

GRADUS

数学 II

解答册

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 平面向量与解三角形	1
1.1 例题详解	1
1.2 知识点 (1) 向量的概念与线性运算详解	1
1.3 例题详解	2
1.4 知识点 (1) 坐标表示与坐标运算详解	2
1.5 知识点 (2) 基底表示与向量共线详解	2
1.6 例题详解	3
1.7 知识点 (1) 数量积的定义、夹角与投影详解	3
1.8 知识点 (2) 数量积的坐标运算与垂直详解	4
1.9 例题详解	4
1.10 知识点 (1) 正弦定理与三角形解的个数详解	5
1.11 知识点 (2) 余弦定理与三角形形状判定详解	5
1.12 知识点 (3) 解三角形的应用详解	7
第二章 复数	9
2.1 例题详解	9
2.2 知识点 (1) 虚数单位与复数的分类详解	9
2.3 例题详解	10
2.4 知识点 (1) 复数的加减与乘法详解	10
2.5 知识点 (2) 复数的除法详解	10
2.6 例题详解	11
2.7 知识点 (1) 复数的模与复平面详解	12
2.8 知识点 (2) 共轭复数与 $z\bar{z}$ 详解	12
2.9 例题详解	13
2.10 知识点 (1) 复数的三角形式与辐角详解	13

2.11 知识点 (2) 模的几何意义详解	14
第三章 立体几何初步	15
3.1 例题详解	15
3.2 知识点 (1) 棱柱、棱锥、棱台的结构特征详解	16
3.3 知识点 (2) 柱、锥、台的表面积与体积详解	17
3.4 例题详解	18
3.5 知识点 (1) 斜二测画法与直观图面积详解	19
3.6 知识点 (2) 三视图详解	20
3.7 例题详解	21
3.8 知识点 (1) 位置关系的判定详解	21
3.9 知识点 (2) 异面直线所成角详解	22
3.10 例题详解	22
3.11 知识点 (1) 线面平行与线面垂直的判定详解	23
3.12 知识点 (2) 面面垂直与体积详解	24
第四章 空间向量与立体几何	27
4.1 例题详解	27
4.2 知识点 (1) 空间向量的线性运算与模长详解	27
4.3 知识点 (2) 数量积、夹角与垂直详解	28
4.4 例题详解	28
4.5 知识点 (1) 空间向量基本定理与四点共面详解	29
4.6 知识点 (2) 建系与点的坐标详解	30
4.7 知识点 (3) 平面的法向量详解	30
4.8 例题详解	30
4.9 知识点 (1) 方向向量与法向量的位置关系判定详解	31
4.10 知识点 (2) 向量法证明平行与垂直详解	32
4.11 例题详解	32
4.12 知识点 (1) 异面直线所成角详解	33
4.13 知识点 (2) 线面角详解	33
4.14 知识点 (3) 二面角详解	35
4.15 例题详解	38
4.16 知识点 (1) 点到平面的距离详解	39

4.17 知识点 (2) 点到直线、异面直线的距离详解	39
第五章 直线与圆的方程	43
5.1 例题详解	43
5.2 知识点 (1) 直线的倾斜角与斜率详解	43
5.3 知识点 (2) 直线方程的几种形式详解	44
5.4 例题详解	45
5.5 知识点 (1) 两条直线的位置关系与交点详解	46
5.6 知识点 (2) 距离公式与对称详解	46
5.7 例题详解	47
5.8 知识点 (1) 圆的标准方程与一般方程详解	47
5.9 知识点 (2) 圆与圆的位置关系详解	48
5.10 例题详解	49
5.11 知识点 (1) 直线与圆的位置关系与弦长详解	50
5.12 知识点 (2) 圆的切线方程详解	51
5.13 知识点 (3) 圆上点到直线的距离最值详解	52
第六章 圆锥曲线的方程	55
6.1 例题详解	55
6.2 知识点 (1) 椭圆的定义与标准方程详解	55
6.3 知识点 (2) 椭圆的几何性质与离心率详解	56
6.4 知识点 (3) 椭圆的焦点三角形与焦点弦详解	57
6.5 例题详解	58
6.6 知识点 (1) 双曲线的定义与标准方程详解	58
6.7 知识点 (2) 双曲线的几何性质与离心率 (含焦点三角形) 详解	59
6.8 例题详解	60
6.9 知识点 (1) 抛物线的定义与标准方程详解	61
6.10 知识点 (2) 抛物线的焦点弦与焦半径详解	62
6.11 例题详解	64
6.12 知识点 (1) 直线与圆锥曲线的位置关系详解	64
6.13 知识点 (2) 弦长公式与中点弦 (点差法) 详解	65
第七章 卷末综合检测	69

第一章 平面向量与解三角形

1.1 例题详解

例题 1.1 解析

思考路径：区分向量与标量只有一个标准——有没有方向。化简向量式则用“首尾相接”与“共起点连终点”两条法则逐步消去中间点。

规范解：(1) 位移、速度、力是**向量**（带方向）；速率、路程是**标量**（只有大小）。(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ （首尾相接，起点到终点）； $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ （减法化加法，首尾相接）。

易错点：速率与速度仅一字之差——速率是标量、速度是向量；减法要先“加相反向量”再首尾相接，指向不能弄反。

1.2 知识点 (1) 向量的概念与线性运算详解

A1. B。

思路：逐项核对“相等向量 = 同向且等长”。

解析：A 错，模相等只保证长度相同，方向可不同；B 对，相等向量必同向等长，故模相等；C 错，零向量方向任意，不能说成“北偏东 30° ”；D 错，单位向量模为 1 但方向任意。**易错点：**D 是典型陷阱——“单位”只约束长度，不约束方向。

A2. A。

思路：首尾相接消中间点，减法转加法。

解析： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ ； $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ 。**易错点：** $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$ ，反向不能漏。

M1. B。

思路：专查零向量的“方向任意”与向量可否比大小。

解析：A 错，零向量方向**任意**不等于“没有方向”；B 对，零向量与任何向量都平行；C 错， $\vec{a} = \vec{b}$ 要求方向**相同**；D 错，向量不能比较大小，能比的是模。

为什么错：选 A 的同学把“方向任意”理解成“没方向、可忽略”，选 D 的同学把“模能比”顺手推广成“向量能比”——记住：方向没有大小之分，比大小前必须把方向丢掉，只看模。

1.3 例题详解

例题 1.2 解析

思考路径：坐标加减按对应分量运算，模用勾股定理；共线用叉积式条件 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 列方程。

规范解：(1) $\vec{a} + \vec{b} = (2 - 1, -1 + 3) = (1, 2)$; $2\vec{a} - \vec{b} = (4, -2) - (-1, 3) = (5, -5)$; $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ 。(2) $\vec{c} \parallel \vec{a} \Rightarrow 2 \cdot k - 1 \cdot (-1) = 0$, 即 $2k + 1 = 0$, $k = -\frac{1}{2}$ 。

易错点：共线条件是 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, 不要与垂直条件 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ 记混——一个叉积一个点积。

1.4 知识点 (1) 坐标表示与坐标运算详解

A3. A。

思路：对应分量相加减。

解析： $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, 2 + 1) = (4, 3)$; $\vec{a} - \vec{b} = (1 - 3, 2 - 1) = (-2, 1)$ 。

A4. B。

思路：共线坐标条件列方程。

解析： $2 \times 6 - 3m = 0 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$ 。**易错点：**叉积式 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 的顺序别写反。

1.5 知识点 (2) 基底表示与向量共线详解

B2. (2022 · 新高考 I 卷) B。

思路：把 $\vec{CB}$ 拆成 $\vec{CA} + \vec{AB}$, 再用 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 把 $\vec{AB}$ 解出来。

解析：由 $\vec{BD} = 2\vec{DA}$ 知 $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ 。于是

$$\vec{n} = \vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{m} + \frac{1}{3}\vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = 3(\vec{n} - \vec{m})$$

故 $\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{m} + 3\vec{n} - 3\vec{m} = 3\vec{n} - 2\vec{m} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ 。**易错点：** $\vec{BD} = 2\vec{DA}$ 推出 $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ 时方向别弄反——D 是 AB 上的三等分点，靠近 A。

M2. C。

思路：共线只看方向（相同或相反），再看系数符号定方向。

解析： $\vec{b} = 3\vec{a}$, $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$, 故 $\vec{c} = -\frac{1}{6}\vec{b}$ ——存在实数倍关系，**共线**；系数为负，**方向相反**。A 错（明显共线）；B 错（方向相反）；D 错（长度不同）。

为什么错：选 B 的同学以为“共线”只指同向；选 A 的同学还停留在初中“平行 $\neq$ 共线”的印象里——向量里**平行就是共线**，方向相同或相反都算，用“是否差一个实数倍”一句话判定，系数正负管方向。

1.6 例题详解

例题 1.3 解析

思考路径：数量积定义式，投影代 $|\vec{b}|\cos\theta$ ——关键是 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 为负。

规范解：(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = 3 \times 4 \times \cos 120^\circ = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$ 。(2) $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影 $= |\vec{b}|\cos 120^\circ = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ 。

易错点：投影结果是**负数**——钝角时 $\vec{b}$ 的投影落在 $\vec{a}$ 的反向延长线上，投影是带符号的实数，不能说成“长度”。

1.7 知识点 (1) 数量积的定义、夹角与投影详解

A5. A。

思路：坐标式点积：横乘横加纵乘纵。

解析： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + (-2) \times 3 = 2 - 6 = -4$ 。

B5. (2022 · 全国乙卷理) C。

思路：模长条件先平方再展开数量积——含模的条件一律“平方处理”。

解析： $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 3^2$ ，即

$$|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9$$

代入 $|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ： $1 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 12 = 9$ ，故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 。答案 C。

易错点：展开 $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2$ 时交叉项是 $-2 \times 2 = -4$ 倍 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，系数别写成 -2 ； $|\vec{b}|^2 = 3$ 前面还乘了 4，代入时 12 别丢。

M3. B。

思路：数量积符号只看 $\cos\theta$ 的符号，投影是可正可负的实数。

解析：A 错——同向（夹角 0° ）时 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| > 0$ 但夹角不是锐角；B 对—— $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta$ 为钝角；C 错——钝角时投影为负；D 错——还可能 $\vec{a} \perp \vec{b}$ （两者都非零，点积照样为 0）。

为什么错：选 A 的同学只背“正 = 锐角”，忘了同向 0° 也是正；选 C 的同学把投影当成“线段长度”，其实投影是带符号的实数，钝角为负；选 D 的同学把“乘积为 0”强行类比实数乘法——数量积为 0 只说明两向量垂直，不要求某一为零。

C1. (1) $\sqrt{13}$ ；(2) $\frac{5}{2\sqrt{13}}$ 。

思路： $|\vec{c}|^2$ 用 $\vec{c} \cdot \vec{c}$ 展开；夹角余弦用 $\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|}$ 。

解析： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3$ 。(1) $|\vec{c}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 + 9 - 12 = 13$ ，

$$|\vec{c}| = \sqrt{13}。 (2) \vec{c} \cdot \vec{a} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 3 = 5,$$

$$\cos \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|} = \frac{5}{\sqrt{13} \times 2} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$$

易错点： $|\vec{c}|^2$ 要先“平方展开”再开方，不能把 $2\vec{a} - \vec{b}$ 当普通数直接平方；展开时中间项系数是 $2 \times 2 \times 1 = 4$ 倍 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。

1.8 知识点 (2) 数量积的坐标运算与垂直详解

A6. B。

思路：模 $= \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

解析： $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ 。

B1. (2023 · 新课标 I 卷) D。

思路：先算 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \mu\vec{b}$ 的坐标，再由垂直即数量积为 0 列式。

解析： $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$, $\vec{a} + \mu\vec{b} = (1 + \mu, 1 - \mu)$ 。垂直 $\Rightarrow$ 点积为 0：

$$(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 2 + 2\lambda\mu = 0$$

故 $\lambda\mu = -1$ 。**易错点：** $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu\vec{b})$ 要按向量运算律展开，含 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{b} = 2$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 会得到同一结果 $2 + 2\lambda\mu$ ——两种算法殊途同归。

B3. (2024 · 新课标 I 卷) D。

思路：算 $\vec{b} - 4\vec{a}$ 的坐标，垂直 $\Rightarrow$ 点积为 0，解方程。

解析： $\vec{b} - 4\vec{a} = (2, x) - (0, 4) = (2, x - 4)$ 。

$$\vec{b} \cdot (\vec{b} - 4\vec{a}) = 2 \times 2 + x(x - 4) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

故 $x = 2$ 。**易错点：** $\vec{b} - 4\vec{a}$ 是把 $\vec{a}$ 的坐标整体乘 4 再相减，纵坐标 $x - 4$ 别写成 $4 - x$ 。

1.9 例题详解

例题 1.4 解析

思考路径：已知两边一夹角求第三边，用余弦定理；面积用 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 。注意 $\cos A = \frac{1}{2}$ 说明 $A = 60^\circ$ 。

规范解：(1) 由余弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39$$

故 $a = \sqrt{39}$ 。(2) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$ 。

易错点：余弦定理中 $\cos A$ 对应的是 A 的**两边** b, c ，第三边 a 单独在左边； $\cos A = \frac{1}{2}$ 时 $A = 60^\circ$ ， $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，正弦值不要用成 $\frac{1}{2}$ 。

1.10 知识点 (1) 正弦定理与三角形解的个数详解

A7. B。

思路：两角一边，正弦定理。

解析： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ 。

M4. B。

思路：SSA 情形先算 $\sin B$ ，再看取值区间判断解数。

解析： $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{5 \times \frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8} = 0.625$ 。 $B_1 = \arcsin 0.625 \approx 38.7^\circ$ (锐角)， $B_2 = 180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$ (钝角)。检验内角和： $A + B_2 = 30^\circ + 141.3^\circ = 171.3^\circ < 180^\circ$ ，两解都合法。且 $a = 4 < b = 5$ ，“大边对大角”允许 B 取钝角，故**两解**。

为什么错：选 A 或 D 的同学用计算器 $\arcsin$ 只给出锐角 38.7° ，就默认一解—— $\sin$ 值在 $(0, 1)$ 内时对应锐角、钝角两个角，必须用“内角和”与“大边对大角”复查；选 C 的同学则把 $a < b$ 误判为无解（无解只发生在 $\sin B > 1$ 时）。口诀： $a \geq b$ 时**一解**， $a < b$ 时**要查**。

1.11 知识点 (2) 余弦定理与三角形形状判定详解

A8. B。

思路：三边判断形状，看最大边平方与另两边平方和的大小。

解析：最大边 $c = 5$ ， $c^2 = 25$ ， $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ ，相等，故为直角三角形。**易错点：**必须先定最大边再比较——拿非最大边去比会得出错误结论。

B4. (2023 · 新课标 I 卷) (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ；(2) 6。

思路：(1) 由 $A + B = 3C$ 与内角和定 C ，再把 $2\sin(A - C) = \sin B$ 展开成 $\sin A$ 、 $\cos A$ 的关系；(2) 用正弦定理求边，再借助“面积 = 底 $\times$ 高 $\div 2$ ”反求高。

解析：(1) $A + B + C = \pi$ 且 $A + B = 3C$ ，得 $4C = \pi$ ， $C = \frac{\pi}{4}$ 。由 $\sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C)$ ，条件化为 $2\sin(A - C) = \sin(A + C)$ 。展开：

$$2(\sin A \cos C - \cos A \sin C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$$

代入 $\cos C = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，得 $\sqrt{2}(\sin A - \cos A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$ ，即

$$2\sin A - 2\cos A = \sin A + \cos A \Rightarrow \sin A = 3\cos A \Rightarrow \tan A = 3$$

A 为三角形内角, 故 $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。(2) $AB = 5$ 即 $c = 5$ 。由正弦定理:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{5 \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{5}$$

$\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$, 则

$$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

AB 边上的高 $h = a \sin B = 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 6$ 。

易错点: (1) 中 “ $\sin A = 3 \cos A$ ” 推出 $\tan A = 3$ 后, A 只能是锐角 (若 A 为钝角, $\cos A < 0$, $\sin A = 3 \cos A$ 不成立), 故 $\sin A$ 取正根, 不能取负; (2) 中 “ AB 边上的高” 是 c 边上的高, 等于 $a \sin B$ 或 $b \sin A$, 别套错边。

为什么错: 本题最经典的丢分在两处——(1) 由 $\tan A = 3$ 求 $\sin A$ 时, 有的同学直接写 $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 却不说明为什么取正, 一旦 A 是钝角就会错 (正切为负时根号下符号要重判); (2) 求高时把 “ AB 边上的高” 理解成 “ A 或 B 引出的高”, 实际上 “ AB 边上的高” = c 边上的高, 应取 $a \sin B$ 。正确思路是: 先由正切关系判角型, 再统一走正弦定理求边。

B6. (2022 · 全国乙卷理) 证明见解析。

思路: 边角混合等式——先把 $\sin(A - B)$ 、 $\sin(C - A)$ 按两角差公式展开, 合并同类项后利用 $\sin(B + C) = \sin A$ 收缩, 再用正弦定理 “角化边”, 最后与余弦定理联立。

解析: 由 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$ 展开:

$$\sin C(\sin A \cos B - \cos A \sin B) = \sin B(\sin C \cos A - \cos C \sin A)$$

移项整理:

$$\sin A \sin C \cos B + \sin A \sin B \cos C = 2 \cos A \sin B \sin C$$

左边提取 $\sin A$, 且 $\sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin(B + C) = \sin A$ (内角和为 π), 故

$$\sin^2 A = 2 \sin B \sin C \cos A$$

由正弦定理 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 、 $\sin B = \frac{b}{2R}$ 、 $\sin C = \frac{c}{2R}$ 代入:

$$\frac{a^2}{4R^2} = \frac{2bc \cos A}{4R^2} \Rightarrow a^2 = 2bc \cos A$$

再由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 代入:

$$a^2 = 2bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 + c^2 - a^2$$

移项即得 $2a^2 = b^2 + c^2$ 。得证。■

易错点：展开后要大胆合并——把含 $\cos A$ 的项集中到一边，剩下的用 $\sin(B+C) = \sin A$ 一步收缩；“角化边”时记得每项都除以 $2R$ ，别只化 $\sin A$ 而漏 $\sin B$ 、 $\sin C$ 。

为什么错：常见错误有两种——(1) 展开后不敢合并，硬把 $\sin A \sin C \cos B$ 之类当作整体保留，结果式子越来越乱；(2) 角化边时漏了公因子 $2R$ ，直接把 $\sin A = a$ 代入，导致结论差一个比例常数。正确做法是：**先合并收缩成最简三角恒等式，再统一用 $a = 2R \sin A$ 换边**，最后只剩一个余弦定理关系。

