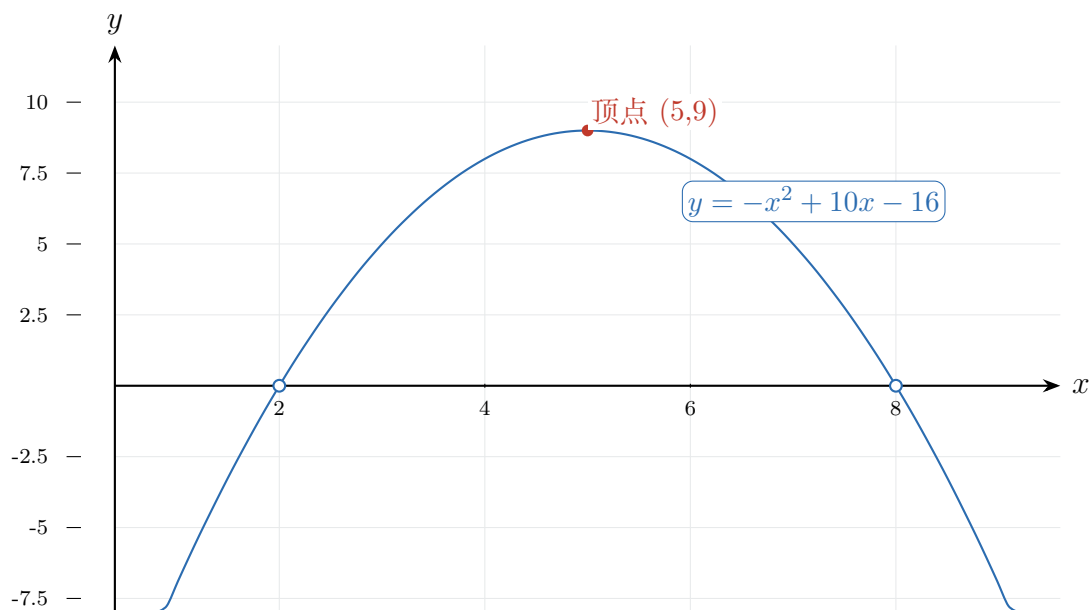


图 7.1: 抛物线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与割线：割线 $y = 3x - 2$ 绕切点转动，极限位置即切线 $y = 2x - 1$

How To: 求曲线在一点处的切线方程

- 确认切点坐标 $(x_0, f(x_0))$ ；
- 用定义（或 7.2 节公式）求 $f'(x_0)$ ，即切线斜率；
- 用点斜式写出切线方程，整理为 $y = kx + b$ 的形式。

例题 7.3

(求切线方程)

求曲线 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线方程。

解: $f(x) = x^2$, 切点 $(2, 4)$ 。先求斜率:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

由点斜式, 切线方程为 $y - 4 = 4(x - 2)$, 整理得 $y = 4x - 4$ 。

验算: 把 $x = 2$ 代入 $y = 4 \times 2 - 4 = 4$, 切点确实在切线上 ✓。

Try It 7.3: 求曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程。

Q&A

- 问: 切线与曲线一定只有一个交点吗?

答: 不一定。切线是“局部贴近”直线的定义, 不是“只交一点”的定义。例如 $y = x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线 $y = 0$ 与曲线相交于 $(0, 0)$ (三重重合), 只有一个交点; 而 $y = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的切线 $y = 1$ 与曲线相交于无数个点。

- 问: 导数为 0 说明什么?

答: 说明该点切线水平 (斜率为 0) —— 函数在该点 “既不上涨也不下跌”, 是极值点的候选, 将在 7.3 节研究。

数学视野: 微积分由两位数学家几乎同时独立创立——牛顿从物理 (运动、速度) 出发, 莱布尼茨从几何 (切线、斜率) 出发。今天通用的记号就是他们留下的遗产: $f'(x)$ (牛顿) 与 $\frac{dy}{dx}$ (莱布尼茨)。一个强调 “变化率”, 一个强调 “微分之比”, 两种眼光看同一个对象, 正是数学奇妙之处。

想一想: $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处有切线吗? 计算 $h > 0$ 与 $h < 0$ 两侧的 $\frac{|0+h|-|0|}{h}$, 看它们是否趋于同一个数。(结论: 两侧极限分别为 1 和 -1, 不相等, 所以导数不存在——“尖点”处没有切线。)

本节练习 (答案见章末)

- 求函数 $f(x) = 3x^2$ 在 x 从 1 变到 3 时的平均变化率。
- 求函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在 x 从 2 变到 $2 + h$ ($h \neq 0$) 时的平均变化率。
- 一物体沿直线运动, 位移 $s(t) = t^2 + 2t$ ($t \geq 0$, 单位: m)。用定义求 $t = 3$ s 时的瞬时速度。
- 圆的面积 $A = \pi r^2$ 。求 r 从 2 变到 3 时, A 关于 r 的平均变化率, 并说明它的实际意义。

- 求过点 $P(2, 0)$ 作曲线 $y = x^3$ 的切线的方程。先判断：点 P 在曲线上吗？若不在，设切点为 (t, t^3) ，写出该点切线的斜率，再让它过 P ，解出 t 。（提示：注意这类“过点”题可能不止一条切线）

7.2 导数的运算：一张公式表，让求导不再从头算起

7.2.1 基本初等函数的导数公式

学习目标

- 记住并会使用基本初等函数的导数公式；
- 会把 x^n 、 $\sqrt{x}$ 、 $\frac{1}{x}$ 等统一写成幂函数 x^α 再求导。

前置复习： x^3 、 $\sqrt{x}$ 、 $\frac{1}{x}$ 分别能否写成 x 的幂次形式 x^α ？

用定义求导需要极限，过程繁琐——好比每次出门都从捡石头垒台阶开始，累不累？人们早已算出了所有基本初等函数的导数，得到一张“公式表”，直接套用即可。这张表就像乘法口诀表：前人替你验算过千万遍了，你只管背熟、用熟。

基本初等函数的导数公式

原函数	导数
$y = c$ (c 为常数)	$y' = 0$
$y = x^\alpha$ (α 为常数)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