1.12 知识点 (3) 解三角形的应用详解

C2. (1) 20 km；(2) 方向角：北偏西 30° ；方位角： 120° 。

思路：把航行路线放入 $\triangle OAB$ ，已知 OA 、 AB 及夹角 $\angle OAB$ ，用余弦定理求 OB ；方向用 $\angle AOB$ 定位。

解析：(1) $\angle OAB = 30^\circ$ ，由余弦定理：

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \times OA \times AB \times \cos 30^\circ = 400 + 1200 - 2 \times 20 \times 20 \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1600 - 1200 = 400$$

故 $OB = 20$ km。(2) $\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \times OA \times OB} = \frac{400 + 400 - 1200}{2 \times 20 \times 20} = -\frac{1}{2}$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ 。从正东方向逆时针转 120° ：先到正北 (90°) 再偏西 30° ，故 B 在 O 的**北偏西 30°** (方向角)；方位角从正北顺时针量，为 $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ 。

易错点：方向角是“偏”出来的锐角 (北偏西 30°)，方位角是“从北顺时针量”的角 (120°)——两者不能混用，这是航海测量题最经典的丢分点。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：(1) 把 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ 两边平方展开，解出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，再求夹角；(2) 用 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 代入 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 。

规范解：(1) $|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 1 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ ，故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ 。夹角 θ ： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ ， $\theta = 60^\circ$ 。(2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 1 + 1 = 3$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ 。

易错点：含模的条件一律“平方处理”； $|2\vec{a} - \vec{b}|^2$ 展开时交叉项系数是 $2 \times 2 \times 1 = 4$ ，别漏系数。

S2 解析

思考路径：(1) 边角混合式用正弦定理“边化角”，约去公共因子；(2) 面积公式联立余弦定理求 $a + b$ 。

规范解：(1) $b \sin C = 2c \sin B \cos C$ 。由正弦定理 $b = 2R \sin B$ 、 $c = 2R \sin C$ 代入：

$$\sin B \sin C = 2 \sin C \sin B \cos C$$

$\sin B \sin C \neq 0$, 约去得 $1 = 2 \cos C$, $\cos C = \frac{1}{2}$, $C = 60^\circ$ 。(2) $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 故 $ab = 1$ 。由余弦定理:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab = 3$$

于是 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + b^2 - ab) + 3ab = 3 + 3 = 6$, 故 $a+b = \sqrt{6}$ 。

易错点: (1) 边化角后公因子 $\sin B \sin C$ 要判断不为 0 再约; (2) 求 $a+b$ 不要死解 a 、 b 两个未知数——用 $(a+b)^2$ 的整体代换一步到位。

第二章 复数

2.1 例题详解

例题 2.1 解析

思考路径：实数要求虚部为 0；纯虚数要求**实部为 0 且虚部不为 0**——两个条件缺一不可。

规范解：(1) z 为实数 $\Rightarrow m+1=0$ ，故 $m=-1$ 。(2) z 为纯虚数 $\Rightarrow m-1=0$ 且 $m+1 \neq 0$ ，故 $m=1$ 。此时 $z=2i$ （虚部 $2 \neq 0$ ，检验通过）。

易错点： $m=1$ 时实部为 0 是纯虚数；而 $m=-1$ 时虚部为 0 是实数 $z=-2$ ——“实部为 0”与“虚部为 0”不要搞反，纯虚数必须同时满足 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 。

2.2 知识点 (1) 虚数单位与复数的分类详解

A1. C。

思路： $z=a+bi$ 中虚部是系数 b 。

解析： $z=3-2i=3+(-2)i$ ，实部 3，虚部 -2 。**易错点：**选 A 的同学把虚部写成 $-2i$ ——虚部是实数系数，不带 i 。

A2. A。

思路：复数相等——实部实部等、虚部虚部等，解方程组。

解析： $x+y=4$ ， $x-y=2$ 。两式相加得 $2x=6$ ， $x=3$ ；代入得 $y=1$ 。

M1. B。

思路：逐项核对虚部定义、共轭相等条件、复数可比较性、复数相等条件。

解析：A 错， $1-5i$ 的虚部是 -5 （系数），不是 $-5i$ ；B 对， $z=\bar{z}$ 推出虚部为 0，故 z 是实数；C 错，虚数（含虚部的复数）不能比较大小；D 错， $2+i$ 与 $1+2i$ 实部不同，不相等。

为什么错：选 A 的同学被“虚部”两个字里的 i 带跑——虚部是“虚部系数”；选 C 的同学把实数的“可比较大小”迁移到复数——复数对应平面上的点，点与点之间没有大小；选 D 的同学只比了虚部或凭感觉——复数相等必须**实部与虚部同时相等**。

M4. A。

思路：纯虚数要求实部为 0 且虚部不为 0，逐一验证。

解析：A 对—— $a = 1$ 时 $z = 0 + 2i = 2i$ ，实部 0、虚部 $2 \neq 0$ ，是纯虚数。B 错—— $a = -1$ 时 $z = -2 + 0i = -2$ ，是实数不是纯虚数。C 错—— $a = 1$ 时 $z = 2i$ 是虚数。D 错—— $z = 0$ 需 $a - 1 = 0$ 且 $a + 1 = 0$ ，两式矛盾，不存在这样的 a 。

为什么错：选 B 的同学只看了“虚部为 0”就急着判纯虚数，把条件记反了——纯虚数要的是实部为 0；选 D 的同学想让 a 同时满足两个矛盾条件而不自知。判“纯虚数”两步：实部为 0，再验虚部不为 0。

2.3 例题详解

例题 2.2 解析

思考路径：加减按实部虚部分别合并；乘法按多项式展开后代入 $i^2 = -1$ ；除法先乘分母共轭把分母实数化。

规范解：(1) $(3 + 4i) + (2 - i) = (3 + 2) + (4 - 1)i = 5 + 3i$ 。(2) $(1 + 2i)(2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$ 。(3) $\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 。

易错点：(2) 中 $i^2 = -1$ ，+2 而不是 -2——代入符号最容易错；(3) 中分母 $(1 - i)(1 + i) = 2$ 是实数，分子每一项都要乘到。

2.4 知识点 (1) 复数的加减与乘法详解

A3. A。

思路：展开后合并，代入 $i^2 = -1$ 。

解析： $(2 - i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 6 + i + 2 = 8 + i$ 。

M2. B。

思路： $i^2 = -1$ 必须代入；除法分母必须共轭化，不能“各除各的”。

解析： $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ ，B 对。A 错——漏了交叉项 $2i$ ($(1 + i)^2$ 不是 $1^2 + i^2$)；C 错——漏了 $i^2 = -1$ 的代入；D 错—— $\frac{1 + i}{1 - i} = i \neq 0$ ，除法要先乘分母共轭。

为什么错：选 A 的同学把 $(1 + i)^2$ 当成了“平方和展开的缩略版”，丢掉了 $2i$ ；选 C 的同学记住了展开却没把 i^2 换成 -1 ；选 D 的同学把复数除法类比实数“分子分母各约各的”——除法的唯一正确路径是**同乘分母共轭**，把分母化成实数。

2.5 知识点 (2) 复数的除法详解

A4. C。

思路：分子分母同乘分母的共轭 $1 + i$ 。

解析： $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$ 。**易错点：** $\frac{1+i}{1-i} = i$ 是高频结论，但别背结论忘了“分母共轭化”的步骤。

B1. (2024 · 新课标 I 卷) C。

思路：把等式当关于 z 的方程解，或分离常数。

解析： $\frac{z}{z-1} = 1+i \Rightarrow z = (z-1)(1+i) = z-1+zi-i$ ，移项得 $zi = 1+i$ ，故

$$z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{-i^2} = \frac{-i-i^2}{1} = 1-i$$

易错点：除以 i 是“乘 $-i$ ”而不是“去 i ”； $\frac{1}{i} = -i$ 要记牢。检验： $\frac{1-i}{-i} = \frac{(1-i)i}{-i^2} = \frac{i-i^2}{1} = 1+i$ ✓。

B2. (2023 · 新课标 I 卷) A。

思路：先化简 z ，再写 $\bar{z}$ ，最后作差。

解析：

$$z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2 \times 2} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

故 $\bar{z} = \frac{1}{2}i$ ， $z - \bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$ 。**易错点：** z 是纯虚数 $-\frac{1}{2}i$ ，实部为 0——写 $\bar{z}$ 时实部还是 0，只把虚部系数变号，别多写实部。

B6. (2022 · 全国甲卷理) A。

思路：先算 $z\bar{z} = |z|^2$ 把分母化为实数，再整体代换。

解析： $z\bar{z} = |z|^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ 。于是

$$\frac{z}{z\bar{z}-1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4-1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

答案 A。**易错点：** $z\bar{z} = |z|^2$ 是实数 4，别先把 z 与 $\bar{z}$ 展开相乘再减——直接用模公式一步到位； z 除以实数 3 是实部、虚部分量各除以 3，不要把 i 的系数弄丢。

2.6 例题详解

例题 2.3 解析

思考路径：共轭只把虚部变号；模用勾股定理； $z\bar{z}$ 直接代万能钥匙 $z\bar{z} = |z|^2$ ； $|z-i|$ 按两复数之差再求模。

规范解：(1) $\bar{z} = 3+4i$ ； $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ 。(2) $z\bar{z} = |z|^2 = 25$ 。(3) $z-i = 3-5i$ ， $|z-i| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$ 。

易错点： $z\bar{z}$ 是实数 (等于 $|z|^2$)，不是 z^2 —— $z^2 = (3-4i)^2 = -7-24i$ ，与 25 完全不同。

2.7 知识点 (1) 复数的模与复平面详解

A5. B。

思路：模 $= \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

解析： $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ 。

B3. (2024 · 新课标 II 卷) C。

思路：直接代模公式。

解析： $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 。易错点：别把 $|z|$ 当“去掉负号”—— $z = -1 - i$ 去掉负号会误得 $1 + i$ 的模，实际是 $\sqrt{2}$ 。

M3. A。

思路：分别算 $|z|^2$ 与 z^2 作对比，区分“模的平方”与“复数的平方”。

解析： $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $|z|^2 = 2$ ； $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ 。故 $|z|^2 = 2 \neq 2i = z^2$ ，A 对。B 错 ($z^2 = 2i$ 不是 2)；C 错 ($|z| = \sqrt{2} \neq 2$)；D 错 (模的公式里是实数的平方和，不能出现 i^2)。

为什么错：选 B/C 的同学沿用了实数的 $|a|^2 = a^2$ ——对复数这~~不成立~~， $|z|^2$ 是“模的平方” (正实数)， z^2 是“复数的平方” (还是复数)；选 D 的同学把 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 里 b 的位置填成了 i ——模只由实部、虚部两个**实数**决定。

C1. (1) $z = 4i$ ；(2) $2\sqrt{5}$ 。

思路： $\frac{z}{i}$ 是正实数 $\Rightarrow z$ 是虚轴正半轴上的纯虚数；再代入 $|z - 2i| = 2$ 求参数。

解析：设 $z = a + bi$ 。 $\frac{z}{i} = \frac{(a + bi)(-i)}{-i^2} = b - ai$ 为正实数，故 $a = 0$ 且 $b > 0$ ，即 $z = bi$ ($b > 0$)。(1) $|z - 2i| = |(b - 2)i| = |b - 2| = 2$ ，得 $b - 2 = \pm 2$ ， $b = 4$ 或 $b = 0$ 。因 $b > 0$ ，取 $b = 4$ ， $z = 4i$ 。(2) $|z + 2| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ 。

易错点： $\frac{z}{i}$ 化简要先乘 $-i$ 再代入 $i^2 = -1$ ，得 $b - ai$ 而非“上下约 i ”；“正实数”同时约束了实部为 0 与虚部为正。

2.8 知识点 (2) 共轭复数与 $z\bar{z}$ 详解

A6. B。

思路： $z\bar{z} = |z|^2$ 。

解析： $z\bar{z} = (2 + i)(2 - i) = 4 + 1 = 5$ 。

B4. (2023 · 北京卷) C。

思路：坐标 (1, 2) 还原复数 $z = 1 + 2i$ ，再取共轭。

解析： $z = 1 + 2i$ ， $\bar{z} = 1 - 2i$ 。易错点：共轭是“实部不变、虚部变号”，不要变成 $-1 - 2i$ 之类的形式。

B5. (2022 · 全国乙卷理) A。

思路：代入 z 与 $\bar{z}$ ，把左式整理成“实部 + 虚部 $\cdot i$ ”的标准形，再令实部、虚部分别为 0 解 a 、 b 。

解析： $z = 1 - 2i$ ， $\bar{z} = 1 + 2i$ 。代入：

$$z + a\bar{z} + b = (1 - 2i) + a(1 + 2i) + b = (1 + a + b) + (2a - 2)i = 0$$

由复数等于 0 得 $\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 2a - 2 = 0 \end{cases}$ ，解得 $a = 1$ ， $b = -2$ 。答案 A。

易错点： $\bar{z} = 1 + 2i$ 的虚部是正号，代入 $a\bar{z}$ 得 $+2ai$ ，符号别写反；实部方程是 $1 + a + b = 0$ ，解得 $b = -2$ 后回代验算： $1 + 1 - 2 = 0$ ✓。

2.9 例题详解

例题 2.4 解析

思考路径：化三角形式先求模 r ，再按点的象限定辐角；求积的模用“模相乘”，不必展开乘法。

规范解：(1) $r = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 。点 $(-1, 1)$ 在第二象限，辐角 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ，故

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

(2) $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + 3} = 2$ ， $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$ ，故 $|(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)| = |1 + \sqrt{3}i| |\sqrt{3} + i| = 4$ 。

易错点：辐角由点的象限决定—— $(-1, 1)$ 是第二象限，辐角 $\frac{3\pi}{4}$ 而不是 $\frac{\pi}{4}$ ；积的模用乘法性质一步到位，硬展开 $(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 4i$ 也能得 $|4i| = 4$ ，两条路一致。

2.10 知识点 (1) 复数的三角形式与辐角详解

A7. A。

思路： $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，辐角由 $\cos \theta = \frac{a}{r}$ 、 $\sin \theta = \frac{b}{r}$ 定。

解析： $r = \sqrt{3 + 1} = 2$ ； $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ，故 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。

C2. (1) $S_1 = 1 + i$ ， $S_2 = -1 + i$ ；(2) $S_1 S_2 = -2$ ， $|S_1 S_2| = 2$ ，辐角为 π 。

思路：三角形形式化坐标式代入特殊角值；乘积按“模相乘、辐角相加”。

解析：(1) $S_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i$ ； $S_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 + i$ 。(2) 直接相

乘： $S_1 S_2 = (1 + i)(-1 + i) = -1 + i - i + i^2 = -2$ ， $|S_1 S_2| = 2$ 。用三角形形式验证：模 $= \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ，辐角 $= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$ ，即 $2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$ ✓。

易错点： $S_1 S_2 = -2$ 是负实数（辐角 π ），说明两信号反相叠加——三角形把“乘出负实数”翻译成“两个 90° 相位合成 180° ”，别在坐标式展开时把 $i^2 = -1$ 代入错。

2.11 知识点 (2) 模的几何意义详解

A8. A。

思路： $|z - z_0|$ 是 z 到 z_0 的距离，恒为 r 即圆。

解析： $|z - 1| = 2$ 表示 z 到点 $(1, 0)$ 的距离恒为 2，即以 $(1, 0)$ 为圆心、半径 2 的圆。**易错点：** $|z - 1|$ 中 $z_0 = 1$ （实轴上的点 $(1, 0)$ ），不是 -1 ——圆心带坐标符号别读反。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：先分别化简乘法与除法，再作差；实部虚部按定义写出；模与共轭直接代公式。

规范解：(1) $(1+i)(2-i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$ ； $\frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2 - 2i + i - i^2}{2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ 。故 $z = (3+i) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ 。实部 $\frac{3}{2}$ ，虚部 $\frac{3}{2}$ 。(2) $\bar{z} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$ ； $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

易错点：除法结果 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ 要化成 $a + bi$ 标准形再作差，避免分数带 i 的项算错； $|z|^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ ，开方后是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 而非 $\frac{9}{2}$ 。

S2 解析

思考路径： $|z - 1| = 1$ 是距离为定值的轨迹——圆； $|z|$ 是 z 到原点的距离，最值在圆心与原点连线上取到。

规范解：(1) $|z - 1| = 1$ 表示 z 到点 $(1, 0)$ 的距离恒为 1，轨迹是以 $(1, 0)$ 为圆心、半径 1 的圆。(2) 圆心 $(1, 0)$ 到原点的距离为 1，圆半径也为 1。 $|z|$ 最大 $= 1 + 1 = 2$ （取 $z = 2$ ），最小 $= |1 - 1| = 0$ （取 $z = 0$ ）。

易错点： $|z|$ 最值的几何法——圆心到原点距离 d 与半径 r ：最大 $d + r$ 、最小 $|d - r|$ ；不要只凭“圆过原点”就答最小为 0（这里恰好 $d = r$ ，原点在圆上，最小确实为 0，但推理要写出 d 、 r 的完整判断）。

第三章 立体几何初步

3.1 例题详解

例题 3.1 解析

思考路径：判定几何体类型，逐条对照定义。多面体看“底面 + 侧面的形状与公共顶点”；旋转体看“由什么平面图形绕什么轴旋转”。

规范解：(1) 棱柱——两个底面平行且全等，侧面都是平行四边形，侧棱平行且相等，满足棱柱定义。(2) 棱锥——底面是多边形（四边形），其余各面是共一个公共顶点的三角形，这正是棱锥的结构特征。(3) 圆台——用平行于圆锥底面的平面截圆锥，截面与底面之间的部分是圆台。注意它是旋转体，不是棱台（棱台要求底面是平面多边形，这里底面是圆）。

易错点：(3) 易误答“棱台”。棱台必须由棱锥截出、底面是多边形；由圆锥截出的是圆台，两个概念别混。

例题 3.2 解析

思考路径：正四棱锥计算的关键是找两个直角三角形：高、边心距、斜高一组；高、底面外接圆半径、侧棱一组。先求出底面中心到边的距离与到顶点的距离。

规范解：设底面中心为 O ，顶点为 P ， E 为底面一边 AB 的中点。底面边心距 $OE = 3$ ，高 $PO = 4$ ，斜高

$$PE = \sqrt{PO^2 + OE^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

底面外接圆半径 $OA = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ ，侧棱长

$$PA = \sqrt{PO^2 + OA^2} = \sqrt{16 + 18} = \sqrt{34}.$$

底面积 $S_{\text{底}} = 36$ ，每个侧面面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ ，侧面积 60，表面积

$$S = 36 + 60 = 96.$$

体积

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h = \frac{1}{3} \times 36 \times 4 = 48.$$

易错点：斜高是“顶点到底面边的垂线段的长度”，用的是边心距 3 而非外接圆半径 $3\sqrt{2}$ ——两组长错了就全盘皆错。

例题 3.3 解析

思考路径：圆台是台体，直接用台体体积公式 $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ 。

规范解：

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times (2^2 + 2 \times 4 + 4^2) = 2\pi \times (4 + 8 + 16) = 56\pi.$$

易错点：台体公式中间的 $\sqrt{S_1S_2}$ （对圆台即 r_1r_2 ）一项最容易漏写；取 $r_1 = r_2$ 时退化为柱体，取 $r_1 = 0$ 时退化为锥体，可用这两个极限检验。

3.2 知识点 (1) 棱柱、棱锥、棱台的结构特征详解

A1. C。

思路：逐一对照结构特征。

解析：C 对——棱锥的侧面必是共顶点的三角形。A 错：棱台侧面是梯形；B 错：正棱锥还需顶点投影在底面中心；D 错：圆锥所有母线长相等。

A2. A。

思路：棱柱侧面的共性——侧面必是平行四边形。

解析：棱柱的侧面由侧棱与底边围成，必是平行四边形，不可能是三角形，选 A。B 平行四边形是一般斜棱柱的侧面；C 矩形是直棱柱的侧面；D 菱形是特殊的平行四边形（底面为菱形、侧棱垂直于底面的直四棱柱其侧面为矩形；底面是菱形、侧棱斜交时侧面仍为平行四边形，可为菱形）。

M1. B。

思路：逐项辨析，专打“棱台当成斜棱柱”与“台体体积公式记串”两个坑。

解析：B 对——棱台由棱锥用平行于底面的平面截出，侧棱延长后还原为原棱锥的侧棱，必交于一点。A 错：棱台侧面是梯形。C 错：有两个面平行、其余各面都是梯形，只说明了形状，未必是棱台——还要“侧棱延长交于一点”（如四棱台截“歪”了就不满足）。D 错：台体体积公式是 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h$ 。

为什么错：选 C 的同学只看“上下底平行 + 侧面梯形”就断定是棱台——缺了“侧棱延长交于一点”这个最本质的条件；选 D 的同学把台体公式记成了“梯形面积公式”的样子，中间的 $\sqrt{S_1S_2}$ 项丢了。

M2. B。

思路：按正棱锥的两条件检验：底面是否正多边形？顶点投影是否在底面中心？

解析：顶点投影在底面中心这一条满足了，但底面是菱形——菱形不一定是正方形，即不一定是正多边形。因此不一定是正棱锥（底面为正方形时是正四棱锥；底面为非正方形的菱形时，四侧棱相等但斜高不全等，不是正棱锥）。选 B。

为什么错：选 A 的同学把“顶点投影在中心 + 底面菱形”误当成正棱锥——忘了“正多边形”这一条；选 C 的同学又过激地认为一定不是。实际上“正棱锥”要求两条件同时满足，缺一

不可。

3.3 知识点 (2) 柱、锥、台的表面积与体积详解

A3. A。

思路：母线、高、底面半径构成直角三角形。

解析：高 $= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 。侧面积 $\pi r l = 15\pi$ ，体积 $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$ 。

A4. A。

思路：正三棱柱体积 = 底面积 $\times$ 高。

解析：底面正三角形面积 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$ ，体积 $\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 。

A5. B。

思路：正四棱锥的“第一个直角三角形”——高、底面边心距、斜高。

解析：底面边长 6，边心距 = 3，斜高 5，高 $= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 。选 B。

易错点：直角三角形的两条直角边是“高 + 边心距” (3)，不是“高 + 外接圆半径” ($3\sqrt{2}$)——用外接圆半径会得到 $\sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$ ，选项里没有，说明用错了量。

B1. (2023 · 全国乙卷 · 理科第 8 题) B。

思路：先由 $\triangle PAB$ 的面积求点 P 到 AB 的距离，再由两个直角三角形求圆锥的高，最后算体积。

解析：底面圆半径 $r = \sqrt{3}$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ 。取 AB 中点 C ，则 $OC = r \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $AB = 2r \sin 60^\circ = 3$ 。由 $\triangle PAB$ 的面积： $\frac{1}{2} \times AB \times PC = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ ，得 $PC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。圆锥的高 $PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{6}$ 。体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot PO = \frac{1}{3} \times 3\pi \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\pi$ 。选 B。

易错点： $\triangle PAB$ 是等腰三角形， PC 是它的高；求 PO 时用的是 $\text{Rt}\triangle POC$ (PC 、 OC 、 PO)，别拿母线当高。

B2. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 4 题) C。

思路：水库形状看作棱台， $S_1 = 140 \text{ km}^2$ ， $S_2 = 180 \text{ km}^2$ ，水位差 $9 \text{ m} = 0.009 \text{ km}$ ，代入台体体积公式。

解析：

$$\sqrt{S_1 S_2} = \sqrt{140 \times 180} = \sqrt{25200} = 60\sqrt{7} \approx 159.0,$$

$$V = \frac{1}{3} (140 + 180 + 60\sqrt{7}) \times 0.009 = 0.003 (320 + 60\sqrt{7}) \approx 0.003 \times 479 = 1.437 \text{ km}^3 = 1.437 \times 10^9 \text{ m}^3.$$

与 1.4×10^9 最接近，选 C。

易错点：单位换算—— $1 \text{ km}^3 = 10^9 \text{ m}^3$ ；水位差 9 m 要化成 0.009 km 才能与 km^2 相乘，这是本题最隐蔽的坑；中间项 $60\sqrt{7}$ 是易漏项。

B3. (2022 · 全国乙卷 · 理科第 9 题) C。

思路：底面四个顶点在球面上，即底面是半径为 r 的小圆的内接四边形，其中 $r^2 + h^2 = 1$ (h 为四棱锥的高)。内接四边形面积最大时为正 (正方形)， $S_{\max} = 2r^2$ ，于是 $V = \frac{1}{3}S_{\max} \cdot h = \frac{2}{3}r^2h$ ，化为单变量函数求最值。

解析：由 $r^2 + h^2 = 1$ ， $V = \frac{2}{3}(1 - h^2)h$ 。设 $f(h) = h - h^3$ ($0 < h < 1$)，则 $f'(h) = 1 - 3h^2$ 。令 $f'(h) = 0$ 得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，且 f 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上递增、在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 上递减，故 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时体积最大。答案 C。

易错点：(1) 底面面积要取最大——圆内接四边形面积最大时为正方形 ($S = 2r^2$)，别误用一般四边形；(2) 最值用导数 (或均值不等式 $r^2 \cdot r^2 \cdot 2h^2$ 的积定和最小) 求解，别只代端点判断。

C1. (1) $240\sqrt{3} \text{ mm}^3$ ；(2) $240 + 24\sqrt{3} \text{ mm}^2$ 。

思路：正六边形可拆成 6 个全等的正三角形。

解析：(1) 底面正六边形面积 $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 24\sqrt{3} \text{ (mm}^2\text{)}$ ，体积 $V = 24\sqrt{3} \times 10 = 240\sqrt{3} \text{ (mm}^3\text{)}$ 。(2) 封顶再加一个正六边形面 $24\sqrt{3} \text{ mm}^2$ ，六个侧面每个为 $4 \times 10 = 40 \text{ mm}^2$ ，共 $6 \times 40 = 240 \text{ mm}^2$ 。总面积 $240 + 24\sqrt{3} \text{ mm}^2$ 。

易错点：正六边形面积别当成 a^2 ——要拆成正三角形算；底面与封顶两面要区分清。

3.4 例题详解

例题 3.4 解析

思考路径：先算原图面积，再用面积公式 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ ；或直接按规则画图：底不变、高减半后再乘 $\sin 45^\circ$ (高变成 45° 斜线后的实际垂直距离)。

规范解：原图面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$ ，故直观图面积

$$S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 9\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{6}}{4}.$$

另解 (直接画图)：底边 $B'C' = 6$ 不变； A' 的纵坐标为 $3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，且 OA' 与 x' 轴成 45° ，故 A' 到底边的垂直距离为

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sin 45^\circ &= \frac{3\sqrt{6}}{4}, \\ S' &= \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3\sqrt{6}}{4} = \frac{9\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

两种算法结果一致。

易错点：直观图的“高”不是 OA' 本身 (45° 斜线)，而是它到底边的垂直距离——“纵减半”之后还要再乘 $\sin 45^\circ$ ，少乘一次就错。这正是 M 层反复打击的坑。

例题 3.5 解析

思考路径：由 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ 反解 $S = \frac{4}{\sqrt{2}}S'$ 。

规范解：

$$S = \frac{4}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{2} = 16.$$

易错点：公式方向别记反——直观图是“缩水”的，原面积一定比直观图面积大；算出原面积比 $4\sqrt{2}$ 还小，立即检查方向。

例题 3.6 解析

思考路径：三视图还原：正视图、侧视图是等腰三角形、俯视图是圆 $\rightarrow$ 圆锥。用“高平齐”定高 4，“长对正”定底面直径 2。

规范解：该几何体是底面半径 $r = 1$ 、高 $h = 4$ 的圆锥，体积

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 1 \times 4 = \frac{4\pi}{3}.$$

易错点：俯视图的半径是 1（直径为 2），别把直径当半径；“正视图、侧视图是三角形、俯视图是圆”是圆锥的标准特征。

3.5 知识点 (1) 斜二测画法与直观图面积详解

A6. A。

思路： $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ 。

解析： $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 16 = 4\sqrt{2}$ 。

A7. D。

思路：已知直观图面积反求原面积，用 $S = \frac{4}{\sqrt{2}}S'$ 。

解析：直观图面积 $S' = 4^2 = 16$ ，原面积 $S = \frac{4}{\sqrt{2}} \times 16 = 32\sqrt{2}$ 。选 D。

易错点：公式方向别反——直观图是“缩水”的，原面积必然更大，若算出比 16 小的结果，检查是不是把公式用反了。

M3. A。

思路：先求直观图面积，再用 $S = \frac{4}{\sqrt{2}}S'$ 反求原面积。

解析：直观图是边长为 a 的正三角形，面积 $S' = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。原面积

$$S = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2.$$

选 A。

为什么错：选 C 的同学把公式方向弄反了——用了 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ 却解成 $S = \frac{\sqrt{2}}{4}S'$ ，得到 $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$ ；选 D 的同学把“横不变纵减半”记成了“横减半纵不变”，面积少乘了 $\sqrt{2}$ 。原面积一定大于直观图面积，这是检验方向的第一把尺。

3.6 知识点 (2) 三视图详解

A8. A。

思路：三视图全是正方形 $\rightarrow$ 正方体。

解析：棱长 2， $V = 8$ ， $S = 6 \times 4 = 24$ 。

A9. A。

思路：正视图、侧视图是等腰三角形、俯视图是圆 $\rightarrow$ 圆锥，半径看俯视图、高看正视图。

解析：圆锥底面半径 $r = 2$ ，高 $h = 3$ ， $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4 \times 3 = 4\pi$ 。选 A。

易错点：俯视图是“半径为 2 的圆”，正视图的底边 4 是直径——半径与直径别混。

B4. (2023 · 全国乙卷 · 第 3 题，文理通用) D。

思路：先算完整长方体的表面积，再减去被切去部分对表面贡献的净变化。

解析：原长方体长 2、宽 2、高 3，表面积 $2(2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3) = 32$ 。切去一个 $1 \times 1 \times 3$ 的小长方体后：上、下两个底面各少了一个 1×1 的正方形（共少 2），而沿竖棱切出的两个 1×3 的新切面恰好补上了被切掉的两个侧面区域（净变化 0）。故表面积 $S = 32 - 2 = 30$ ，选 D。

易错点：不能简单认为“表面积不变”——角部切去一块，上下底面各少一个正方形；切面新增面与侧面的损失相抵，要逐面核对。

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理科第 4 题) B。

思路：【文字化还原】三视图对应直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，底面直角梯形 $ABCD$ ： $AD \perp AB$ 、 $AB \parallel DC$ 、 $AD = DC = 2$ 、 $AB = 4$ ，高 $AA_1 = 2$ 。体积 = 底面积 $\times$ 高。

解析：直角梯形面积 $S = \frac{AB + DC}{2} \times AD = \frac{4 + 2}{2} \times 2 = 6$ ，体积 $V = 6 \times 2 = 12$ 。答案 B。

易错点：还原时别把俯视图反映的“长”（ $AB = 4$ ）与直四棱柱的高（ $AA_1 = 2$ ）混淆；梯形面积是“上下底之和的一半 $\times$ 高”。

M4. C。

思路：三对对应关系要“对得上号”：长对正（正与俯）、高平齐（正与侧）、宽相等（俯与侧）。

解析：C 对——宽相等就是俯视图与侧视图的宽相等。A 错：正视图与俯视图相等的是长；B 错：正视图与侧视图相等的是高；D 错：正视图与俯视图是长相等。

为什么错：三对关系张冠李戴是这里的典型错误——口诀背下来还不够，必须知道“哪两个视图比的是哪一条边”。记法：正视图是“长和高”，俯视图是“长和宽”，侧视图是“宽和高”，两两共享的边即对应关系。

C2. (1) 圆柱与半球；(2) $\frac{272\pi}{3} \text{ m}^3$ ；(3) $56\pi \text{ m}^2$ 。

思路：由正视图（矩形 + 半圆）还原出“圆柱 + 半球”的组合体：矩形宽 8 即圆柱底面直径 8、高 3；半圆直径 8 即半球半径 4。

解析：(1) 该穹顶由底面半径 $r = 4$ 、高 $h = 3$ 的圆柱，与半径 $r = 4$ 的半球叠合而成。(2) $V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 16\pi \times 3 + \frac{2}{3} \pi \times 64 = 48\pi + \frac{128\pi}{3} = \frac{272\pi}{3}$ (m^3)。 (3) 外表面 = 圆柱侧面积 + 半球面 = $2\pi r h + 2\pi r^2 = 24\pi + 32\pi = 56\pi$ (m^2)。

易错点：外表面不含圆柱的下底面（扣在体育馆上）；半球面积是 $2\pi r^2$ （整球 $4\pi r^2$ 的一半），别写错。

3.7 例题详解

例题 3.7 解析

思考路径：逐组判断。先看是否共面，再看有无公共点；共面则看相交或平行，不共面即异面。

规范解：(1) $AB \parallel C_1D_1$ —— $AB \parallel DC$ （底面）， $DC \parallel D_1C_1$ （对面），由公理 4 得 $AB \parallel C_1D_1$ ，**平行**。(2) AB 与 B_1C_1 不共面（ AB 在底面， B_1C_1 在上底面，方向一纵一横），无公共点，**异面**。(3) AA_1 垂直于底面， BC 在底面内且不过点 A ，两线不共面、不相交，**异面**。(4) AC 与 BD 都在底面 $ABCD$ 内，且正方形对角线相交于中心，**相交**。

易错点：第 (3) 问最容易误判为“平行”——两条线没有交点不等于平行，可能异面。看到“没碰上的两条线”，先问一句：它们共面吗？

例题 3.8 解析

思考路径：平移法——把 A_1B 平移到 D_1C （四边形 A_1BCD_1 是平行四边形），所求角转化为 $\angle D_1CA$ ，落在 $\triangle AD_1C$ 中。

规范解： $A_1B \parallel D_1C$ ，故所求角为 $\angle D_1CA$ 。在 $\triangle AD_1C$ 中， $AD_1 = D_1C = AC = 2\sqrt{2}$ （三条都是面对角线），所以 $\triangle AD_1C$ 是等边三角形， $\angle D_1CA = 60^\circ$ ，故所成角的余弦值为

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

另解（向量法，呼应第 4 章）：建系后 $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$ ，

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

两种方法结果一致。

易错点：平移的目标是“让两条直线变成相交，且角落在好算的三角形里”；平移后记得检查三角形三边长再下结论。

3.8 知识点 (1) 位置关系的判定详解

A10. (1) 平行；(2) 异面；(3) 相交。

思路： $AB \parallel DC \parallel D_1C_1$ ； AA_1 垂直于底面而 BC 在底面内不过 A ； AC 与 BD 是底面长方形的对角线。

解析：(1) 由公理 4, AB 与 D_1C_1 平行。(2) AA_1 与 BC 异面——不共面、不相交。(3) AC 与 BD 在底面内相交于对角线交点。

M5. B。

思路：逐项辨析，专打“平面几何’不相交就平行’残留”这个坑。

解析：B 对——异面直线的定义就是“不共面且不相交”，自然没有公共点。A 错：不相交的两条直线可能异面。C 错：没有公共点也可能平行（共面）。D 错：公理 4 保证平行于同一直线的两条直线互相平行，不可能异面。

为什么错：选 A 或 C 的同学是平面几何直觉的残留——平面里“不相交即平行”，空间里多了“异面”这一档；选 D 的同学误以为平行关系会“分开”，实际上平行传递性（公理 4）在空间依旧成立。

3.9 知识点 (2) 异面直线所成角详解

A11. C。

思路： $D_1C_1 \parallel DC$ ，所求角转化为 $\angle A_1BC$ 。

解析： $\triangle A_1BC$ 中 $A_1B = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$, $A_1C = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ 。由余弦定理

$$\cos \angle A_1BC = \frac{A_1B^2 + BC^2 - A_1C^2}{2 \cdot A_1B \cdot BC} = \frac{8 + 4 - 12}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2} = 0,$$

所成角为 90° ，余弦值为 0，选 C。

易错点：平移时把 D_1C_1 换成 DC ，别直接硬用 D_1C_1 与 A_1B 的距离概念——异面直线所成角必须“搬”成共面角再算。

A12. A。

思路：建系后取两方向向量，套线线角公式（带绝对值）。

解析：以 A 为原点， AB 、 AD 、 AA_1 方向为 x 、 y 、 z 轴， $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{B_1C} = C - B_1 = (0, 2, -2)$ 。

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|4|}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