例题 7.4

(幂函数求导)

求下列函数的导数：

(1) $y = x^3$; (2) $y = x^{-2}$; (3) $y = \sqrt{x}$; (4) $y = \frac{1}{x}$ 。

解： (1) $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$ 。 (2) $y' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ 。 (3) $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。 (4) $y = x^{-1}$, $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ 。

Try It 7.4: 求 $y = x^5$ 与 $y = \frac{1}{x^2}$ 的导数。

7.2.2 导数的四则运算法则

学习目标

- 掌握和、差、积、商的求导法则；
- 会用法则求较复杂函数的导数。

前置复习： $(x^2)' = ?$, $(x^3)' = ?$ 那么 $(x^2 + x^3)'$ 会是 $2x + 3x^2$ 吗？

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导，则：

和差的导数： $(u \pm v)' = u' \pm v'$

积的导数： $(uv)' = u'v + uv'$

商的导数： $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

How To： 用四则运算法则求导

- 判断函数结构：和差 $\rightarrow$ 逐项求导；积 $\rightarrow$ 用积法则；商 $\rightarrow$ 用商法则；
- 分别求出各“零件” (u' 、 v')；
- 套法则公式，合并整理。

例题 7.5

(四则运算法则求导)

求下列函数的导数：

(1) $f(x) = x^3 - 2x + 5$; (2) $f(x) = x^2 e^x$; (3) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 。

解： (1) 逐项求导：

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

(2) 积法则：取 $u = x^2$, $v = e^x$, 则 $u' = 2x$, $v' = e^x$ 。

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$$

(3) 商法则：取 $u = x$, $v = x + 1$, 则 $u' = 1$, $v' = 1$ 。

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

验算 (3)：也可把 $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ 再求导，得 $0 - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ✓。

Try It 7.5： 求 $f(x) = x \ln x$ 的导数。

7.2.3 复合函数的导数（链式法则）

学习目标

- 认识复合函数 $y = f(g(x))$ 的结构；
- 掌握链式法则，会求简单复合函数的导数。

前置复习： $y = (2x + 1)^2$ 可以看作哪两个函数“套”在一起？

复合函数

一般地，设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 那么 $y = f(g(x))$ 叫做由 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成的**复合函数**， u 叫做中间变量。

链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

即“外层导数 $\times$ 内层导数”。记作 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 。

How To： 求复合函数的导数

- 拆分：从外到内把函数拆成 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ ；
- 求外层对 u 的导数 $f'(u)$ ，把 u 换回 $g(x)$ ；
- 求内层导数 $g'(x)$ ，两者相乘。

例题 7.6

(复合函数求导)

求下列函数的导数：

(1) $y = (2x + 1)^3$ ；(2) $y = \sin 2x$ ；(3) $y = e^{3x}$ 。

解：(1) 令 $u = 2x + 1$ ，则 $y = u^3$ ：

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$$

(2) 令 $u = 2x$ ，则 $y = \sin u$ ：

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

(3) 令 $u = 3x$ ，则 $y = e^u$ ：

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot 3 = 3e^{3x}$$

验算 (2): $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $(\sin 2x)' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$ ✓。

Try It 7.6: 求 $y = \ln(3x - 1)$ 的导数。

学习提示: 复合求导的常见错误是**漏乘内层导数**——例如把 $(2x + 1)^3$ 的导数写成 $3(2x + 1)^2$, 漏掉了内层 $(2x + 1)' = 2$ 。每次求完, 习惯性问自己一句: “内层要不要再乘一层?”

练一练: 求 $y = (x^2 + 1)^4$ 的导数。(提示: 外层 $4u^3$, 内层 $2x$, 答案 $8x(x^2 + 1)^3$)

本节练习 (答案见章末)

- 求函数 $y = 3x^4 - 2x + 7$ 的导数。
- 求函数 $f(x) = x^3 \sin x$ 的导数。
- 求函数 $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ 的导数。
- 求函数 $y = (3x^2 + 1)^5$ 的导数。

7.3 函数的单调性与极值: 用“瞬时斜率”读懂函数的一生

7.3.1 用导数研究函数的单调性

学习目标

- 理解 $f'(x)$ 的符号与函数 $f(x)$ 单调性的关系;
- 会用导数求函数的单调区间;
- 会利用导数证明简单不等式。

前置复习: $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 上的单调性如何? $y = 2x + 1$ 的斜率与单调性有何关系?

情境引入: 回想 7.1 节的高铁——位移 $s(t) = 2t^2$ 在 $t > 0$ 时不断增加, 是因为速度 $s'(t) = 4t > 0$ 。**导数 (变化率) 的正负, 决定函数上升还是下降。**这就是用导数研究单调性的核心思想。

用导数判断单调性

设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导:

- 如果 $f'(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在该区间上**单调递增**;
- 如果 $f'(x) < 0$, 那么 $f(x)$ 在该区间上**单调递减**。