选 A。

易错点：向量法求异面直线所成角，公式分子要取绝对值——若点积为负，说明“向量夹角”是钝角，直线所成角取其补角的余弦。

3.10 例题详解

例题 3.9 解析

思考路径：线面平行证明的标准模板：中位线（或平行四边形）造平行 $\rightarrow$ 三条件核对 $\rightarrow$ 下结论。要证的 PB 不在平面 AEC 内，可在平面 AEC 内找一条与 PB 平行的线——连接 BD ，利用平行四边形对角线互相平分 + 中位线。

规范解：连接 BD 交 AC 于点 O 。因为底面 $ABCD$ 是平行四边形，所以 O 是 BD 的中点（对角线互相平分）。在 $\triangle PBD$ 中， E 是 PD 的中点、 O 是 BD 的中点，故 EO 是 $\triangle PBD$ 的中位线， $EO \parallel PB$ 。又 $EO \subset$ 平面 AEC ，且 $PB \not\subset$ 平面 AEC （点 P 不在平面 AEC 内），由线面平行判定定理， $PB \parallel$ 平面 AEC 。■

易错点：证明中“ $PB \not\subset$ 平面 AEC ”这一条必须写出——这是判定定理的第一条件（线在面外），丢了它证明就不完整。这也是 M 层反复打击的坑。

例题 3.10 解析

思考路径：（1）面面垂直用判定定理：一个平面过另一个平面的垂线。找 BC ： $BC \perp AB$ （矩形）、 $BC \perp PA$ （ $PA \perp$ 底面），故 $BC \perp$ 平面 PAB ，而 $BC \subset$ 平面 PBC 。（2）点面距离用等体积法：把三棱锥 $C-PBD$ 换一组“底 + 高”，解出高。

规范解：（1）因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 底面，所以 $PA \perp BC$ ；又矩形中 $AB \perp BC$ 。于是 BC 垂直于平面 PAB 内两条相交直线 PA 、 AB ，故 $BC \perp$ 平面 PAB 。又 $BC \subset$ 平面 PBC ，由面面垂直判定定理，平面 $PBC \perp$ 平面 PAB 。■

（2）设点 C 到平面 PBD 的距离为 d 。三棱锥体积：

$$V_{C-PBD} = V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AD \times AB \times PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

再算 $\triangle PBD$ 的面积。 $PB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $PD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ， $BD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 。 $\triangle PBD$ 是等腰三角形（ $PD = BD$ ），取 PB 的中点 M ，则

$$DM = \sqrt{PD^2 - PM^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \times PB \times DM = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

由 $V_{C-PBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBD} \cdot d$ 得

$$d = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

点 C 到平面 PBD 的距离为 $\frac{2}{3}$ 。

易错点：等体积法“换底不换体”——用 P 当顶点（高就是 PA ）算体积； $\triangle PBD$ 是等腰三角形，底边取 PB ，高用勾股定理求，别把 PD 、 BD 当成底边的高。

3.11 知识点 (1) 线面平行与线面垂直的判定详解

A13. 证明： D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 的中点，故 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $DE \parallel BC$ 。又 $BC \subset$ 平面 PBC ，且 $DE \not\subset$ 平面 PBC ，由线面平行判定定理， $DE \parallel$ 平面 PBC 。

A14. 证明：在底面 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ (正方形对角线互相垂直)；又 $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 底面，故 $BB_1 \perp AC$ 。于是 AC 垂直于平面 BB_1D_1D 内两条相交直线 BD 、 BB_1 ，由线面垂直判定定理， $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D 。

M6. B。

思路：检查线面平行判定定理的三条件： $a \not\subset \alpha$ 、 $b \subset \alpha$ 、 $a \parallel b$ 。

解析： l 已经在底面 $ABCD$ 内 (l 是底面内一条直线)，不满足“ $a \not\subset \alpha$ ”。判定定理只管“平面外”的直线，所以甲错、乙对，选 B。

为什么错：选 A 的同学只用了“ $l \parallel AB$ 、 $AB \subset$ 底面”两条就下结论——漏了“ l 在平面外”这一条件。线面平行判定的第一条印章 ($a \not\subset \alpha$) 是这里的核心坑：**线已经在面里，谈何平行于面？**

M7. B。

思路：面面垂直的性质定理——一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面。

解析：交线为 AB 。面 $ABCD$ 内垂直于 AB 的直线是 AD 、 BC 等，它们垂直于平面 ABB_1A_1 ，故 B 对。A 错： $CD \parallel AB$ ，不垂直于交线，因而不垂直于平面 ABB_1A_1 ；C、D 错：面内任意直线并非都垂直于另一面。

为什么错：选 A 或 D 的同学被“面面垂直”四个字误导，忽略了性质定理里“垂直于交线”这个前提——这就是“性质定理乱用”的典型。使用口诀：**先找交线，再找垂直交线的线。**

3.12 知识点 (2) 面面垂直与体积详解

B6. (2022 · 全国乙卷 · 理科第 7 题) A。

思路：面面垂直用判定定理——一个平面过另一个平面的垂线。 E 、 F 为 AB 、 BC 中点，故 $EF \parallel AC$ ；正方体中 $AC \perp BD$ ，且 $DD_1 \perp$ 底面，故 $EF \perp$ 平面 BDD_1 。

解析： E 、 F 分别为 AB 、 BC 中点， $EF \parallel AC$ (中位线)。正方体底面 $ABCD$ 为正方形， $AC \perp BD$ ，故 $EF \perp BD$ ；又 $DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $EF \subset$ 底面，故 $EF \perp DD_1$ 。 BD 与 DD_1 相交于 D ，故 $EF \perp$ 平面 BDD_1 。而 $EF \subset$ 平面 B_1EF ，由面面垂直判定定理，平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 ，A 正确。B 错：以 D 为原点建系，平面 B_1EF 的法向量 $\vec{m} = (2, 2, -1)$ ，平面 A_1BD 的法向量 $\vec{n}_1 = (1, -1, -1)$ ， $\vec{m} \cdot \vec{n}_1 = 1 \neq 0$ ，两平面不垂直。C 错：直线 B_1E 与 AA_1 必相交，故平面 B_1EF 与平面 A_1AC 有公共点，不可能平行。D 错：平面 $AB_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D ，但平面 AB_1C 与平面 B_1EF 有公共点 B_1 ，故平面 A_1C_1D 与平面 B_1EF 不平行。答案 A。

易错点：截面垂直问题的核心是“线面垂直”——先用中点 $\rightarrow$ 中位线 $\rightarrow$ 平行线，把截面内的线与已知的垂线 (如 DD_1) 挂上钩；面面平行的判定要防“有公共点还判平行”。

B7. (2023 · 全国甲卷 · 文科第 10 题) A。

思路：由 $PA = PB$ 与等边 $\triangle ABC$ 的对称性，取 AB 中点 D ，可证 $AB \perp$ 平面 PCD ，再

把 AB 当“高”算体积。

解析：取 AB 的中点 D ，连接 PD 、 CD 。 $\triangle PAB$ 中 $PA = PB = 2$ ，故 $PD \perp AB$ 且 $PD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ； $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，故 $CD \perp AB$ 且 $CD = \sqrt{3}$ 。于是 $AB \perp$ 平面 PCD （垂直于面内两条相交直线 PD 、 CD ）。又 $PD = CD = \sqrt{3}$ ， $PC = \sqrt{6}$ ，满足 $PD^2 + CD^2 = PC^2$ ，故 $PD \perp CD$ ， $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$ 。体积

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle PCD} \cdot AB = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 1.$$

选 A。

易错点：这题的“高”不是 PD 或 PC ，而是把 AB 看作三棱锥 $P-ABC$ 以 $\triangle PCD$ 为底的“高”——找“哪条线垂直于哪个底面”是体积计算的灵魂。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：正四棱锥的“两个直角三角形”贯穿全题：高 + 边心距 + 斜高；高 + 外接圆半径 + 侧棱。异面直线所成角用平移法转化为共面角。

规范解：设底面中心为 O ， E 为底面一边 AB 的中点。(1) 边心距 $OE = 2$ ，高 $PO = 3$ ，斜高 $PE = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ 。外接圆半径 $OA = 2\sqrt{2}$ ，侧棱长 $PA = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$ 。(2) 底面积 16，体积 $V = \frac{1}{3} \times 16 \times 3 = 16$ 。每个侧面面积 $\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ ，侧面积 $8\sqrt{13}$ ，表面积 $S = 16 + 8\sqrt{13}$ 。(3) $BC \parallel AD$ ，故 PA 与 BC 所成角即 $\angle PAD$ 。在 $\triangle PAD$ 中， $PA = PD = \sqrt{17}$ ， $AD = 4$ ，由余弦定理

$$\cos \angle PAD = \frac{PA^2 + AD^2 - PD^2}{2 \cdot PA \cdot AD} = \frac{17 + 16 - 17}{2 \times \sqrt{17} \times 4} = \frac{16}{8\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

易错点：(3) 里“ $BC \parallel AD$ ”这一步是关键——把异面问题转成 $\triangle PAD$ 内的平面问题；余弦定理代入时别抄错边。

S2 解析

思考路径：(1) 线面平行用中位线；(2) 面面垂直用判定定理——找过底面的垂线；(3) 距离用等体积法，并用向量法验算。

规范解：(1) 连接 AC 交 BD 于点 O 。底面 $ABCD$ 是正方形， O 是 AC 的中点。在 $\triangle PAC$ 中， E 是 PC 的中点、 O 是 AC 的中点，故 EO 是 $\triangle PAC$ 的中位线， $EO \parallel PA$ 。又 $EO \subset$ 平面 BDE ， $PA \not\subset$ 平面 BDE ，故 $PA \parallel$ 平面 BDE 。

(2) 由 (1)， $EO \parallel PA$ ，而 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，故 $EO \perp$ 底面 $ABCD$ 。又 $EO \subset$ 平面 BDE ，平面 BDE 过底面的垂线 EO ，由面面垂直判定定理，平面 $BDE \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(3) 等体积法： $V_{C-BDE} = V_{E-BCD}$ 。 E 是 PC 的中点，而 $PA \perp$ 底面，故 E 到底面的距离为 $\frac{PA}{2} = 1$ 。 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ，故

$$V_{C-BDE} = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}.$$

再算 $\triangle BDE$ 的面积: $BD = 2\sqrt{2}$, O 是 BD 中点, E 到 BD 的距离 $EO = 1$ (且 $EO \perp BD$, 等腰三角形底边中线垂直底边), 故 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ 。所以

$$d = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

点 C 到平面 BDE 的距离为 $\sqrt{2}$ 。

向量法验算: 以 A 为原点, AB 、 AD 、 AP 方向为 x 、 y 、 z 轴建系, 则 $B(2, 0, 0)$ 、 $D(0, 2, 0)$ 、 $C(2, 2, 0)$ 、 $P(0, 0, 2)$ 、 $E(1, 1, 1)$ 。平面 BDE 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$ 、 $\overrightarrow{BE} = (-1, 1, 1)$, 解得法向量 $\vec{n} = (1, 1, 0)$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$ 。取面内点 $B(2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, 则

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

与等体积法一致。

易错点: 第 (3) 问若用 BD 作底边, 务必确认 $EO \perp BD$ (等腰三角形性质), 否则面积算错; V_{C-BDE} 与 V_{E-BCD} 是同一个四面体, 只是换了“顶点 + 底面”, 这就是等体积法的本质。

第四章 空间向量与立体几何

4.1 例题详解

例题 4.1 解析

思考路径：线性运算逐分量算，先做数乘再合并；模长用三维勾股定理；共线判定看分量是否成比例。

规范解：(1) $2\vec{b} = (2, -4, 0)$ ，故

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (2 + 2 + 1, 1 - 4 - 0, -3 + 0 - 2) = (5, -3, -5).$$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ ； $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$ 。(3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 1, -3) - (2, -4, 0) = (0, 5, -3)$ 。若 $\vec{a} - 2\vec{b} = \lambda\vec{c}$ ，则须 λ 同时满足 $0 = -\lambda$ ($\lambda = 0$)、 $5 = 0$ (无解)，矛盾，故不共线。

易错点：共线判定要检查每一个分量成比例——本例第一分量为 0 而 $\vec{c}$ 第一分量为 -1，分母为 0 的情形说明不存在 λ ，别只看一两个分量就下结论。

例题 4.2 解析

思考路径：夹角用 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ；垂直转化为点积为零。

规范解：(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = 2 - 2 + 2 = 2$ 。 $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$ 。

$$\cos \theta = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x - 2 + 4 = x + 2 = 0$ ，解得 $x = -2$ 。

易错点：数量积要“对位相乘再相加”，别漏项或错位；夹角余弦值要化简彻底 ($\frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$)。

4.2 知识点 (1) 空间向量的线性运算与模长详解

A1. A。

思路：线性运算、模长、数量积逐项算。

解析： $2\vec{a} - 3\vec{b} = (2, -2, 4) - (6, 0, -3) = (-4, -2, 7)$ ； $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$ ； $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 - 2 = 0$ 。

A2. A。

思路：分量成比例。

解析： $\vec{b} = (6, -3, -12) = -3(-2, 1, 4) = -3\vec{a}$ ，故共线。

4.3 知识点 (2) 数量积、夹角与垂直详解

A3. A。

思路：数量积对位相乘再相加，夹角用 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 。

解析： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$ ； $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ ， $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ 。选 A。

易错点：数量积为负说明夹角是钝角 (120°)，别凭“点积正负”想当然——算完用余弦值的符号检验角的大小。

M1. B。

思路：直线所成角取锐角 (或直角)，公式带绝对值。

解析： $\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|\cos 120^\circ|}{1} = \frac{1}{2}$ 。选 B。

为什么错：选 A 的同学直接把 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ 当答案——向量夹角可以是钝角，但直线所成角定义在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ ，必须取绝对值。算出钝角要“掰回”锐角。

4.4 例题详解

例题 4.3 解析

思考路径：固定 A，写出 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ ，解方程 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，有解则共面。

规范解： $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 1)$ 。

$$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (x, x+y, y) = (1, 2, 1).$$

由第一分量 $x = 1$ ，第三分量 $y = 1$ ，代入第二分量 $x + y = 2$ 成立。方程组有解，故四点共面 (事实上 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$)。

易错点：解三元方程组要回代检验每一个分量都满足——只解出 x 、 y 而漏验第二分量，就可能把“无解”误判为“有解”。

例题 4.4 解析

思考路径：底面正方形两邻边为 x 、 y 轴，侧棱为 z 轴；顶点坐标 = 底面坐标 + 高度。

规范解：以 A 为原点， $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AA_1}$ 方向分别为 x 、 y 、 z 轴正方向建系 $Axyz$ ，单位长度 1。A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0),

$$A_1(0, 0, 3), B_1(2, 0, 3), C_1(2, 2, 3), D_1(0, 2, 3).$$

易错点：建系规范三查——三轴是否两两垂直共点、单位是否统一、顶点坐标是否“先平移到位”。坐标写错是后面一切计算的“源头污染”。

例题 4.5 解析

思考路径：面内取两个不共线向量，设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，列两个点积为零的方程，解出比例，取一个整数分量。

规范解：面 A_1BD 内取

$$\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -3), \quad \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -3).$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 2x - 3z = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 2y - 3z = 0.$$

解得 $x = y = \frac{3}{2}z$ 。取 $z = 2$ ，得 $\vec{n} = (3, 3, 2)$ 。验算： $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 6 - 6 = 0$ ， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 6 - 6 = 0$ 。■

易错点：法向量不唯一，取一个“顺眼”的即可；取定后务必回代验算两个方程，防抄错。

4.5 知识点 (1) 空间向量基本定理与四点共面详解

A4. B。

思路：判断 $\overrightarrow{AP}$ 能否由 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 线性表示——列方程并回代检验每一分量。

解析： $\overrightarrow{AP} = (1, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ 。设

$$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (-x - y, x, y) = (1, 1, 1).$$

由第二分量 $x = 1$ 、第三分量 $y = 1$ ，回代第一分量 $-x - y = -2 \neq 1$ ，矛盾，无解，故四点不共面。选 B。

易错点：解出 x 、 y 后必须回代检验**每一个分量**——本题恰好在第一分量“露馅”，别只看两三个分量就判共面。

M2. B。

思路：四点共面的唯一判据是 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 有无解；“两两不共线”与共面判断无关。

解析：乙的方法正确。验证： $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 1)$ 。设 $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (x, x + y, y) = (1, 0, 1)$ ：第一分量 $x = 1$ ，第三分量 $y = 1$ ，第二分量 $x + y = 2 \neq 0$ ，矛盾，无解，四点不共面。结论与甲相同（确实不共面），但甲的推理依据“两两不共线”是错的——**任何两个向量都共面**，不能据此推出四点不共面。选 B。

为什么错：选 A 的同学只看到“结论碰巧对”就认为甲也对——这里把“两个向量共面”与“四点共面”混为一谈。共面向量定理谈的是“第三个向量能否被前两个线性表示”，与“两个向量是否共线”毫无关系。

4.6 知识点 (2) 建系与点的坐标详解

A5. A。

思路：体对角线是“终点减起点”。

解析： $\overrightarrow{AC_1} = C_1 - A = (2, 2, 2)$ ；中点 $O = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1, 1)$ 。

4.7 知识点 (3) 平面的法向量详解

A6. A。

思路：求法向量三步——取向量、列方程、取整。

解析： $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 2)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ： $-x + y = 0$, $-x + 2z = 0$ 。取 $x = 2$ ，则 $y = 2$, $z = 1$, $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 。选 A。

M3. B。

思路：法向量永远存在；盲目令某个分量为 0 可能解出零向量，应“先设后解、自由分量取好算的整数”。

解析： $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 1)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ：

$$x + 2y = 0, \quad y + z = 0.$$

令 $y = -1$ ，则 $x = 2$, $z = 1$ ，得 $\vec{n} = (2, -1, 1)$ 。验算： $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 - 2 = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 + 1 = 0$ 。故平面有非零法向量，小明说法错误，选 B。

为什么错：小明令 $x = 0$ 后方程变成 $2y = 0$ 、 $y + z = 0$ ，只能解出零向量——这是“自由分量选错”的典型。解法是让一个自由分量取非零好值（这里取 $y = -1$ ），方程自然有非零解。

4.8 例题详解

例题 4.6 解析

思考路径：向量法证线面平行四步——建系写点、求直线方向向量、求平面法向量、验证点积为零并检查直线不在面内。

规范解：以 A 为原点建系， $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $A_1(0, 0, 4)$, $C_1(2, 2, 4)$, $E(2, 2, 2)$ 。直线 AC_1 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 4)$ 。平面 BDE 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (0, 2, 2)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ：

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 2y + 2z = 0 \Rightarrow z = -y.$$

取 $x = 1$ ，得 $\vec{n} = (1, 1, -1)$ 。验证 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 + 2 - 4 = 0$ 。再检查直线不在面内：平面 BDE 过 $B(2, 0, 0)$ ，方程 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BX} = 0$ 即 $(x - 2) + y - z = 0$ ，即 $x + y - z = 2$ 。代入 $A(0, 0, 0)$ 得 $0 \neq 2$ ，故 $A \notin$ 平面 BDE , $AC_1 \not\subset$ 平面 BDE 。由向量判定条件， $AC_1 \parallel$ 平面 BDE 。■

易错点： $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 只说明方向与平面平行，若直线躺在面内，点积同样为零。**取直线上一点代入平面方程**这一步是向量法证线面平行唯一的逻辑漏洞，绝不能省——这正是 M 层要打击的。

例题 4.7 解析

思考路径：线面垂直的向量条件是 $\vec{v} \parallel \vec{n}$ （成比例）；面面垂直是两法向量点积为零。注意别与“线面平行用点积为零”记反。

规范解：沿用例题 4.4 的建系思路，直四棱柱底面边长 2、侧棱 3： $A(0,0,0), B(2,0,0), D(0,2,0), A_1(0,0,3), C_1(2,2,3)$ 。 A_1C_1 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{A_1C_1} = (2,2,0)$ 。平面 BDD_1B_1 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2,2,0), \overrightarrow{BB_1} = (0,0,3)$ 。设 $\vec{n}_1 = (x,y,z)$ ：

$$-2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x, \quad 3z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

取 $\vec{n}_1 = (1,1,0)$ 。则 $\vec{v} = 2\vec{n}_1$ ，即 $\vec{v} \parallel \vec{n}_1$ ，故 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 。■ 平面 A_1C_1C 内取 $\overrightarrow{A_1C} = (2,2,-3), \overrightarrow{A_1C_1} = (2,2,0)$ 。设 $\vec{n}_2 = (x,y,z)$ ：

$$2x + 2y - 3z = 0, \quad 2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

代回得 $-3z = 0$ ，即 $z = 0$ ，取 $\vec{n}_2 = (1,-1,0)$ 。 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 = 0$ ，两法向量垂直，故平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。■

易错点：线面垂直比“成比例”、线面平行比“点积为零”，位置恰好相反——做题前默念：垂直 $\leftrightarrow$ 成比例，平行 $\leftrightarrow$ 点积零。

4.9 知识点 (1) 方向向量与法向量的位置关系判定详解

A7. B。

思路：线面垂直的向量条件是方向向量与法向量成比例。

解析： $\vec{n} = (2,4,-2) = 2(1,2,-1) = 2\vec{v}$ ， $\vec{v} \parallel \vec{n}$ ，故 $l \perp \alpha$ ，选 B。

易错点：线面垂直判“成比例”、线面平行判“点积为零”，别记反；看到方向向量是法向量的倍数，果断判垂直。

M5. B。

思路：线面垂直的向量条件是方向向量与法向量成比例。

解析： $\vec{n} = (4,-2,6) = 2(2,-1,3) = 2\vec{v}$ ， $\vec{v} \parallel \vec{n}$ ，故 $l \perp \alpha$ ，选 B。

为什么错：选 A 的同学把条件记反了——线面平行用“点积为零”($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$)，线面垂直用“成比例”($\vec{v} \parallel \vec{n}$)。本题 $\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 恰好成比例，应判垂直。

4.10 知识点 (2) 向量法证明平行与垂直详解

A8. 证明: 以 A 为原点, AB 、 AD 、 AA_1 方向为 x 、 y 、 z 轴建系。平面 A_1C_1C 内取 $\overrightarrow{A_1C} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$ 。设 $\vec{n}_1 = (x, y, z): 2x + 2y - 2z = 0, 2x + 2y = 0$, 取 $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ 。平面 BDD_1B_1 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$ 。设 $\vec{n}_2 = (x, y, z): -2x + 2y = 0, 2z = 0$, 取 $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$ 。 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 = 0$, 故平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。

M4. B。

思路: 向量法证线面平行必须完成“方向点积为零 + 直线不在面内”两步。

解析: 小明的 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 只完成了一半。补全验证: 平面 BDE 过 $B(2, 0, 0)$, 法向量 $(1, 1, -2)$ 给出方程 $x + y - 2z = 2$ 。取 AC_1 上的点 $A(0, 0, 0)$ 代入得 $0 \neq 2$, 故 AC_1 不在面内, 结论正确但证明不完整。选 B。

为什么错: 选 A 的同学以为“点积为零就够了”——若 AC_1 整个躺在平面 BDE 内 (点积同样为零), 结论就错了。向量法看似“免条件”, 实则“线在面外”的检查一个都不能少。

4.11 例题详解

例题 4.8 解析

思考路径: 线线角用两方向向量夹角公式, 注意取绝对值; 与第 3 章平移法互为印证。

规范解: 以 A 为原点建系, $A_1(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$ 。

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4 + 0 + 0 = 4, \quad |\vec{v}_1| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_2| = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

所成角的余弦值为 $\frac{1}{2}$ (即 60°)。与第 3 章例题 3.8 的平移法结果一致。

易错点: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4 > 0$ 此处不涉及取绝对值, 但若点积为负, 一定要加绝对值取正。

例题 4.9 解析

思考路径: 线面角用 $\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|}$ ——正弦等于“方向向量与法向量夹角余弦的绝对值”。

规范解: 设底面中心为 O , 以 O 为原点、 OP 为 z 轴建系。 $P(0, 0, 3)$, $A(2, 2, 0)$ (底面边长 4, 中心到顶点距离 $2\sqrt{2}$, 取坐标 $(2, 2, 0)$)。侧棱 PA 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{PA} = (2, 2, -3)$, 底面法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 。

$$\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{4+4+9}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

(几何验证: $AO = 2\sqrt{2}$, $PO = 3$, $PA = \sqrt{8+9} = \sqrt{17}$, $\sin \theta = \frac{PO}{PA} = \frac{3}{\sqrt{17}}$, 一致。)

易错点: 题目要“正弦值”就用 $\sin$ 公式, 别再写 $\cos \theta$ —— $\sin$ 与 $\cos$ 之间的互换是线面角与其他角最大的区别。

例题 4.10 解析

思考路径：二面角用两法向量夹角，关键是**判号**（相等或互补）。先算 $|\cos \varphi|$ ，再作平面角验证锐钝。

规范解：以 C 为原点， CA 、 CB 、 CC_1 方向为 x 、 y 、 z 轴建系， $A(3,0,0)$ ， $B(0,4,0)$ ， $A_1(3,0,2)$ ， $C(0,0,0)$ 。平面 ABC 即底面，取法向量 $\vec{n}_1 = (0,0,1)$ 。平面 A_1BC 内取 $\vec{CA_1} = (3,0,2)$ ， $\vec{CB} = (0,4,0)$ 。设 $\vec{n}_2 = (x,y,z)$ ：

$$3x + 2z = 0, \quad 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

取 $x = 2$ ， $z = -3$ ，得 $\vec{n}_2 = (2,0,-3)$ 。

$$|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|-3|}{1 \times \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

判号： A_1C 在底面的射影 $AC \perp BC$ ($\angle ACB = 90^\circ$)，由三垂线定理 $A_1C \perp BC$ ，故二面角的平面角为 $\angle A_1CA$ 。在 $\text{Rt}\triangle A_1CA$ 中， $A_1C = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ， $\cos \angle A_1CA = \frac{AC}{A_1C} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ，为锐角。所以二面角余弦值 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ （取正号）。

易错点：直接算 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -3$ ，若把 $-\frac{3}{\sqrt{13}}$ 当答案就错了—— $\vec{n}_1$ 指向上方， $\vec{n}_2 = (2,0,-3)$ 指向下方，一内一外，二面角与法向量夹角互补，应取正。**判号是二面角题丢分第一原因。**

4.12 知识点 (1) 异面直线所成角详解

A9. A。

思路：建系取两方向向量，线线角公式带绝对值。

解析：以 A 为原点建系， $\vec{v}_1 = \vec{A_1B} = (2,0,-2)$ ， $\vec{v}_2 = \vec{AD_1} = (0,2,2)$ 。

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{|-4|}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

选 A。

易错点：两向量点积为负（这里是 -4 ）说明“向量夹角”为钝角，直线所成角必须取补角的余弦（绝对值），否则会写成 $-\frac{1}{2}$ 。

4.13 知识点 (2) 线面角详解

A10. A。

思路：线面角正弦 = 方向向量与法向量夹角余弦的绝对值。

解析： $\vec{v} = \vec{A_1B} = (2,0,-2)$ ，底面法向量 $\vec{n} = (0,0,1)$ 。

$$\sin \theta = \frac{|(2,0,-2) \cdot (0,0,1)|}{2\sqrt{2} \times 1} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

选 A。

B4. (2023 · 全国甲卷 · 理科第 18 题)

(1) 思路: $A_1C \perp$ 底面 ABC , 先证面面垂直 $ACC_1A_1 \perp BCC_1B_1$, 再用面面垂直性质把 “ A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1” 翻译成 $A_1O = 1$, 最后在 $\text{Rt}\triangle A_1CC_1$ 中解 AC 。

规范解: $A_1C \perp$ 底面 ABC , 故 $A_1C \perp AC$, $A_1C \perp BC$; 又 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $AC \perp BC$ 。
 BC 垂直于平面 ACC_1A_1 内两条相交直线 A_1C 、 AC , 故 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 。又 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 由面面垂直判定定理, 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 (交线 CC_1)。过 A_1 作 $A_1O \perp CC_1$ 于 O 。由面面垂直性质定理, $A_1O \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 故 $A_1O = 1$ (A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离)。设 $CO = x$, 则 $C_1O = 2 - x$ ($CC_1 = AA_1 = 2$)。在 $\text{Rt}\triangle A_1OC$ 与 $\text{Rt}\triangle A_1OC_1$ 中:

$$A_1C^2 = 1 + x^2, \quad A_1C_1^2 = 1 + (2 - x)^2.$$

又 $A_1C \perp A_1C_1$ ($A_1C \perp AC$ 且 $A_1C_1 \parallel AC$), 在 $\text{Rt}\triangle A_1CC_1$ 中:

$$A_1C^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 = 4 \Rightarrow 1 + x^2 + 1 + (2 - x)^2 = 4,$$

解得 $x = 1$, 故 O 为 CC_1 中点, $A_1C = A_1C_1 = \sqrt{2}$, 又 $A_1C_1 = AC$ (三棱柱), 所以 $AC = A_1C$ 。■

(2) 思路: 用向量法。以 C 为原点, CA 、 CB 、 CA_1 方向为 x 、 y 、 z 轴建系, 先由 “直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2” 推出 $BC = \sqrt{3}$, 再套线面角正弦公式。

规范解: 由 (1), $AC = A_1C = \sqrt{2}$, 故 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $A_1(0, 0, \sqrt{2})$, $C_1 = C + \overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ 。
直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2。由 $AC = A_1C$ 、 BC 公共、 $A_1C \perp BC$ 、 $AC \perp BC$, 得 $\text{Rt}\triangle ACB \cong \text{Rt}\triangle A_1CB$, 故 $AB = A_1B$ 。设 $B(0, b, 0)$, 由两平行线间距离可解得 $AB = \sqrt{5}$, $BC = b = \sqrt{3}$ (与 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 + 3 = 5$ 一致)。故 $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $B_1 = B + \overrightarrow{BB_1} = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB_1} = B_1 - A = (-2\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{8 + 3 + 2} = \sqrt{13}$ 。平面 BCC_1B_1 过 $C(0, 0, 0)$, 方向 $\overrightarrow{BC} = (0, \sqrt{3}, 0)$ 与 $\overrightarrow{CC_1} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 法向量可取 $\vec{n} = (1, 0, 1)$ 。设 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| |\vec{n}|} = \frac{|-2\sqrt{2} + \sqrt{2}|}{\sqrt{13} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 。

易错点: 第 (1) 问的关键是面面垂直性质定理 ($A_1O \perp$ 交线 CC_1 才垂直于平面); 第 (2) 问用坐标法时要先把 $BC = \sqrt{3}$ 由距离条件推出, 线面角正弦记得用 $|\vec{v} \cdot \vec{n}|$ 。

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理科第 7 题) D。

思路: 线面角即斜线与它在面内的射影的夹角。找出 B_1D 与两个面的射影, 设 $B_1D = 2$ 把三条棱全算出来, 再逐一验证选项。

解析: B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle B_1DB$, 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle DB_1A$ 。由条件 $\angle B_1DB = \angle DB_1A = 30^\circ$ 。设 $B_1D = 2$, 则

$$BB_1 = B_1D \sin 30^\circ = 1, \quad AD = B_1D \sin 30^\circ = 1.$$

由长方体对角线公式 $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + BB_1^2$: $4 = AB^2 + 1 + 1$, 得 $AB = \sqrt{2}$ 。A 错: $AB = \sqrt{2}$, $2AD = 2$, 不等。B 错: AB 与平面 AB_1C_1D 所成角为 $\angle BAB_1$, $\tan \angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (不是 30°)。C 错: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3}$, $CB_1 = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{2}$, 不等。D 对: B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $\angle DB_1C$, $\sin \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1D} = \frac{AB}{B_1D} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\angle DB_1C = 45^\circ$ 。答案 D。

易错点: (1) 先找“射影”再定线面角—— B_1D 在底面 $ABCD$ 的射影是 BD , 在面 AA_1B_1B 的射影是 B_1A , 找错射影角就全错; (2) 设 $B_1D = 2$ 是为了好算, 但开方时要留意 $AB = \sqrt{2}$ 而非 2。

M6. B。

思路: 线面角正弦 = 方向向量与法向量夹角余弦的绝对值。

解析: $\sin \theta = |\cos 60^\circ| = \frac{1}{2}$, 线面角为 30° 。选 B。

为什么错: 选 A 的同学直接用 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ——把“正弦等于夹角余弦”记成了“等于夹角正弦”。**线面角的正弦 = 那对向量夹角的余弦**, 因为线面角是向量夹角的余角。

4.14 知识点 (3) 二面角详解

B1. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 18 题)

(1) 以 C 为原点, CD 、 CB 、 CC_1 方向为 x 、 y 、 z 轴建系。则

$$C_2(0, 0, 3), B_2(0, 2, 2), A_2(2, 2, 1), D_2(2, 0, 2).$$

$$\overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1), \quad \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1).$$

两向量相等, 故 $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{A_2D_2}$, 且 B_2 、 C_2 、 A_2 、 D_2 四点不共线, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ 。

(2) 设 $P(0, 2, t)$, $t \in [0, 4]$ 。平面 PA_2C_2 内取 $\overrightarrow{C_2A_2} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{C_2P} = (0, 2, t-3)$ 。设 $\vec{m} = (x, y, z)$:

$$2x + 2y - 2z = 0, \quad 2y + (t-3)z = 0.$$

取 $\vec{m} = (t-1, 3-t, 2)$ 。平面 $A_2C_2D_2$ 内取 $\overrightarrow{C_2A_2} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$:

$$2x + 2y - 2z = 0, \quad -2y + z = 0.$$

取 $\vec{n} = (1, 1, 2)$ 。由二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° :

$$|\cos 150^\circ| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (t-1) + (3-t) + 4 = 6; \quad |\vec{n}| = \sqrt{6}; \quad |\vec{m}| = \sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + 4}.$$

$$\frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

平方整理得

$$(t-1)^2 + (3-t)^2 + 4 = 8 \Rightarrow 2t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0,$$

解得 $t = 1$ 或 $t = 3$, 均满足 $t \in [0, 4]$ 。此时 P 为棱 BB_1 上距 B_2 为 1 的点, 故 $B_2P = 1$ 。

易错点: 二面角给的是 “ 150° ”, 公式里取 $|\cos 150^\circ| = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 解出的 $t = 1$ 或 3 都要检验是否落在棱上。

B2. (2023 · 新高考 II 卷 · 第 18 题)

(1) 连接 AE 、 DE 。因为 $DB = DC$, E 为 BC 中点, 所以 $DE \perp BC$ 。又 $DA = DB = DC$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, 故 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 均为等边三角形, $AB = AC$, 从而 $AE \perp BC$ 。 $DE \cap AE = E$, DE 、 $AE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp$ 平面 ADE , 而 $AD \subset$ 平面 ADE , 故 $BC \perp DA$ 。■

(2) 设 $DA = DB = DC = 2$ 。由 $BD \perp CD$ 得 $BC = 2\sqrt{2}$, $DE = AE = \sqrt{2}$ 。 $AE^2 + DE^2 = 2 + 2 = 4 = AD^2$, 故 $AE \perp DE$; 又 $AE \perp BC$, $DE \cap BC = E$, 所以 $AE \perp$ 平面 BCD 。以 E 为原点, ED 、 EB 、 EA 方向为 x 、 y 、 z 轴建系:

$$D(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{2}, 0), A(0, 0, \sqrt{2}), E(0, 0, 0).$$

由 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 得 $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ 。平面 DAB 内取 $\overrightarrow{DA} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{DB} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 。设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$:

$$-\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0, \quad -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \Rightarrow y = z = x.$$

取 $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ 。平面 ABF 内取 $\overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AF} = (-\sqrt{2}, 0, 0)$ 。设 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$:

$$\sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0, \quad -\sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = 0, y = z.$$

取 $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$ 。设二面角 $D - AB - F$ 的平面角为 θ , 则

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

二面角 $D - AB - F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

易错点: 题目要正弦值, 需由 $|\cos \theta|$ 再转 $\sin \theta$; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$ 是向量等式, F 的坐标要由 E 加向量得到, 别写反。

B3. (2024 · 新高考 I 卷 · 第 17 题)

(1) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \subset$ 底面, 所以 $PA \perp AD$ 。又 $AD \perp PB$, $PB \cap PA = P$, PB 、 $PA \subset$ 平面 PAB , 故 $AD \perp$ 平面 PAB , 从而 $AD \perp AB$ 。又 $AB^2 + BC^2 = 3 + 1 =$

$4 = AC^2$, 由勾股定理逆定理, $AB \perp BC$ 。 AD 、 BC 都在底面内且同垂直于 AB , 故 $AD \parallel BC$ 。 $BC \subset$ 平面 PBC , $AD \not\subset$ 平面 PBC , 由线面平行判定定理, $AD \parallel$ 平面 PBC 。 ■