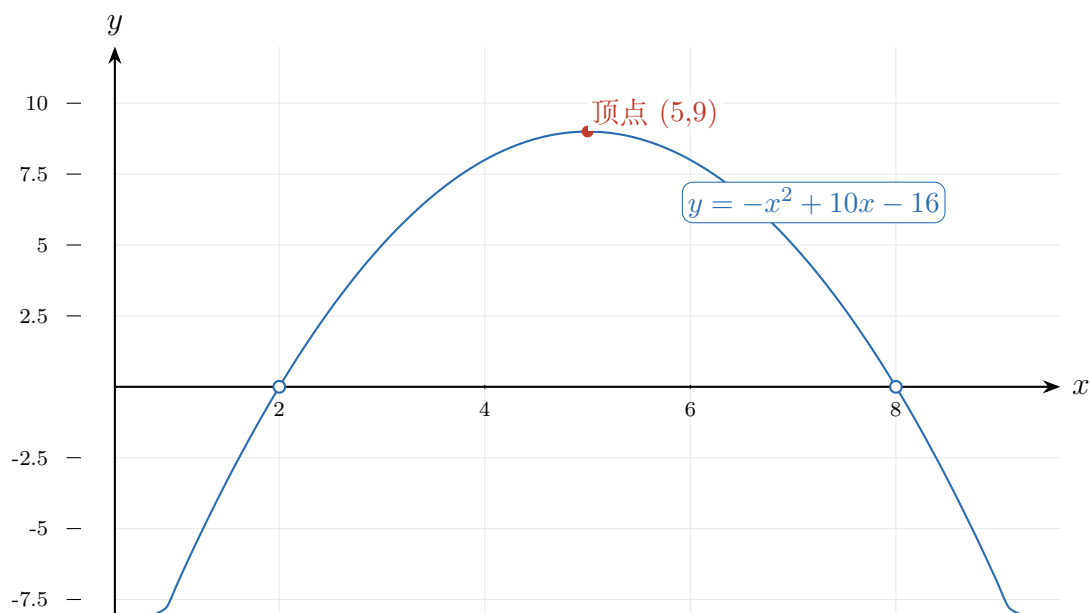


图 7.2: 函数 $y = x^3 - 3x$ 的单调性图象: $(-\infty, -1)$ 、 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$ 单调递增, $(-1, 1)$ 上 $f'(x) < 0$ 单调递减

How To: 用导数求函数的单调区间

- 写出定义域;
- 求 $f'(x)$;
- 解不等式 $f'(x) > 0$ 与 $f'(x) < 0$;
- 写出单调区间 (注意端点归属、定义域限制)。

例题 7.7

(用导数求单调区间)

求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的单调区间。

解: 定义域为 $\mathbb{R}$ 。

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

解 $f'(x) > 0$: $3(x-1)(x+1) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$; 解 $f'(x) < 0$: 得 $-1 < x < 1$ 。

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 1)$ 。

验算: $f'(2) = 3(4-1) = 9 > 0$ ✓; $f'(0) = -3 < 0$ ✓。

Try It 7.7: 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调区间。

例题 7.8

(用导数证明不等式)

证明：当 $x > 0$ 时， $e^x > 1 + x$ 。

证明：设 $f(x) = e^x - 1 - x$ ，则 $f'(x) = e^x - 1$ 。

当 $x > 0$ 时， $e^x > 1$ ，所以 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

又 $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ ，故当 $x > 0$ 时 $f(x) > f(0) = 0$ ，即 $e^x - 1 - x > 0$ ，所以 $e^x > 1 + x$ 。■

Try It 7.8: 证明：当 $x > 0$ 时， $\ln x \leq x - 1$ 。

7.3.2 函数的极值

学习目标

- 理解极大值、极小值（统称极值）的概念；
- 会利用导数求函数的极值；
- 能区分“极值”与“最值”，理解“驻点不一定是极值点”。

前置复习：根据上一节的单调区间，画出 $y = x^3 - 3x$ 的大致图象，标出“爬升—下滑—爬升”的两个转折点。

情境引入：一座山峰是“附近最高点”，一个山谷是“附近最低点”——站在山顶，你的海拔不一定比另一座山脚下高，但就**周围一圈**而言你是最高的。这种“局部最高（低）点”，就是**极值**。

极值的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的**所有** x ($x \neq x_0$)，都有

$$f(x) < f(x_0)$$

那么 $f(x_0)$ 是函数的一个**极大值**， x_0 是极大值点；如果都有 $f(x) > f(x_0)$ ，那么 $f(x_0)$ 是**极小值**， x_0 是极小值点。极大值与极小值统称**极值**。

用导数求极值

设 x_0 满足 $f'(x_0) = 0$ ，考察 $f'(x)$ 在 x_0 左右的符号：

左 $f'(x)$	x_0 处	右 $f'(x)$	结论
$>0 \mid <0$	$=0$	$<0 \mid >0$	x_0 为极大值点
$<0 \mid >0$	$=0$	$>0 \mid <0$	x_0 为极小值点
同号	$=0$	同号	不是极值点

How To: 用导数求函数的极值

- 求定义域，求 $f'(x)$ ；
- 解 $f'(x) = 0$ ，得驻点（并剔除不在定义域内的点）；
- 列表考察每个驻点左右 $f'(x)$ 的符号，判断是极大值点、极小值点或都不是；
- 把驻点代入 $f(x)$ ，求出极值。

例题 7.9

（求函数的极值）

求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极值。

解： $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = -1$ ， $x = 1$ 。列表考察符号：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大	递减	极小	递增

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \quad f(1) = 1 - 3 = -2$$

所以 $f(x)$ 的极大值是 2（在 $x = -1$ 处取得），极小值是 -2（在 $x = 1$ 处取得）。

验算： $f'(0.9) = 3(0.81 - 1) = -0.57 < 0$ ， $f'(1.1) = 3(1.21 - 1) = 0.63 > 0$ ， $x = 1$ 处左负右正，确是极小值点 ✓。

Try It 7.9: 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 的极值。

Q&A

- 问：极大值一定比极小值大吗？

答：不一定。极值是“局部”概念——一个函数的极大值可能小于另一个极小值，甚至同一函数中某个极大值也可能小于另一个极小值（不同峰谷）。

- 问：函数一定在驻点取极值吗？

答：不一定。还可能出现在“导数不存在”的点（如 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处取极小值），或区间端点。求极值时这几类点都要考虑。

探究活动：用坐标纸或软件画出 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = x^3$ 的图象。前者在 $x = \pm 1$ 处有极值，后者在 $x = 0$ 处 $f'(0) = 0$ 却无极值。**先预测：**光看“切线水平”够不够判断极值？**再观察：**比较两图在驻点附近 f' 的符号变化，验证“左右异号才是极值”。

想一想（真实情境）：某电商的日订单量 $f(x)$ （单位：万单）与折扣率 x （ $0 \leq x \leq 1$ ）近似满足 $f(x) = -x^3 + 1.5x^2$ 。求 $f'(x)$ 并找出订单量的极大值点。折扣过大反而销量下滑，这与“极值”有什么对应关系？