(2) 设 $AD = x$ 。 以 A 为原点, AC 方向为 x 轴、 AP 方向为 z 轴建系, 则 $C(2, 0, 0)$, $P(0, 0, 2)$ 。 由 $AD \perp DC$, D 在以 AC 为直径的圆上, 设 $D\left(\frac{x^2}{2}, d, 0\right)$, 其中 $d^2 = x^2 - \frac{x^4}{4}$ (由 $AD^2 + DC^2 = AC^2 = 4$ 与 $AD = x$ 解得)。 平面 ACP 即 $y = 0$, 取法向量 $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$ 。 平面 DCP 内取 $\vec{CD} = \left(\frac{x^2}{2} - 2, d, 0\right)$, $\vec{CP} = (-2, 0, 2)$, 其法向量可算得

$$\vec{n}_2 = (2d, 4 - x^2, 2d).$$

设二面角 $A - CP - D$ 的平面角为 θ , 则

$$\cos^2 \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|^2}{|\vec{n}_1|^2 |\vec{n}_2|^2} = \frac{(4 - x^2)^2}{8d^2 + (4 - x^2)^2}.$$

代入 $d^2 = x^2 - \frac{x^4}{4}$, 分母 $8d^2 + (4 - x^2)^2 = 8x^2 - 2x^4 + 16 - 8x^2 + x^4 = 16 - x^4$ 。 由 $\sin \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$, 得 $\cos^2 \theta = 1 - \frac{42}{49} = \frac{1}{7}$, 故

$$\frac{(4 - x^2)^2}{16 - x^4} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7(16 - 8x^2 + x^4) = 16 - x^4,$$

$$8x^4 - 56x^2 + 96 = 0 \Rightarrow x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0.$$

$x^2 = 4$ 时 D 与 C 重合, 不符合 $AD \perp DC$ 的非退化条件, 舍去; 故 $x^2 = 3$, $AD = \sqrt{3}$ 。

易错点: D 的坐标含参数且带根号, 代入 $\cos^2 \theta$ 后要化简到底; $x^2 = 4$ 是增根要剔除。

M7. C。

思路: 二面角与两法向量夹角“相等或互补”, 取决于法向量指向。

解析: 两法向量夹角 60° 时, 二面角可能是 60° (相等) 或 120° (互补), 需结合图形判号。 选 C。

为什么错: 选 A 的同学认为“法向量夹角就是二面角”——忽略了互补情形; 选 D 的同学过于绝对——给定法向量夹角后, 二面角在 $\{60^\circ, 120^\circ\}$ 中二选一, 不是“无法确定”。 判号三法: 观察法、平面角验证、法向量指向。

C1. (1) $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$, $\vec{n}_\beta = (0, -1, 1)$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) 1。

思路: 两个轨道平面都过地心 O , 夹角即两平面二面角; 卫星到轨道面 α 的距离用点面距离公式。

解析: (1) 平面 α (xOy 平面) 法向量 $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$ 。 平面 β 过 O 、 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$: $\vec{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{OB} = (0, 1, 1)$ 。 设 $\vec{n}_\beta = (x, y, z)$:

$$x = 0, \quad y + z = 0 \Rightarrow y = -z.$$

取 $z = 1$, 得 $\vec{n}_\beta = (0, -1, 1)$ 。 (2) $|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 两轨道平面夹角取

锐角，故二面角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (即 45°)。 (3) 卫星 $T(1, 1, 1)$ 到平面 α ($z = 0$) 的距离 $d = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{OT}|}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{1}{1} = 1$ 。

易错点：轨道平面夹角约定取锐角，法向量算出的可能是互补角，要判号； T 在 β 上可验证： $y - z = 0$ 对 $(1, 1, 1)$ 成立。

4.15 例题详解

例题 4.11 解析

思考路径：点面距离公式 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}$ ——先求平面法向量，再取面内一点写 $\overrightarrow{PA}$ ，最后用等体积法验算。

规范解：以 A 为原点建系， $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $A_1(0, 0, 6)$, $C_1(2, 2, 6)$ 。平面 A_1BD 内取 $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -6)$, $\overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -6)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ：

$$2x - 6z = 0, \quad 2y - 6z = 0 \Rightarrow x = y = 3z.$$

取 $z = 1$ ，得 $\vec{n} = (3, 3, 1)$ ， $|\vec{n}| = \sqrt{9 + 9 + 1} = \sqrt{19}$ 。取面内点 $A_1(0, 0, 6)$ ，面外点 $C_1(2, 2, 6)$ ， $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$ 。

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|6 + 6 + 0|}{\sqrt{19}} = \frac{12}{\sqrt{19}} = \frac{12\sqrt{19}}{19}.$$

点 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{12\sqrt{19}}{19}$ 。

易错点： $\overrightarrow{PA}$ 是“面外点指向面内点” (A 在面内)；分子是点积的**绝对值**，分母是法向量模长——三步缺一不可。

例题 4.12 解析

思考路径：点到直线距离用叉积公式 $d = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ ——分子是两向量张成的平行四边形面积，除以底边长。

规范解：以 A 为原点建系， $A(0, 0, 0)$, $B_1(3, 0, 3)$, $D_1(0, 3, 3)$ 。

$$\overrightarrow{AB_1} = (3, 0, 3), \quad \overrightarrow{AD_1} = (0, 3, 3), \quad \overrightarrow{B_1D_1} = (-3, 3, 0).$$

叉积：

$$\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-9, -9, 9).$$

其模 $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1}| = \sqrt{81 + 81 + 81} = 9\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ ，故

$$d = \frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

(几何验证: $\triangle AB_1D_1$ 三边都是面对角线 $3\sqrt{2}$, 是等边三角形, A 到边 B_1D_1 的高 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 一致.)

易错点: 叉积的行列式展开易错符号 (j 分量带负号); 分子与分母别约错——分子是“以 P 为公共点的两向量的叉积模”, 分母是直线上两点间的距离。

4.16 知识点 (1) 点到平面的距离详解

A11. A。

思路: 平面 B_1BDD_1 即对角面, 求法向量后用点面距离公式。

解析: 以 A 为原点建系。平面 B_1BDD_1 内取 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$, 法向量 $\vec{n} = (1, 1, 0)$ (由 $-2x + 2y = 0, 2z = 0$ 解得), 平面方程为 $x + y = 2$ 。取面内点 $B(2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BA_1} = (-2, 0, 2)$, 则

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-2 + 0 + 0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

选 A。

M8. A。

思路: 点面距离公式 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}$ ——分子是点积绝对值, 分母是法向量模长。

解析: $\overrightarrow{PA} = A - P = (1, 0, -1)$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 + 0 - 2 = -1$, $|\vec{n}| = 3$, $d = \frac{1}{3}$ 。(2) $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, 1)$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -1 + 0 + 2 = 1$, $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}| = 1$, 数值同为 $\frac{1}{3}$ (绝对值使其“方向写反”碰巧不影响结果); (3) 漏了分母, 得 $1 \neq \frac{1}{3}$, 错误。故 (1)(2) 对、(3) 错, 选 A。(验算: 平面方程 $x + 2y + 2z = 1$, $P(0, 0, 1)$ 代入得 2, $d = \frac{|2 - 1|}{3} = \frac{1}{3}$, 一致。)

为什么错: 选 C 或 D 的同学记串了公式——(3) 漏分母是典型错误 (“距离 = 投影长度”, 分母 $|\vec{n}|$ 是投影方向单位化必需的一步); (2) 虽然数值碰巧正确, 但正确写法必须是 $\overrightarrow{PA}$ (A 在面内、 P 在面外), 考场上应按标准式书写, 避免混用。

4.17 知识点 (2) 点到直线、异面直线的距离详解

A12. B。

思路: $\triangle AB_1D_1$ 是等边三角形, 点 A 到直线 B_1D_1 的距离就是等边三角形的高。

解析: $\triangle AB_1D_1$ 三边都是面对角线 $2\sqrt{2}$, 为等边三角形, 故

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

选 B。

易错点：别把“点到直线”误当“点到点”——距离是垂线段长；等边三角形的高公式 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 里的 a 是边长 $2\sqrt{2}$ 。

C2. (1) $\vec{n} = (2, 2, 1)$; (2) $\frac{7}{3}$; (3) 不垂直。

思路：过三点求法向量；点面距离公式；垂直的向量条件是方向向量与法向量成比例。

解析：(1) $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (-1, 0, 2)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$ ：

$$-x + y = 0, \quad -x + 2z = 0 \Rightarrow y = x, \quad x = 2z.$$

取 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 。(2) 平面 α 过 $A(1, 0, 0)$, 方程 $2(x-1) + 2y + z = 0$, 即 $2x + 2y + z = 2$ 。末端执行器 $E(2, 2, 1)$: $2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 = 9$, 距离

$$d = \frac{|9 - 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{7}{3}.$$

(3) $\vec{d} = (1, 1, 1)$ 与 $\vec{n} = (2, 2, 1)$ 分量不成比例 ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$), 故 $\vec{d}$ 不垂直于平面 α , 即该运动方向不垂直于工件表面 (垂直要求 $\vec{d} \parallel \vec{n}$)。

易错点：判断“方向垂直于平面”用的是“方向向量 $\parallel$ 法向量”，不是点积为零 (点积为零是“平行于平面”)。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：直三棱柱是“天然坐标系”——以 C 为原点、三棱方向为轴；三种量 (线线角、线面角、点面距离) 各自套公式。

规范解：以 C 为原点, CA 、 CB 、 CC_1 方向为 x 、 y 、 z 轴建系, $C(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $A_1(2, 0, 4)$, $B_1(0, 2, 4)$ 。(1) $\vec{A_1C} = C - A_1 = (-2, 0, -4)$, $\vec{AB_1} = B_1 - A = (-2, 2, 4)$ 。

$$\vec{A_1C} \cdot \vec{AB_1} = 4 + 0 - 16 = -12,$$

$$|\vec{A_1C}| = 2\sqrt{5}, \quad |\vec{AB_1}| = 2\sqrt{6},$$

$$\cos \theta = \frac{|-12|}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{6}} = \frac{12}{4\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

(2) 平面 ABB_1A_1 内取 $\vec{AB} = (-2, 2, 0)$, $\vec{AA_1} = (0, 0, 4)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$: $-2x + 2y = 0$, $4z = 0$, 取 $\vec{n} = (1, 1, 0)$ 。

$$\sin \theta = \frac{|\vec{A_1C} \cdot \vec{n}|}{|\vec{A_1C}| |\vec{n}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{20} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(3) 平面 A_1BC 内取 $\vec{CA_1} = (2, 0, 4)$, $\vec{CB} = (0, 2, 0)$ 。设 $\vec{n} = (x, y, z)$: $2x + 4z = 0$, $2y = 0$, 取 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (-2, 0, 1)$, $|\vec{n}| = \sqrt{5}$ 。取面内点 $C(0, 0, 0)$, $\vec{CA} = (2, 0, 0)$, 则

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CA}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

易错点：线线角取绝对值防钝角；线面角用 $\sin$ ；点面距离的 $\overrightarrow{CA}$ 从面内点 C 指向面外点 A ，方向别写反。

S2 解析

思考路径：二面角判号用平面角验证；动态点距离建立含参函数求值域。

规范解：以 A 为原点建系， $B(2,0,0)$ ， $D(0,2,0)$ ， $A_1(0,0,2)$ ， $C_1(2,2,2)$ ， $B_1(2,0,2)$ 。(1) 面 A_1BD 内取 $\overrightarrow{A_1B} = (2,0,-2)$ ， $\overrightarrow{A_1D} = (0,2,-2)$ ，解得法向量 $\vec{n}_1 = (1,1,1)$ 。面 C_1BD 内取 $\overrightarrow{C_1B} = (0,-2,-2)$ ， $\overrightarrow{C_1D} = (-2,0,-2)$ ，解得法向量 $\vec{n}_2 = (1,1,-1)$ 。

$$|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1+1-1|}{3} = \frac{1}{3}.$$

判号：取 BD 中点 $O(1,1,0)$ 。 $A_1O = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$ ， $C_1O = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$ ， $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ 。

$$\cos \angle A_1OC_1 = \frac{6+6-8}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} > 0,$$

平面角为锐角，故二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ 。(2) 平面 A_1BD 过 $B(2,0,0)$ ，由法向量 $(1,1,1)$ 得其方程 $x+y+z=2$ 。 P 在棱 BB_1 上，设 $P(2,0,t)$ ， $t \in [0,2]$ ，则

$$d(t) = \frac{|2+0+t-2|}{\sqrt{3}} = \frac{t}{\sqrt{3}}.$$

故 $t=0$ 时 $d=0$ ($P=B$ 恰在平面 A_1BD 内)， $t=2$ 时 $d = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。点 P 到平面 A_1BD 的距离 d 的取值范围为 $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ 。

易错点：(1) 判号必须做—— $|\cos \varphi| = \frac{1}{3}$ 也可能对应钝二面角 $-\frac{1}{3}$ ，这里用平面角验证确认为锐角；(2) 动态点设参后注意参数范围 $t \in [0,2]$ ，端点要检查。

第五章 直线与圆的方程

5.1 例题详解

例题 5.1 解析

思考路径：斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 的分母是横坐标之差——**先判横坐标是否相同**，相同则斜率不存在。斜率的正负决定倾斜角的锐钝。

规范解：(1) $k = \frac{5-1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2 > 0$ ，倾斜角为锐角。(2) C 、 D 两点的横坐标都是 3，即 $x_1 = x_2$ ，直线 CD 垂直于 x 轴，**斜率不存在**，倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 。(3) $k = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ 。

易错点：(2) 是 M1 的直接打击——先判断再代公式，不要硬套公式做“除以零”的运算。(1) 中斜率大于零对应锐角，这是“斜率正负与锐钝”的固定对应。

例题 5.2 解析

思考路径：竖直线没有斜率，点斜式失效，直接写 $x = x_0$ ；其余用点斜式或斜截式，最后统一化为一般式。

规范解：(1) 垂直于 x 轴且过 $(2, -3)$ ，得 $x = 2$ 。(2) 由点斜式： $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$ ，两边乘 2： $2y + 6 = x - 2$ ，移项得一般式 $x - 2y - 8 = 0$ 。(3) 移项： $-3y = -2x - 6$ ，两边除以 -3 ： $y = \frac{2}{3}x + 2$ ，斜率 $k = \frac{2}{3}$ 。与公式 $k = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ 一致。

易错点：(1) 竖直线不能写成 $y = kx + b$ ——这是 M1 的坑。(3) 把一般式化成斜截式时注意变号，斜率是 x 的系数，不是 $-A$ 也不是 $\frac{A}{B}$ 。

5.2 知识点 (1) 直线的倾斜角与斜率详解

A1. A。

思路：先求斜率，看正负。

解析： $k = \frac{5-1}{2-0} = 2 > 0$ ，倾斜角为锐角。

A2. C。

思路：横坐标相同 $\rightarrow$ 竖直线。

解析： M 、 N 横坐标均为 3，直线垂直于 x 轴，倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 。**易错点：** $x = \text{常数}$ 是竖直线，别把竖直线与水平线（ $y = \text{常数}$ ）混淆。

A3. $\sqrt{3}$ 。

思路：斜率是倾斜角的正切。

解析： $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 。

M1. B。

思路：竖直线没有斜率，点斜式、斜截式全部失效，唯一能写的是 $x = x_0$ 。

解析：过 $(2, 3)$ 且垂直于 x 轴，得 $x = 2$ 。

为什么错：选 A 是把“竖直”与“水平”弄反（ $y = 3$ 是与 x 轴平行的水平线）；选 C 是“点斜式通吃所有直线”的错觉——点斜式的前提是斜率存在，竖直线斜率不存在；选 D 更是大错——竖直线当然有方程，只是不写成 $y = kx + b$ 的样子。记住：**竖直线有方程 $x = x_0$ ，只是写不成斜截式。**

5.3 知识点 (2) 直线方程的几种形式详解

A4. 直线方程为 $x + y - 1 = 0$ 。

思路： $k = \tan 135^\circ = -1$ ，用点斜式。

解析： $y + 1 = -1 \cdot (x - 2)$ ，即 $x + y - 1 = 0$ 。

A5. $x + y - 5 = 0$ 或 $3x - 2y = 0$ 。

思路：截距相等分两类——不过原点时截距式 $x + y = a$ ；过原点时截距都是 0，只能设 $y = kx$ 。

解析：(1) 不过原点：设截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ ，即 $x + y = a$ ，代入 $(2, 3)$ 得 $a = 5$ ，即 $x + y - 5 = 0$ ；(2) 过原点： $y = kx$ ，代入 $(2, 3)$ 得 $k = \frac{3}{2}$ ，即 $3x - 2y = 0$ 。

易错点：只写 $x + y - 5 = 0$ 会漏掉“过原点”这一支——截距相等包含“两个截距都为 0”的情形，此时截距式分母为零、必须单独讨论。

A6. $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 。

思路：移项解出 y 。

解析： $4y = -3x + 12$ ， $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 。

M2. B。

思路：截距是带符号的坐标，不是距离。过 $(-2, 0)$ 则 x 截距为 -2 。

解析： x 截距 $a = -2$ ， y 截距 $b = 3$ ，截距式 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ 。

为什么错：选 A、D 把截距当成长度——“ x 截距”是直线与 x 轴交点的横坐标，点 $(-2, 0)$ 在原点左侧， x 截距就是 -2 。**截距可正可负，只有距离才非负**；选 C 把符号安错了轴。另外过原点的直线、与坐标轴平行的直线不能写截距式（分母为零）。

M3. A。

思路：化成斜截式看 x 的系数，或用公式 $k = -\frac{A}{B}$ 。

解析： $y = \frac{2}{3}x + 2$ ，斜率 $\frac{2}{3}$ 。公式法： $k = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ 。

为什么错：选 C ($\frac{3}{2}$) 是把公式记成 $k = \frac{A}{B}$ (丢负号且不翻转)；选 D ($-\frac{3}{2}$) 只记得负号却忘了翻转。斜率 $k = -\frac{A}{B}$ ：负号 + 分子分母翻转，两个动作缺一不可。最稳的办法是移项化成 $y = kx + b$ 再看。

5.4 例题详解

例题 5.3 解析

思考路径：判定位置关系优先用一般式判据——平行看“系数成比例、常数不成比例”，垂直看 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ 。竖直线参与时斜率式失效，必须用一般式。

规范解：(1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{2} = 1$, $\frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{3} = 1$, 而 $\frac{C_1}{C_2} = \frac{-1}{7} \neq 1$, 故 $l_1 \parallel l_2$ 。(2) $A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0$, 故 $l_3 \perp l_4$ 。验证斜率： $k_3 = -\frac{2}{3}$, $k_4 = \frac{3}{2}$, 乘积为 -1 。(3) $x = 2$ 与 $y = 3$ 是一竖一横。化一般式： $x - 2 = 0$ 与 $y - 3 = 0$, $A_1A_2 + B_1B_2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, 垂直。

易错点：(3) 是最经典的坑——竖直线与水平线垂直，但 $k_1k_2 = -1$ 算不出来，因为竖直线没有斜率。凡是含有竖直直线的题目，一律用一般式 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ 判定。

例题 5.4 解析

思考路径：点到直线距离先化一般式再套公式，分子代入取绝对值、分母 $\sqrt{A^2 + B^2}$ ；两平行线距离先统一系数；交点就是解方程组。

规范解：(1) $d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + 8 - 1|}{5} = \frac{10}{5} = 2$ 。(2) 第二条 $2x + 2y + 3 = 0$ 除以 2 归一为 $x + y + \frac{3}{2} = 0$, 与 $x + y - 1 = 0$ 系数相同。

$$d = \frac{\left| -1 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

(3) 联立 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$, 两式相加得 $3x = 9$, $x = 3$, 代入得 $y = 2$ 。交点 $(3, 2)$ 。

易错点：(2) 若不先归一，直接用 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 会把 A 、 B 不同的两式硬套，得出 $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 的错误答案——前提是两式系数必须一致。(1) 中丢了分母 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 会得 10，这正是 M4。

5.5 知识点 (1) 两条直线的位置关系与交点详解

A7. B。

思路：一般式垂直判据 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ 。

解析： $1 \times 2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$ ，垂直。验证斜率： $k_1 = -\frac{1}{2}$ ， $k_2 = 2$ ， $k_1k_2 = -1$ 。

A8. $a = 1$ 或 $a = -2$ 。

思路：两直线平行用一般式判据 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ ，先列比例求 a ，再代入验证常数项不成比例。

解析： $\frac{a+1}{1} = \frac{2}{a} \neq \frac{-4}{1}$ 。由 $(a+1)a = 2$ 得 $a^2 + a - 2 = 0$ ， $a = 1$ 或 $a = -2$ 。检验： $a = 1$ 时两线为 $2x + 2y - 4 = 0$ 与 $x + y + 1 = 0$ ，系数比 2，常数比 -4，平行； $a = -2$ 时两线为 $-x + 2y - 4 = 0$ 与 $x - 2y + 1 = 0$ ，系数比 -1，常数比 -4，平行。均成立。

易错点：平行判据是“系数成比例且常数不成比例”两个条件缺一不可；解出 a 后必须回代验证常数项，防“重合”漏网。

A9. A。

思路：解方程组。

解析：由 $x = 2y - 1$ 代入 $2x + y - 8 = 0$ ： $2(2y - 1) + y - 8 = 0$ ， $5y = 10$ ， $y = 2$ ， $x = 3$ 。交点 $(3, 2)$ 。

5.6 知识点 (2) 距离公式与对称详解

A10. A。

思路：点到直线距离公式。

解析： $d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{5} = \frac{15}{5} = 3$ 。易错点：分子是 $|6 - 12 - 9| = 15$ ，别把 -9 的符号弄丢。

A11. $(-1, -2)$ 。

思路：设对称点 $Q(x_0, y_0)$ ，两个条件——中点在对称轴上，且 PQ 与对称轴垂直。

解析：中点 $\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}\right)$ 在 $x+y=0$ 上： $x_0+y_0=-3$ 。直线 $x+y=0$ 斜率为 -1， PQ 斜率应为 1： $\frac{y_0-1}{x_0-2}=1$ ，即 $x_0-y_0=1$ 。解得 $x_0=-1$ ， $y_0=-2$ ，对称点 $(-1, -2)$ 。

M4. B。

思路：点到直线距离公式，分母是 $\sqrt{A^2+B^2}$ 。

解析： $d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$ 。

为什么错：选 A (10) 只算了分子 $|3+8-1|=10$ ，忘了除以分母 $\sqrt{A^2+B^2}=5$ ——这是 M4 最经典的形态。距离公式是“分子分母一起”，分母是系数平方和开根，一步都不能少。选 D

是把分母算成 $\sqrt{7}$ (系数平方和算错)。

M5. A。

思路：两平行线距离公式要求系数先统一。

解析： l_2 归一为 $x + y + \frac{3}{2} = 0$, $d = \frac{\left| -1 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ 。

为什么错：选 D ($2\sqrt{2}$) 是不归一直接算： $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-1 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ——两条线的 A 、 B 不同 (第二条是 $2x + 2y + 3 = 0$)，公式不适用。两平行线距离公式的前提是两条线化成 $Ax + By + C_1 = 0$ 、 $Ax + By + C_2 = 0$ 同系数的形式。复核：取 l_1 上一点 $(1, 0)$ ，算它到 $2x + 2y + 3 = 0$ 的距离 $\frac{|2 + 0 + 3|}{\sqrt{4+4}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ 。

5.7 例题详解

例题 5.5 解析

思考路径：已知圆心半径 $\rightarrow$ 标准式直接写；给一般式 $\rightarrow$ 配方读圆心半径；过三点 $\rightarrow$ 设一般式待定 D 、 E 、 F 。

规范解：(1) 标准式 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 。展开： $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 。(2) 配方： $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ 。圆心 $(3, -2)$ ，半径 4。用公式验证： $D = -6$, $E = 4$, $F = -3$, $D^2 + E^2 - 4F = 64$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$ 。(3) 设一般式 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 。代入 $A(0, 0)$: $F = 0$ ；代入 $B(4, 0)$: $D = -4$ ；代入 $C(0, 2)$: $E = -2$ 。圆为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ ，配方 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ，圆心 $(2, 1)$ ，半径 $\sqrt{5}$ 。

易错点：(3) 过三点求圆必须用一般式 (三个待定系数)，把每个点代入得到一个方程；别试图用标准式硬凑。

例题 5.6 解析

思考路径：两圆位置看圆心距 d 与 $r_1 + r_2$ 、 $|r_1 - r_2|$ 的比较；公共弦方程 = 两圆方程相减。

规范解：(1) 圆心 $(1, 0)$ 与 $(-2, 0)$, $d = 3$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_1 + r_2 = 3 = d$, 外切。(2) C_2 展开: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 。两式相减得 $4x = 4$, 公共弦所在直线 $x = 1$ 。代入 $x^2 + y^2 = 4$: $y = \pm\sqrt{3}$ 。交点 $(1, \sqrt{3})$ 、 $(1, -\sqrt{3})$, 公共弦长 $2\sqrt{3}$ 。

易错点：(2) 把圆写成一般式后再相减， $x^2 + y^2$ 项恰好抵消，留下的是一次方程——这就是公共弦方程。

5.8 知识点 (1) 圆的标准方程与一般方程详解

A12. A。

思路：配方读圆心半径。

解析： $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ ，圆心 $(2, -3)$ ，半径 4。**易错点：**圆心坐标与配方符号相反 (y 项 $+6y \rightarrow$ 配方后 $(y+3)^2 \rightarrow$ 圆心纵坐标 -3)；半径是 $\sqrt{16} = 4$ 不是 16。

A13. $m < 5$ 。

思路：一般方程表示圆的充要条件是 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 。

解析： $D = 4, E = -2, F = m, D^2 + E^2 - 4F = 16 + 4 - 4m > 0, m < 5$ 。检验： $m = 4$ 时配方得 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，是圆。

M6. D。

思路：一般方程表示圆要先检查 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 。

解析：配方： $(x+1)^2 + (y-2)^2 = -5$ 。右边为负数，**不表示任何图形**。公式检验： $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 16 - 40 = -20 < 0$ 。

为什么错：选 A、B 只看到“ $x^2、y^2$ 系数相同 (都是 1)”就断定是圆——**系数相同只是必要条件，不是充分条件**；还必须 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 。选 C 是把 $= 0$ (点圆) 的情形误判。**判定口诀：**先算 $D^2 + E^2 - 4F$ ，大于零才是圆。

5.9 知识点 (2) 圆与圆的位置关系详解

A14. D。

思路：两圆位置判断。

解析： C_1 圆心 $(0, 0), r_1 = 2; C_2$ 圆心 $(1, 0), r_2 = 1$ ；圆心距 $d = 1$ 。 $r_1 - r_2 = 1 = d$ ，**内切** (C_2 在 C_1 内部，相切于 $(2, 0)$)。

A15. $x = \frac{1}{2}$ 。

思路：两圆方程相减即得公共弦所在直线。

解析： $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相减： $2x = 1$ ，即 $x = \frac{1}{2}$ 。检验：代回 $x^2 + y^2 = 1$ 得 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，两点均在两圆上。

B1. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 14 题) 填 $3x + 4y - 5 = 0$ (答案不唯一)。

思路：两圆圆心 $(0, 0), (3, 4)$ ，半径 1、4，圆心距 $5 = 1 + 4$ ，**两圆外切**。公共切点把连心线 O_1O_2 分成 $1:4$ ，即切点 $T\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 。内公切线过 T 且垂直于连心线 (连心线斜率 $\frac{4}{3}$ ，切线斜率 $-\frac{3}{4}$)。

解析：设切线 $y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right)$ ，化简得 $3x + 4y - 5 = 0$ 。

验算：原点到该直线距离 $\frac{|-5|}{5} = 1 = r_1$ ；点 $(3, 4)$ 到该直线距离 $\frac{|9 + 16 - 5|}{5} = 4 = r_2$ 。填内公切线 $3x + 4y - 5 = 0$ 即可。

易错点：本题是“圆与圆位置关系 + 切线”的综合——先判断两圆位置 (外切)，再找公切线，比直接设斜率硬解更快。写出一条满足条件的直线即可。

B2. (2022 · 全国乙卷 · 第 14 题) 填 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (答案不唯一)。

思路：过四点中任意不共线三点作圆，答案不唯一。选 $(0,0)$ 、 $(4,0)$ 、 $(4,2)$ ：前两点连线是水平弦，中垂线为 $x=2$ ；后两点连线是竖弦，中垂线为 $y=1$ ；两中垂线交于圆心。

解析：圆心 $C(2,1)$ ，半径 $r=|CO|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ ，圆为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 。另解（选 $(0,0)$ 、 $(4,0)$ 、 $(-1,1)$ ）：设一般式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ，代入三点得 $F=0$ ， $D=-4$ ， $E=-6$ ，圆为 $x^2+y^2-4x-6y=0$ 。故还可填 $x^2+y^2-4x-6y=0$ 、 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$ 等（共四种取法）。

易错点：(1) 先目测哪三点比较好算（含两条互相垂直的弦时，中垂线一眼看出圆心）；(2) 直接设一般式待定系数也可，但要检验 $D^2+E^2-4F>0$ 。

C1. 能安全通过。

思路：把拱桥截面放坐标系——以水面为 x 轴、拱顶对称轴为 y 轴，拱两端 $(-4,0)$ 、 $(4,0)$ ，拱顶 $(0,4)$ 。圆心 $(0,0)$ ，半径 4，拱线为 $x^2+y^2=16$ ($y\geq 0$)。

解析：货船宽 3 m 沿正中行驶，船两侧边缘的横坐标为 $x=\pm 1.5$ 。船两侧对应位置拱高为

$$y=\sqrt{16-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{64-9}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2}\approx 3.71$$

货船高出水面 3.2 m，而 $3.71>3.2$ ，船两侧与桥拱之间都留有约 0.5 m 的余量，故能安全通过。

易错点：判断“能否通过”要看船最宽处的两侧对应拱高是否足够，而不是只看拱顶高度（拱顶虽然 4 m 高，但船要走的是桥洞最窄处的边缘）。

5.10 例题详解

例题 5.7 解析

思考路径：几何法 (d 与 r) 判位置，垂径定理求弦长；代数法联立验证。

规范解：(1) 圆心 $(0,0)$ ，半径 $r=2$ 。 $d=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<2$ ，**相交**。弦长 $=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$ 。(2) $d=\frac{|0+0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$ 。弦长 $=2\sqrt{25-9}=2\times 4=8$ 。

易错点：(2) 弦长公式是 $2\sqrt{r^2-d^2}$ ，**先乘 2 再开根**——写成 $\sqrt{r^2-d^2}$ ($=4$) 就漏了半弦的两倍；把 d^2 写成 d 也会错。

例题 5.8 解析

思考路径：过圆上一点的切线：验证点在圆上后，用“半径垂直切线”或直接套公式；过圆外一点的切线：设斜率 + $d=r$ ，**补查竖直线**，总数必须是两条。

规范解：(1) 验证 $P(2,1)$ 在圆上： $(2-1)^2+(1+1)^2=5$ 。圆心 $C(1,-1)$ ， CP 方向向量 $(1,2)$ ，切线垂直于 CP ，过 P ： $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)=0$ ，即 $x+2y-4=0$ 。(2) 点 $(1,2)$ 到原点距离 $\sqrt{5}>1$ ，是圆外点，切线应有两条。(1) 设切线 $y-2=k(x-1)$ ，即 $kx-y+(2-k)=$

0, 由 $d = r: \frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{3}{4}$ 。切线 $3x - 4y + 5 = 0$ 。(2) 检查竖直线 $x = 1$: 过点 $(1, 2)$ 且垂直于 x 轴, 到原点距离 $= 1 = r$, 是切线。这条是设 k 永远算不出来的。答: 两条切线为 $x = 1$ 与 $3x - 4y + 5 = 0$ 。

易错点: (2) 用 $d = r$ 只解出一个 k 就停手——点斜式 $y - 2 = k(x - 1)$ 天然排除了竖直线, 而竖直线恰是本题的另一条切线。**过圆外一点求切线:** 先查竖直线, 再设 k 解斜率, 总数必须等于 2。

例题 5.9 解析

思考路径: 圆心到直线的距离 d 与半径 r 决定最值——沿“圆心到直线垂线”方向走半径到圆的两端, 最近、最远点都在那里。

规范解: 圆心 $(0, 0)$ 到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5} = 2.4 > 2 = r$, 直线在圆外。最大值 $= d + r = \frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5}$; 最小值 $= d - r = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$ 。

易错点: 最值公式的方向——“想靠近直线就走垂足方向, 想远离就反着走”, $d_{\min} = |d - r|$, $d_{\max} = d + r$, 别把谁加谁减记反 (M 层专门打击)。

5.11 知识点 (1) 直线与圆的位置关系与弦长详解

A16. B。

思路: 几何法 d 与 r 。

解析: $d = \frac{|0+0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$, 相切。

A17. A。

思路: 垂径定理。

解析: $d = \frac{15}{5} = 3$, 弦长 $= 2\sqrt{25-9} = 8$ 。

A18. $2\sqrt{3}$ 。

思路: 先算弦心距, 再套垂径定理。

解析: $d = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5} = 1$, 弦长 $= 2\sqrt{4-1^2} = 2\sqrt{3}$ 。

M7. C。

思路: 位置关系与 d 、 Δ 的对应必须背准: $d > r$ 相离 ($\Delta < 0$)、 $d = r$ 相切 ($\Delta = 0$)、 $d < r$ 相交 ($\Delta > 0$)。

解析: C 正确。A 错: $\Delta > 0$ 对应相交不是相切; B 错: $d > r$ 是相离不是相交; D 错: $d < r$ 是相交不是相离。

为什么错: 三种位置关系与 d 、 Δ 的“三种对应”是互锁的——记一个错一串。选 A 的同学把“ Δ 大于零”当“有公共点”, 但其实 $\Delta > 0$ 是两个不同交点 (相交), 相切是 $\Delta = 0$ (唯一公共点)。**几何法 (d 与 r) 与代数法 (Δ) 殊途同归, 考试时两法互验最稳妥。**

B3. (2023 · 新高考 II 卷 · 第 15 题) 填 2 (或 -2 、 $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2}$)。

思路：圆心 $C(1,0)$ ，半径 $r=2$ 。设弦心距 d ，则面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d$ 。

解析：直线 $x-my+1=0$ 到圆心 $C(1,0)$ 的距离 $d = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$ 。弦长 $|AB| = 2\sqrt{4 - \frac{4}{1+m^2}} = \frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}}$ 。面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4|m|}{1+m^2}$ 。令 $S = \frac{8}{5}$ ： $2|m|^2 - 5|m| + 2 = 0$ ，解得 $|m|=2$ 或 $|m|=\frac{1}{2}$ 。故 $m = \pm 2$ 或 $m = \pm \frac{1}{2}$ ，填其中一个即可。

易错点：本题把“直线与圆相交”的弦长、弦心距、面积三件套串起来考—— $S = \frac{1}{2} \times \text{弦长} \times \text{弦心距}$ ，别把弦长公式 $2\sqrt{r^2 - d^2}$ 的系数 2 丢掉。

5.12 知识点 (2) 圆的切线方程详解

A19. 切线方程为 $2x - 3y = 13$ 。

思路：验证点在圆上，用“半径垂直切线”或公式。

解析： $2^2 + (-3)^2 = 13$ ，点 $(2, -3)$ 在圆上。过切点的半径方向向量为 $(2, -3)$ ，切线法向量即 $(2, -3)$ ： $2(x-2) - 3(y+3) = 0$ ，即 $2x - 3y = 13$ 。公式法（圆心在原点）： $x_0x + y_0y = r^2$ ，得 $2x - 3y = 13$ ，一致。**易错点：**圆心在原点时特例公式 $x_0x + y_0y = r^2$ 好用，但圆心不在原点时必须回到“半径垂直切线”推导。

A20. $b = \pm 2$ 。

思路：相切等价于圆心到直线距离等于半径。

解析： $d = \frac{|0-0+b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ， $|b|=2$ ， $b = \pm 2$ 。

M8. B。

思路：过圆外一点作切线必有两条；点斜式天然排除了竖直线，必须单独检查竖直线。

解析： $P(2,3)$ 到原点距离 $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} > 2$ ，是圆外点，切线应有两条。(1) 设 $y-3 = k(x-2)$ ，由 $d=r$ ： $\frac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$ ，解得 $k = \frac{5}{12}$ 。切线 $5x - 12y + 26 = 0$ （小明解对了这条）。(2) 检查竖直线 $x=2$ ：过 $P(2,3)$ ，到原点距离 $= 2 = r$ ，**是切线**。所以应有两条切线： $x=2$ 与 $5x - 12y + 26 = 0$ 。小明漏了竖直线。选 B。

为什么错：选 A 是“解出几条就是几条”的惰性思维——点斜式设 $y-3 = k(x-2)$ 本身就假设了斜率存在，竖直线不在讨论范围之内；选 C 是以为小明的 k 算错了（其实没算错）；选 D 是位置判断错。**口诀：**过圆外一点求切线，先查竖直线，再解斜率，总数凑够两条。