本节练习（答案见章末）

- 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 的单调区间。
- 求函数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 的极值。
- 求函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 的单调区间与极值。
- 某种药在血液中的浓度 $f(x)$ (单位: $\mu\text{g/mL}$) 随时间 x (单位: h) 变化, 近似满足 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ($0 \leq x \leq 3$)。求 $f'(x)$, 并判断浓度在什么时刻达到极大值, 极大值是多少。
- 设 $f(x) = \ln x - ax$ (a 为常数), 讨论 $f(x)$ 的单调区间。(提示: 定义域是 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a$; 先想清楚 $a \leq 0$ 与 $a > 0$ 两种情形, 再分别解 $f'(x)$ 的正负)
- 求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 的单调区间, 并判断能否写成并集的形式。(提示: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$; 单调区间之间要用“和”连接, 不能写 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 表示单调递减)
- 判断 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ 在 $x = 1$ 处是否有极值。有同学算得 $f'(1) = 0$, 就下结论“ $x = 1$ 是极值点”——对吗? (提示: 先求 $f'(x)$ 并配方, 看看 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 左右是否变号)

7.4 函数的最大(小)值与导数: 在整段区间里找“总冠军”

学习目标

- 理解最值与极值的区别与联系;
- 会用导数求闭区间上函数的最大值与最小值;
- 会建立函数模型并用导数求解简单的实际问题(最优化问题)。

前置复习: 二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 在 $[0, 5]$ 上的最大值在哪里取得? 端点的函数值要考虑吗?

情境引入: 厂家想知道“定价多少利润最大”“用料多少成本最低”“多少产量收益最高”——这些都是**最值问题**。与极值不同, 最值要求的是整个研究范围内的“总冠军”, 而不只是“附近局部”的领先者。

函数的最值

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D 。如果存在 $x_0 \in D$, 使得对**所有** $x \in D$, 都有 $f(x) \leq f(x_0)$, 那么 $f(x_0)$ 是函数在 D 上的**最大值**; 都有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是**最小值**。

用导数求闭区间上的最值

求函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最值:

- 求 $f'(x)$, 解 $f'(x) = 0$, 得到 $[a, b]$ 内的驻点;
- 计算驻点与端点 a 、 b 处的函数值;

- 比较这些函数值：最大者为最大值，最小者为最小值。

How To: 解最优化应用问题

- **审题建模**: 设自变量 x , 写出目标函数 $f(x)$, **务必注明定义域**;
- 求 $f'(x)$, 解 $f'(x) = 0$ 得驻点;
- 比较驻点与端点的函数值, 确定最值;
- **检验**: 答案是否符合实际 (定义域、单位、合理性)。

例题 7.10

(闭区间上的最值)

求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值。

解: $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1, x = 1$ (均在 $[-2, 2]$ 内)。计算各点函数值:

$$f(-2) = -8 + 6 = -2, \quad f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 8 - 6 = 2$$

比较得: 最大值 2 (在 $x = -1$ 和 $x = 2$ 处取得), 最小值 -2 (在 $x = -2$ 和 $x = 1$ 处取得)。

Try It 7.10: 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。

例题 7.11

(最优化应用)

某商品进价为 30 元/件, 市场调查发现: 售价定为 p 元时, 日销量为 $q = 100 - p$ 件。要使日利润最大, 售价应定为多少元? 最大日利润是多少?

解: 设日利润为 $L(p)$, 则单件利润为 $p - 30$, 日销量为 $100 - p$:

$$L(p) = (p - 30)(100 - p) = -p^2 + 130p - 3000$$

定义域为 $[30, 100]$ (售价不低于进价、不高于“零销量价”)。

$$L'(p) = -2p + 130$$

令 $L'(p) = 0$, 得驻点 $p = 65 \in [30, 100]$ 。计算端点与驻点:

$$L(30) = 0, \quad L(65) = 35 \times 35 = 1225, \quad L(100) = 0$$

所以当 $p = 65$ 时利润最大，最大日利润为 1225 元。

检验：售价 65 元，单件利润 35 元，日销量 $100 - 65 = 35$ 件， $35 \times 35 = 1225 \checkmark$ ，且高于进价、低于零销量价，合理。

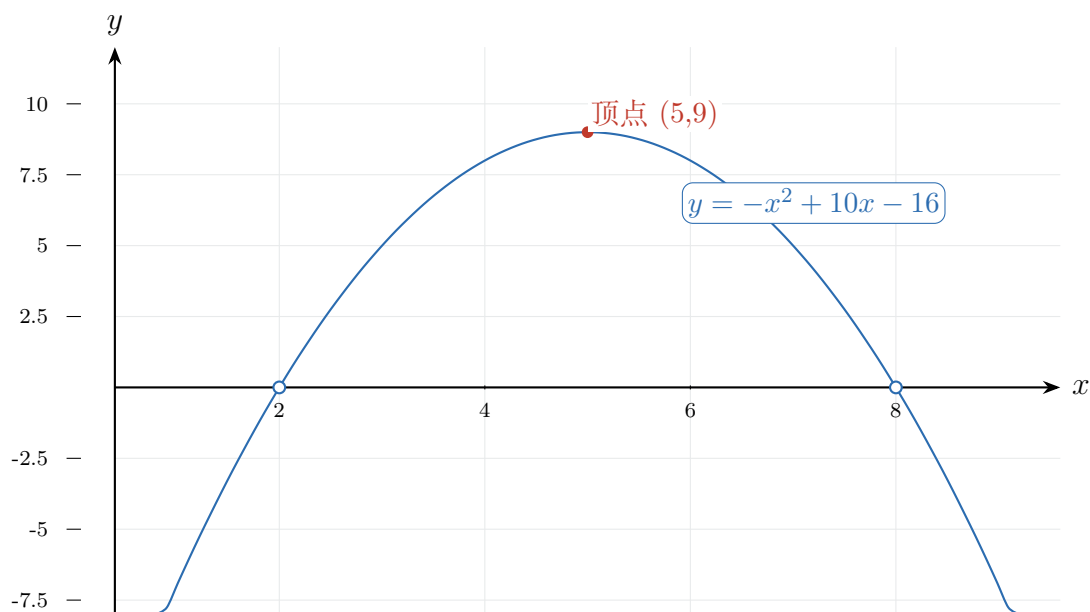


图 7.3: 利润函数的抛物线图象： $y = -x^2 + 10x - 16$ 的顶点 $(5, 9)$ 即最大值点，对应利润最大的定价方案（示意）

Try It 7.11: 若进价提高到 40 元/件，其他条件不变，售价定为多少时日利润最大？

项目学习（小组任务）：用一张边长为 30 cm 的正方形纸板，四角各剪去一个边长为 x cm 的小正方形，折成一个无盖纸盒。

- (1) 写出纸盒容积 V 关于 x 的表达式及定义域；
- (2) 用导数求 x 为多少时容积最大，最大容积是多少；
- (3) 用软件画出 $V(x)$ 的图象，验证你的结论，并讨论为什么最优值不在 $x = 7.5$ （区间中点）处。

解（参考）：(1) 底面为边长 $30 - 2x$ 的正方形，高为 x ，故

$$V(x) = x(30 - 2x)^2, \quad 0 < x < 15$$

(2) $V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \cdot 2(30 - 2x) \cdot (-2) = (30 - 2x)(30 - 6x)$ 。令 $V'(x) = 0$ ，得 $x = 15$ （不在定义域内，舍去）或 $x = 5$ 。考察： $0 < x < 5$ 时 $V'(x) > 0$ ， $5 < x < 15$ 时 $V'(x) < 0$ ，故 $x = 5$ 处取最大值：

$$V(5) = 5 \times (30 - 10)^2 = 5 \times 400 = 2000 \text{ cm}^3$$

(3) 图象呈“先升后降”，最大值在 $x = 5$ 处；最值点由“导数为零”决定，与区间中点无关——这就是用导数求最优与“平均分割”直觉不同的原因。

想一想 (真实情境): 快递公司在城市设配送站。站到用户的平均配送成本随配送半径的增大而增加, 而覆盖的用户数随半径增大而增加, 两者乘积 (总收益) 不是单调的。仿照例题 7.11 的建模思路, 你能为这类“规模与成本平衡”的问题建立一个函数模型吗?

本节练习 (答案见章末)

- 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值与最小值。
- 求函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值与最小值。
- 某游乐场门票每张 10 元时, 日均接待 800 人。市场调查发现: 票价每提高 1 元, 日均人数减少 40 人。票价定为多少元时, 门票日收入最大? 最大日收入是多少?
- 要做一个容积为 $8\pi \text{ m}^3$ 的无盖圆柱形水箱。问底面半径 r 为多少时, 所用材料 (一个底面 + 一个侧面) 最少? 最少用料是多少?

本章回顾

概念地图

· 导数 $f'(x)$ (瞬时变化率) · 定义: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h$ · 几何意义: 切线的斜率 $\rightarrow$ 切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ · 运算 · 基本公式: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = 1/x$... · 四则: $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ · 复合: $dy/dx = (dy/du) \cdot (du/dx)$ (链式法则, 剥洋葱) · 应用 · 单调性: $f'(x) > 0$ 增, $f'(x) < 0$ 减 · 极值: 驻点 $f'(x_0)=0$ 且左右异号 (左正右负极大, 左负右正极小) · 最值: 闭区间上“端点 + 驻点”比较取最大最小

关键公式速查表

内容	公式 / 要点
平均变化率	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (割线斜率)
导数定义	$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
切线方程	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
幂函数	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
指数 / 对数	$(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
三角	$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$
四则法则	$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
链式法则	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
单调性	$f'(x) > 0$ 单调递增; $f'(x) < 0$ 单调递减
极值判断	驻点 + 左右 f' 异号; $y = x^3$ 在 $x = 0$ 是拐点
闭区间最值	端点值 + 驻点值, 比较取最大最小

分层练习

A 基础层

- 用定义求 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的导数。

- 求下列函数的导数：(1) $y = x^4 + 3x^2$ ；(2) $y = x \ln x$ ；(3) $y = (3x - 2)^2$ 。
- 求 $y = \frac{1}{x^2}$ 的导数。
- 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调区间。
- 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 的极值。
- 求 $f(x) = x^3 - 6x$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。

B 应用层

- 求曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程。
- 一物体沿直线运动，位移 $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ ($t \geq 0$ ，单位：m)。求 $t = 2$ s 时的瞬时速度。
- 某农场打算用 60 m 长的篱笆围成一个矩形菜园，其中一边靠墙（不围）。问长、宽各为多少时，菜园面积最大？最大面积是多少？

C 拓展层

- 证明：当 $x > 0$ 时， $e^x \geq 1 + x$ 恒成立，并指出等号何时成立。
- 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ，求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值与最小值。

参考答案（章末集中）

Try It 即时练习答案

- 7.1: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$ 。
- 7.2: $v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10 + 5h) = 10$ m/s。
- 7.3: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$ ；切线为 $y - 1 = 3(x - 1)$ ，即 $y = 3x - 2$ 。
- 7.4: $(x^5)' = 5x^4$ ； $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ 。
- 7.5: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ 。
- 7.6: 令 $u = 3x - 1$ ， $y' = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{3x - 1}$ 。
- 7.7: $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$ ；增区间 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, +\infty)$ ，减区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。
- 7.8: 设 $f(x) = \ln x - x + 1$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ 。当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0$ ，当 $x > 1$ 时 $f'(x) < 0$ ，故 $x = 1$ 为最大值点， $f(1) = 0$ ，所以 $f(x) \leq 0$ ，即 $\ln x \leq x - 1$ 。■

- **7.9:** $f'(x) = 3(x^2 - 2)$, 驻点 $x = \pm\sqrt{2}$. $f(-\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2}) + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (极大), $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ (极小)。
- **7.10:** 驻点 $x = \sqrt{2}$ ($[0, 3]$ 内). $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, $f(3) = 27 - 18 = 9$. 最大值 9, 最小值 $-4\sqrt{2}$.
- **7.11:** $L(p) = (p - 40)(100 - p) = -p^2 + 140p - 4000$, $L'(p) = -2p + 140$, $p = 70$. $L(70) = 30 \times 30 = 900$ 元。

各节练习答案

- **7.1 节:** 1. $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{2} = 12$. 2. $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(4 + 4h + h^2 + 1) - 5}{h} = 4 + h$. 3. $\Delta s = s(3+h) - s(3) = (15 + 8h + h^2) - 15 = 8h + h^2$, $v(3) = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) = 8$ m/s. 4. $\frac{A(3) - A(2)}{3 - 2} = \frac{9\pi - 4\pi}{1} = 5\pi \approx 15.7$ ——半径每增加 1 cm, 面积平均增加约 5π cm^2 . 5. $P(2, 0)$ 不满足 $y = x^3$ ($8 \neq 0$), 故 P 不在曲线上, 不能把 P 当切点。设切点为 (t, t^3) , 切线斜率为 $f'(t) = 3t^2$, 切线过 $P(2, 0)$, 故 $\frac{t^3 - 0}{t - 2} = 3t^2$, 即 $t^3 = 3t^2(t - 2)$, $2t^3 - 6t^2 = 2t^2(t - 3) = 0$, $t = 0$ 或 $t = 3$. $t = 0$: 切点 $(0, 0)$, 切线 $y = 0$; $t = 3$: 切点 $(3, 27)$, 斜率 27, 切线 $y - 27 = 27(x - 3)$, 即 $y = 27x - 54$ (检验: $(2, 0)$ 代入 $y = 27x - 54$ 得 $0 = 0$ ✓). 共两条切线——“过点”与“在点”一字之差, 做法完全不同。
- **7.2 节:** 1. $y' = 3 \times 4x^3 - 2 = 12x^3 - 2$. 2. 积法则: $f'(x) = (x^3)' \sin x + x^3(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$. 3. 商法则: $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$. 4. 链式法则: 令 $u = 3x^2 + 1$, $y' = 5u^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 1)^4$.
- **7.3 节:** 1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; 增区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$, 减区间 $(0, 2)$. 2. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$, 驻点 $x = -1, 0, 1$; 极大值 $f(0) = 0$, 极小值 $f(-1) = f(1) = -1$. 3. $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$; 增区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$, 减区间 $(1, 2)$; 极大值 $f(1) = 5$, 极小值 $f(2) = 4$. 4. $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$, 驻点 $x = 0, 2$; $x = 2$ 处左正右负, 为极大值点, $f(2) = -8 + 12 = 4$ ——服药后 2 小时浓度最高, 极大值为 $4 \mu\text{g/mL}$. 5. 定义域 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$. (1) $a \leq 0$: 分子 $1 - ax \geq 1 > 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; (2) $a > 0$: $0 < x < \frac{1}{a}$ 时 $f'(x) > 0$, $x > \frac{1}{a}$ 时 $f'(x) < 0$, 故增区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, 减区间 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$. 无论 a 取何值, 讨论范围始终在定义域 $x > 0$ 内进行——把 $x < 0$ 的区间写进结论是本题最大陷阱. 6. $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, 分母恒为正. $f'(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$; $f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 1$. 故增区间 $(-1, 1)$, 减区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$. 两个减区间之间要写“和”, 不能写并集—— $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 并非单调递减 (如 $x = -2$ 与 $x = 2$ 时 $f(-2) = -\frac{2}{5} < f(2) = \frac{2}{5}$). 7. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0$ 恒成立, 且仅在 $x = 1$ 处等于 0, 左右两侧 f' 同号 (都为正), 不满足“左右变号”, 故 $x = 1$ 处无极大值 ($f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增). “ $f'(x_0) = 0$ ”只是极值的必要条件, 不是充分条件——必须检查左右变号。

- **7.4 节:** 1. $f'(x) = 3x(x-2)$, 驻点 $x = 0, 2$ (均在 $[-1, 3]$ 内); $f(-1) = -4$, $f(0) = 0$, $f(2) = -4$, $f(3) = 0$ ——最大值 0, 最小值 -4。2. $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$, 驻点 $x = 1, 2$; $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ ——最大值 9, 最小值 4。3. 设提价 x 元 ($0 \leq x \leq 20$), $R(x) = (10+x)(800-40x) = -40x^2 + 400x + 8000$, $R'(x) = -80x + 400$, $x = 5$; $R(5) = 15 \times 600 = 9000$ ——票价定为 15 元时日收入最大, 为 9000 元。4. $h = \frac{8}{r^2}$, $S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \frac{16\pi}{r}$; $S'(r) = 2\pi r - \frac{16\pi}{r^2} = \frac{2\pi(r^3 - 8)}{r^2}$, $r = 2$ 时 S 最小; $S(2) = 4\pi + 8\pi = 12\pi$ ——底面半径 2 m、高 2 m 时用料最省, 最少用料 $12\pi m^2$ 。

A1: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$ 。

A2: (1) $y' = 4x^3 + 6x$ 。(2) $y' = \ln x + 1$ 。(3) $y' = 2(3x-2) \cdot 3 = 6(3x-2) = 18x - 12$ 。

A3: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$ 。

A4: $f'(x) = 3(x^2 - 2)$; 增区间 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, 减区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。

A5: 极大值 $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$, 极小值 $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ 。

A6: $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, $f(3) = 9$; 最大值 9, 最小值 $-4\sqrt{2}$ 。

B7: $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$; 切线 $y - 1 = 3(x - 1)$, 即 $y = 3x - 2$ 。

B8: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 2$, $v(2) = 12 - 12 + 2 = 2$ m/s。

B9: 设垂直于墙的边长为 x m, 则平行于墙的边长为 $60 - 2x$ m, 面积

$$S(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x, \quad 0 < x < 30$$

$S'(x) = -4x + 60$, 令 $S'(x) = 0$ 得 $x = 15$ 。 $S(15) = 15 \times 30 = 450 m^2$ 。答: 宽 15 m、长 30 m 时面积最大, 最大面积 $450 m^2$ 。

C10: 设 $f(x) = e^x - 1 - x$, $f'(x) = e^x - 1$ 。当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 故 $x = 0$ 是最小值点, $f(0) = 0$ 。所以 $f(x) \geq 0$, 即 $e^x \geq 1 + x$, 等号当且仅当 $x = 0$ 时成立。

C11: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, 驻点 $x = 1 \in [0, 2]$ ($x = -1 \notin [0, 2]$ 舍去)。 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ 。最大值 3 (在 $x = 2$ 处), 最小值 -1 (在 $x = 1$ 处)。

第八章 卷末综合检测

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

Z1.（基础·集合运算）已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为（ ）

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

【答案】D

【解析】先解集合 B 中的不等式： $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \leq 0$, 解集为 $[1, 4]$, 取整数得 $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 于是 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, 共有 4 个元素。本题先“解不等式定集合”，再做集合交运算，是集合与一元二次不等式的综合基础题。

Z2.（基础·不等式恒成立）已知关于 x 的不等式 $x^2 - 2x + m > 0$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是（ ）

- A. $m < 1$
- B. $m > 1$
- C. $m \geq 1$
- D. $m \leq 1$

【答案】B

【解析】二次项系数 $1 > 0$, 抛物线开口向上。要恒有 $y > 0$, 图象必须始终在 x 轴上方, 即与 x 轴无交点, 等价于判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4m = 4 - 4m < 0$, 解得 $m > 1$ 。注意： $\Delta = 0$ 时抛物线与 x 轴相切, 存在 x 使函数值为 0, 不满足“恒大于 0”, 故取不到 $m = 1$ 。

Z3.（基础·函数性质）下列函数中, 既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是（ ）

- A. $y = x^3$
- B. $y = -x^2$
- C. $y = |x| + 1$
- D. $y = x + \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】逐项检验定义域关于原点对称后，看 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系：A 中 $y = x^3$ 是奇函数；B 中 $y = -x^2$ 是偶函数，但在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；C 中 $f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1 = f(x)$ ，是偶函数，且 $x > 0$ 时 $y = x + 1$ 单调递增，符合题意；D 中 $y = x + \frac{1}{x}$ 是奇函数。判断奇偶性先看定义域，再看 $f(-x)$ ，最后结合图象或解析式判断单调性。

Z4. (基础·指数对数) 计算 $\log_2 8 + \log_3 27 - 2^{\log_2 3}$ 的值为 ()

- A. 3
- B. 6
- C. 0
- D. 5

【答案】A

【解析】直接套基本公式： $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ ， $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ ，由对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$ 得 $2^{\log_2 3} = 3$ 。原式 $= 3 + 3 - 3 = 3$ 。本题考点为对数运算性质与对数恒等式，属基础送分题。

Z5. (中档·三角函数) 关于函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，下列说法正确的是 ()

- A. 值域为 $[-1, 1]$
- B. 最小正周期为 2π
- C. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
- D. 最小正周期为 π

【答案】D

【解析】由 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质：周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故 B 错、D 对；振幅 $A = 2$ ，值域为 $[-2, 2]$ ，A 错；对称中心满足 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ ，即 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，取 $k = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{6}$ ，取 $k = 1$ 得 $x = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ ， $\frac{\pi}{3}$ 不是对称中心，C 错。记准“振幅定值域、 ω 定周期、相位定对称轴与对称中心”三件事即可。

Z6. (中档·数列) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 + a_6 = 10$ ，则其前 7 项和 S_7 等于 ()

- A. 35
- B. 49
- C. 70
- D. 28

【答案】A

【解析】用等差数列的性质“下角标和相等的两项，其和相等”： $a_2 + a_6 = 2a_4$ ，故 $a_4 = 5$ 。又 $S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2}$ ，而 $a_1 + a_7 = 2a_4$ ，所以 $S_7 = 7a_4 = 35$ 。本题不求 a_1 、 d 也能出答案，体

现“整体代换”思想，比硬设首项公差更省时。

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

Z7.（基础·逻辑用语）命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定是：_____。

【答案】 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$

【解析】全称命题的否定是存在命题：量词“ $\forall$ ”换为“ $\exists$ ”，结论“ $>$ ”换为“ $\leq$ ”。改量词、否结论，两步缺一不可；常见错误是只否结论不改量词。

Z8.（基础·函数性质与指对）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时 $f(x) = \log_2 x + 1$ ，则 $f(-4) =$ _____。

【答案】 -3

【解析】由奇函数定义 $f(-x) = -f(x)$ ，得 $f(-4) = -f(4)$ 。而 $f(4) = \log_2 4 + 1 = 2 + 1 = 3$ ，故 $f(-4) = -3$ 。这类题先“把负自变量的函数值转化为正自变量的函数值”，再代解析式；注意奇函数的定义域必须关于原点对称。

Z9.（中档·数列）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$ ，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____。

【答案】 $a_n = 2n$

【解析】当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$ ；当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 2$ ，恰好也满足 $a_1 = 2 \times 1$ 。故 $a_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。用 $S_n - S_{n-1}$ 求通项后，务必单独验证 a_1 是否满足统一公式，这是易失分点。

Z10.（中档·导数与切线）曲线 $y = x^3 - 3x$ 在点 $(1, -2)$ 处的切线方程为_____。

【答案】 $y = -2$

【解析】求导得 $y' = 3x^2 - 3$ ，切线斜率 $k = y'(1) = 0$ ，切点 $(1, -2)$ 在曲线上。由点斜式得 $y - (-2) = 0 \cdot (x - 1)$ ，即 $y = -2$ 。本题斜率为 0，切线是水平直线，属“斜率退化为 0”的情形，不要因为觉得“太像没斜率”而放弃；先确认切点在曲线上，再用 $f'(x_0)$ 求斜率。

三、解答题（本大题共4小题，共50分）

Z11.（10分，中档·三角函数综合）已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，且 $0 < \theta < \pi$ 。

(1) 求 $\sin 2\theta$ 的值；

(2) 求 $\cos \theta - \sin \theta$ 的值；

(3) 求 $\tan \theta$ 的值。

【答案】(1) $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ ；(2) $\cos \theta - \sin \theta = -\frac{7}{5}$ ；(3) $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ 。

【解析】(1) 两边平方： $\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{25}$ ，即 $1 + \sin 2\theta = \frac{1}{25}$ ，故 $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ 。(2) $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = 1 - \sin 2\theta = \frac{49}{25}$ 。由 $\sin 2\theta < 0$ 且 $0 < \theta < \pi$ 知 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，此时 $\sin \theta > 0$ 、 $\cos \theta < 0$ ，故 $\cos \theta - \sin \theta < 0$ ，取负值 $-\frac{7}{5}$ 。(3) 联立 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ 与 $\cos \theta - \sin \theta = -\frac{7}{5}$ ，解得 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ， $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，所以 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$ 。本题关键是“平方降次”

与“由角的范围定符号”，符号定错整题全错。

Z12. (12分, 中档·数列综合) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, $a_5 = 13$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 令 $b_n = 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】 (1) $a_n = 3n - 2$; (2) $S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$; (3) $T_n = \frac{2(8^n-1)}{7}$ 。

【解析】 (1) 公差 $d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = \frac{13 - 4}{3} = 3$, $a_1 = a_2 - d = 1$, 故 $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ 。(2) $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 3n - 2)}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}$ 。(3) $b_n = 2^{3n-2} = \frac{8^n}{4}$, 首项 $b_1 = 2$ 、公比 $q = 8$ 的等比数列, $T_n = \frac{2(8^n - 1)}{8 - 1} = \frac{2(8^n - 1)}{7}$ 。第(3)问把指数式化为 $\frac{1}{4} \cdot 8^n$, 识别出等比数列, 是“等差套等比”的典型综合。

Z13. (14分, 压轴·导数综合) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + 1$, 其中 $a \in \mathbb{R}$ 。

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $M(a)$, 求 $M(a)$ 的解析式。

【答案】 (1) 增区间 $(-\infty, -1)$ 与 $(1, +\infty)$, 减区间 $(-1, 1)$; 极大值 $f(-1) = 3$, 极小值 $f(1) = -1$ 。

$$(2) M(a) = \begin{cases} 9 - 6a, & a \leq \frac{4}{3}, \\ 1, & a > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

【解析】 (1) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1$ 。当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, 故增区间为 $(-\infty, -1)$ 与 $(1, +\infty)$, 减区间为 $(-1, 1)$ 。 $x = -1$ 处取极大值 $f(-1) = 3$, $x = 1$ 处取极小值 $f(1) = -1$ 。

(2) $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ 。分情况讨论 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的单调性:

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增, $M(a) = f(2) = 9 - 6a$ 。

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{a}$ (负根 $-\sqrt{a}$ 不在 $[0, 2]$ 上)。

若 $\sqrt{a} \geq 2$ (即 $a \geq 4$), $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, $M(a) = f(0) = 1$ 。

若 $0 < \sqrt{a} < 2$ (即 $0 < a < 4$), $f(x)$ 在 $[0, \sqrt{a}]$ 上递减、在 $[\sqrt{a}, 2]$ 上递增, 最大值在端点取得: $M(a) = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{1, 9 - 6a\}$ 。比较 $9 - 6a$ 与 1 : 当 $a \leq \frac{4}{3}$ 时 $9 - 6a \geq 1$, $M(a) = 9 - 6a$; 当 $a > \frac{4}{3}$ 时 $M(a) = 1$ 。

综上 ($a \leq 0$ 与 $0 < a \leq \frac{4}{3}$ 两个分支的表达式相同, 可合并): $M(a) = \begin{cases} 9 - 6a, & a \leq \frac{4}{3}, \\ 1, & a > \frac{4}{3}. \end{cases}$

为什么错: 本题常见错误有三。其一, 求驻点把 $x^2 - a$ 的零点误写为 $x = \pm a$, 应为 $x = \pm\sqrt{a}$; 其二, 含参讨论时忽略 $\sqrt{a}$ 与区间端点 $0, 2$ 的位置关系, 直接把 $\sqrt{a}$ 处的极值当最值——闭区间上的最值须比较极值与端点值; 其三, 合并 $M(a)$ 的分段表达式时漏掉 $a \leq 0$ 的情形。对

策：画 $f'(x)$ 符号草图，把 $\sqrt{a}$ 与 0、2 的相对位置分三类（区间外左侧、区间内、区间外右侧）逐一讨论。

Z14. (14 分，压轴·数列综合) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

- (1) 证明：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列；
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (3) 令 $b_n = \frac{n}{a_n + 1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】 (1) 见解析；(2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ ；(3) $T_n = \frac{9}{8}(1 - 3^{-n}) - \frac{3n}{4 \cdot 3^n}$ 。

【解析】 (1) 对递推式两边同时加 1: $a_{n+1} + 1 = 3a_n + 3 = 3(a_n + 1)$ ，又 $a_1 + 1 = 2 \neq 0$ ，故 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2、公比为 3 的等比数列。(2) 由 (1) $a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ ，故 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ 。(3) $b_n = \frac{n}{2 \cdot 3^{n-1}}$ ，设 $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^{k-1}}$ ，则 $T_n = \frac{1}{2}P_n$ 。用错位相减法：

$$P_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}},$$

$$\text{两边乘 } \frac{1}{3}: \frac{1}{3}P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n},$$

$$\text{相减得 } \frac{2}{3}P_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{1 - 3^{-n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2}(1 - 3^{-n}) - \frac{n}{3^n},$$

$$\text{于是 } P_n = \frac{9}{4}(1 - 3^{-n}) - \frac{3n}{2 \cdot 3^n}, \text{ 故 } T_n = \frac{9}{8}(1 - 3^{-n}) - \frac{3n}{4 \cdot 3^n}.$$

$$\text{检验: } T_1 = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } b_1 = \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2}, \text{ 相符.}$$

为什么错：本题常见错误有三。其一，构造等比数列时“配常数”方向搞反——由 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ 应两边加 1 配出 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ （常数项应配出使右边系数能提取公比 3 的数值），有同学误配成减 1 或配成别的常数；其二，错位相减时漏项或符号错，例如等比求和部分误把 $\frac{1}{3}$ 当 3、丢末尾项 $\frac{n}{3^n}$ ；其三，算完 T_n 不检验，把小问 (1) (2) 的错误一路带到 (3)。对策：构造等比时记住“两边同加 $\frac{2}{3-1} = 1$ ”，错位相减后取 $n = 1$ 代入原式核对。

参考答案速查

题号	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
答案	D	B	C	A	D	A	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$	-3	$a_n = 2n$	$y = -2$

解答题答案见各题 **【答案】**。