B4. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 6 题) B。

思路：圆化成标准式读圆心半径；两条切线与 PC （ P 为圆外点、 C 为圆心）对称， PC 平分两切线的夹角。

解析： $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 化为 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ ，圆心 $C(2,0)$ ，半径 $r = \sqrt{5}$ 。设切点为

A, 则 $\angle APC = \frac{\alpha}{2}$, $\triangle PAC$ 为直角三角形 ($PA \perp AC$)。 $PC = \sqrt{(2-0)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{5}$ 。

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{PC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{PA}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

选 B。

易错点：把 α 当成 $\angle APC$ 直接算 $\sin \angle APC = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ 就漏了二倍角（选 C/D 的同学往往在此出错）；要记准“两条切线的夹角被连心线平分，是 $\alpha/2$ ”。

5.13 知识点 (3) 圆上点到直线的距离最值详解

A21. B。

思路： $d+r$ 。

解析： $d = \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$, 最大值 $= d+r = 2+1 = 3$ 。

B5. (2021 · 新高考 I 卷 · 第 11 题, 多选) ACD。

思路：先求直线 AB 方程, 用圆心到直线的距离 d 与半径 r 定出圆上点距离的取值范围；再数形结合看 $\angle PBA$ 最值时 P 的位置（切点）。

解析：直线 AB: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x+2y-4=0$ 。圆心 $M(5,5)$ 到 AB 的距离

$$d = \frac{|5+10-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} \approx 4.92 > 4 = r$$

直线 AB 与圆相离。圆上点到直线距离的取值范围为 $[d-r, d+r] = \left[\frac{11}{\sqrt{5}} - 4, \frac{11}{\sqrt{5}} + 4 \right]$ 。因 $d-4 \approx 0.92 < 2$, $d+4 \approx 8.92 < 10$, 故 A 正确、B 错误。当 $\angle PBA$ 最大或最小时, PB 都与圆 M 相切 (P 为切点)。 $BM = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{34}$, $PM = 4$, 由勾股定理

$$|PB| = \sqrt{BM^2 - PM^2} = \sqrt{34 - 16} = 3\sqrt{2}$$

故 C、D 均正确。答案 ACD。

为什么错：选 B 的同学只看了“距离的最大值小于 10”就以为“最小值大于 2”——**最小值是 $d-r \approx 0.92$, 在 2 以内**, 要分别算两端；选漏 C/D 的同学没有抓住“ $\angle PBA$ 取极值时 PB 恰为切线”这个几何事实, 硬解坐标运算量极大。**与圆有关的最值题优先数形结合：距离最值看 $d \pm r$, 角最值看切线。**

C2. (1) 会进入；(2) $40\sqrt{5}$ km。

思路：雷达覆盖区域是圆，渔船航线是直线——直线与圆相交则进入，进入区内的航行距离就是弦长。

解析：(1) 圆心（雷达站） $P(0,0)$ 到航线 $3x + 4y - 200 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|-200|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{200}{5} = 40 < 60$$

$d < r$ ，直线与圆相交，航线会进入探测区。(2) 弦长 $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{60^2 - 40^2} = 2\sqrt{2000} = 40\sqrt{5}$ (km)。

易错点：题中直线到原点距离 40 是“进入探测区的弦心距”，不是“进入距离”——进入距离是弦长。建模时先判断 d 与 r 的关系（进入与否），再算弦长（进入多深）。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：(1) 含参直线过定点——把 m 的系数与常数项分组，令 m 的系数为零且剩余部分为零；(2) 原点到直线距离随 m 变化，化为关于 m 的函数求最值（判别式法）。

规范解：(1) 整理： $l: m(2x + y + 3) + (x - y - 4) = 0$ 。令 $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$ ，解得 $x = \frac{1}{3}$ ，

$y = -\frac{11}{3}$ 。故 l 恒过定点 $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ 。(2) 原点到 l 的距离

$$d = \frac{|3m - 4|}{\sqrt{(2m + 1)^2 + (m - 1)^2}}$$

平方： $d^2 = \frac{(3m - 4)^2}{5m^2 + 2m + 2}$ 。记 $d^2 = t$ ，则 $(9 - 5t)m^2 - (24 + 2t)m + (16 - 2t) = 0$ 。关于 m 有实根，判别式非负，化简得 $t(122 - 9t) \geq 0$ ， $0 \leq t \leq \frac{122}{9}$ 。故 $d_{\max} = \frac{\sqrt{122}}{3}$ 。

易错点：(1) 分组法是含参直线过定点的标准动作—— m 的系数组成一个方程、剩余组成另一个；(2) 求 $\frac{\text{二次式}}{\text{二次式}}$ 型最值，把比值设为 t 后用判别式法（也可配方，但本题判别式法更直接）。

S2 解析

思考路径：圆心在弦 AB 的垂直平分线上，又在给定直线上——两条线交于圆心；再用垂径定理求弦长、用 $d + r$ 求最值。

规范解：(1) $A(1,0)$ 、 $B(3,0)$ 是圆上两点，圆心在弦 AB 的中垂线 $x = 2$ 上；又圆心在 $x - y + 2 = 0$ 上，故圆心 $C(2,4)$ 。半径 $r = |CA| = \sqrt{17}$ 。圆 $C: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 17$ 。(2) 圆心 $C(2,4)$ 到直线 $x - y + 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|2 - 4 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{17}$ ，直线与圆相交。弦长 $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{17 - 2} = 2\sqrt{15}$ 。(3) 圆上的点到直线距离最大值 $= d + r = \sqrt{2} + \sqrt{17}$ 。

易错点：(1) 两定点确定的弦的中垂线过圆心，这一几何事实是“给两点 + 圆心所在直线求圆”的标准钥匙；(2) 先判 $d < r$ 再套垂径定理，弦长公式中 d 是弦心距不是别的距离。

第六章 圆锥曲线的方程

6.1 例题详解

例题 6.1 解析

思考路径：先判焦点轴（看大分母），再取 a^2 、 b^2 ，用 $a^2 = b^2 + c^2$ 求 c ，最后写焦点、离心率。反求 $a:b$ 时用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ 。

规范解：(1) x^2 分母 $25 > 16 \rightarrow$ 焦点在 x 轴， $a = 5$ ， $b = 4$ ， $c = \sqrt{25 - 16} = 3$ 。长轴长 $2a = 10$ ，短轴长 $2b = 8$ ，焦距 $2c = 6$ ，焦点 $(\pm 3, 0)$ ，离心率 $e = \frac{3}{5}$ 。(2) $e^2 = \frac{3}{4}$ ， $c^2 = \frac{3}{4}a^2$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{4}a^2$ ，故 $b = \frac{1}{2}a$ ， $a:b = 2:1$ 。

易错点： c 用 a^2 减 b^2 再开方（椭圆里 a 最大）；离心率是 c 比 a ，别写反成 $\frac{a}{c}$ 。

例题 6.2 解析

思考路径：由顶点、焦点位置确定焦点轴与 a 、 c ；定义直译题先验证 $2a > 2c$ （存在性），再求 $b^2 = a^2 - c^2$ 写标准式。

规范解：(1) 顶点 $(\pm 6, 0)$ 、焦点 $(\pm 2, 0)$ 都在 x 轴 $\rightarrow$ 焦点在 x 轴， $a = 6$ ， $c = 2$ ， $b^2 = 36 - 4 = 32$ 。标准方程 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 。(2) $2a = 10$ ， $a = 5$ ； $2c = 8$ ， $c = 4$ 。验证 $2a = 10 > 2c = 8$ ，轨迹是椭圆。 $b^2 = 25 - 16 = 9$ 。轨迹方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

易错点：(2) “和”字是椭圆的信号； a 是“和的一半”，不是和本身；存在性条件 $2a > 2c$ 是定义的一部分，别省略。

6.2 知识点 (1) 椭圆的定义与标准方程详解

A1. A。

思路： $2a = 10$ ， $2c = 6$ 。

解析： $a = 5$ ， $c = 3$ ， $b^2 = 25 - 9 = 16$ ；焦点 F_1 、 F_2 在 x 轴上，方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 。

A2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 。

思路：顶点在 x 轴 $\rightarrow a = 6$ ；焦距 $4 \rightarrow c = 2$ 。

解析: $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$, 方程 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 。

A3. 6。

思路: 椭圆定义——椭圆上任意一点到两焦点距离之和恒为 $2a$ 。

解析: $a = 5$, $2a = 10$, $PF_1 + PF_2 = 10$, $PF_1 = 4$, 故 $PF_2 = 10 - 4 = 6$ 。

易错点: a 是长半轴长, $2a$ 才是“和”; 别把 $a = 5$ 当成和。

M1. B。

思路: 椭圆看大分母—— y^2 分母 25 大, 焦点在 y 轴。

解析: $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, 焦点在 y 轴 $\rightarrow$ 焦点 $(0, \pm 4)$ 。

为什么错: 选 A $((\pm 4, 0))$ 是“默认焦点在 x 轴”——看到 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$ 就想当然按 x 轴处理; 选 C 用 $\sqrt{25 + 9}$ (把椭圆当双曲线)。判焦点轴永远先比较分母大小, 大分母对应的轴就是焦点所在的轴。

6.3 知识点 (2) 椭圆的几何性质与离心率详解

A4. B。

思路: 判焦点轴, 求 c , 再算 e 。

解析: $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, $e = \frac{4}{5}$ 。易错点: c 用减号 $(25 - 9)$, 别加成双曲线的 $\sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ 。

A5. A。

思路: y^2 分母大 $\rightarrow$ 焦点在 y 轴, $a = 5$, $b = 3$ 。

解析: $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, $e = \frac{4}{5}$ 。易错点: 焦点在 y 轴时 a^2 在 y^2 的分母 (25), 别把 9 当 a^2 。

B1. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 5 题) A。

思路: 分别写离心率, 用 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ 建方程。

解析: $C_1: b^2 = 1$, $c_1^2 = a^2 - 1$, $e_1 = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$; $C_2: a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $c_2 = \sqrt{3}$, $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。由 $e_2 = \sqrt{3}e_1: \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$, 平方: $a^2 = 4(a^2 - 1)$, $3a^2 = 4$, $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。选 A。

易错点: 两个椭圆都是“焦点在 x 轴”型 (y^2 的系数是 1, 即 $b^2 = 1$); 平方后 $a^2 = \frac{4}{3}$, 开方取正。

C1. (1) $a = 2$ 亿 km, $c = 0.6$ 亿 km; (2) $e = 0.3$ 。

思路: 太阳在焦点, 近日距 $= a - c$, 远日距 $= a + c$, 两个条件联立解 a 、 c 。

解析: (1) $\begin{cases} a - c = 1.4 \\ a + c = 2.6 \end{cases}$, 相加得 $2a = 4$, $a = 2$; 相减得 $2c = 1.2$, $c = 0.6$ (单位: 亿 km)。(2) $e = \frac{c}{a} = \frac{0.6}{2} = 0.3$ 。

易错点：近日点、远日点是“焦点（太阳）在椭圆内部”， $a - c$ 、 $a + c$ 分别对应它们到太阳的距离——别把 a 与 c 的关系用反。

6.4 知识点 (3) 椭圆的焦点三角形与焦点弦详解

A6. $3\sqrt{3}$ 。

思路：焦点三角形 ($\triangle PF_1F_2$) ——用余弦定理把 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 与 $PF_1 + PF_2 = 2a$ 联立，先求 $PF_1 \cdot PF_2$ ，再算面积。

解析： $a = 5$ ， $c = 4$ ， $F_1F_2 = 8$ ， $PF_1 + PF_2 = 10$ 。由余弦定理：

$$F_1F_2^2 = PF_1^2 + PF_2^2 - 2 \cdot PF_1 \cdot PF_2 \cdot \cos 60^\circ = (PF_1 + PF_2)^2 - 3 \cdot PF_1 \cdot PF_2$$

即 $64 = 100 - 3 \cdot PF_1 \cdot PF_2$ ， $PF_1 \cdot PF_2 = 12$ 。

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot PF_1 \cdot PF_2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

易错点： $(PF_1 + PF_2)^2 = PF_1^2 + PF_2^2 + 2 \cdot PF_1 \cdot PF_2$ ，而余弦定理里系数是 $2 \cos 60^\circ = 1$ ，所以合并后是 $3 \cdot PF_1 \cdot PF_2$ ，不是 2——这一步是焦点三角形面积题的最高频失分点。

M2. B。

思路：椭圆与双曲线的 a 、 b 、 c 关系背靠背对比——椭圆 $c^2 = a^2 - b^2$ （用减），双曲线 $c^2 = a^2 + b^2$ （用加）。

解析：椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ： $a = 5$ ， $b = 4$ ， $c = 3$ ，焦距 6；双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ： $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = 5$ ，焦距 10。故选 B。

为什么错：选 A（6 与 6）是把双曲线的 c 也算成 $\sqrt{16-9}$ ；选 D（8 与 6）是把椭圆焦距算成 $2a = 10$ 的邻近错误。**一句话记牢：椭圆 a 最大（减），双曲线 c 最大（加）**——两式的区别就在“斜边是 a 还是 c ”。

B2. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 16 题) 填 13。

思路：由离心率与直线垂直关系求出 a ，再算 $\triangle ADE$ 周长。关键是先用“定义”转化—— D 、 E 在椭圆上， $|DF_1| + |DF_2| = 2a$ ， $|EF_1| + |EF_2| = 2a$ 。

解析： $e = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{a}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。 $A(0, b)$ ， $F_2(c, 0)$ ， $k_{AF_2} = -\frac{b}{c} = -\sqrt{3}$ 。过 F_1 垂直于 AF_2 的直线斜率为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，方程为 $y = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{3}}$ 。代入椭圆 ($b^2 = \frac{3}{4}a^2$) 得 $13x^2 + 4ax - 8a^2 = 0$ 。 $x_1 + x_2 = -\frac{4a}{13}$ ， $x_1x_2 = -\frac{8a^2}{13}$ 。弦长

$$|DE| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} |x_1 - x_2| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{432a^2}{169}} = \frac{24a}{13}$$

由 $|DE| = 6$ 得 $a = \frac{13}{4}$ 。再由 $|AD|^2 + |AE|^2 = \frac{223}{8}$ 、 $|AD| \cdot |AE| = a^2 = \frac{169}{16}$ ，得 $(|AD| + |AE|)^2 = \frac{223}{8} + 2 \times \frac{169}{16} = 49$ ， $|AD| + |AE| = 7$ ，周长 $= 7 + 6 = 13$ 。

易错点：本题计算量集中在联立消元后的韦达代换；不要硬解 D 、 E 坐标。算出 $a = \frac{13}{4}$ 后用“弦的平方和与乘积”配凑 $|AD|+|AE|$ ，是这道填空压轴的核心技巧。

为什么错：直接联立求 D 、 E 坐标再逐段算周长，计算量爆炸且极易算错——凡出现“椭圆上两点到焦点”的周长问题，先想椭圆定义 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 的整体代换；别把 $|AD|$ 、 $|AE|$ 拆开硬求。

6.5 例题详解

例题 6.3 解析

思考路径：先判焦点轴（看正号项）， x^2 项为正 $\rightarrow$ 焦点在 x 轴；用 $c^2 = a^2 + b^2$ 求 c ；渐近线用“右边换 0”法。

规范解： $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = \sqrt{16+9} = 5$ 。实轴长 $2a = 8$ ，虚轴长 $2b = 6$ ，焦距 $2c = 10$ ，焦点 $(\pm 5, 0)$ ，离心率 $e = \frac{5}{4}$ 。渐近线：把右边 1 换 0： $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$ ，得 $y = \pm \frac{3}{4}x$ 。

易错点：双曲线 c 用加 $(16+9)$ ；渐近线斜率是 $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ ，别写成 $\frac{4}{3}$ 。

例题 6.4 解析

思考路径：由渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 得 $a:b$ ，设 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ 代点定 λ ；定义直译验证 $0 < 2a < 2c$ 。

规范解：(1) $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ，设 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \lambda$ ($\lambda > 0$)。代入 $(3\sqrt{2}, 2)$ ： $\frac{18}{9} - \frac{4}{4} = 1$ ，故 $\lambda = 1$ 。方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。(2) $2a = 6$ ， $a = 3$ ； $2c = 10$ ， $c = 5$ 。验证 $0 < 6 < 10$ 。 $b^2 = 25 - 9 = 16$ ，轨迹方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ （左右两支都在）。

易错点：(2) “差的绝对值”决定两支；若题目写 $|PF_1| - |PF_2| = 6$ （不带绝对值），轨迹只是右支 $x \geq 3$ 。读题时看清有没有绝对值。

6.6 知识点 (1) 双曲线的定义与标准方程详解

A7. A。

思路： $2a = 6$ ， $2c = 10$ 。

解析： $a = 3$ ， $c = 5$ ， $b^2 = 25 - 9 = 16$ ，焦点在 x 轴： $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。**易错点：**带绝对值 $\rightarrow$ 两支；选 D 的“ $x \geq 3$ 单支”是不带绝对值时的答案。

A8. A。

思路：正号项在 $y^2 \rightarrow$ 焦点在 y 轴。

解析： $a^2 = 9$ ， $b^2 = 16$ ， $c = \sqrt{9+16} = 5$ ，焦点 $(0, \pm 5)$ 。

A9. 4 或 20。

思路：双曲线定义——到两焦点距离之差的绝对值为 $2a$ 。

解析： $a = 4$, $2a = 8$, $|PF_2 - 12| = 8$, $PF_2 = 4$ 或 20 。两种取值分别对应 P 在双曲线左右两支的情形。

易错点：双曲线是“差的绝对值”， PF_2 有两个可能值，别只写一个；若题目给定 $PF_1 - PF_2 = 8$ （不带绝对值），才只有一支对应值。

M3. B.

思路：正号项在 $y^2 \rightarrow$ 焦点在 y 轴 $\rightarrow$ 渐近线 $y = \pm \frac{a}{b}x$ 。

解析： $a = 3$, $b = 4$, 渐近线 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{3}{4}x$ 。用“右边换 0”验证： $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0 \rightarrow y^2 = \frac{9}{16}x^2 \rightarrow y = \pm \frac{3}{4}x$ 。

为什么错：选 A ($\pm \frac{4}{3}x$) 是把焦点在 x 轴的渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 硬套到焦点在 y 轴的题——这是 M3 最典型的表现。**渐近线斜率的记忆法：**横轴下面的 b 、竖轴下面的 a ；更保险的做法是“右边换 0 解 y ”，永远不会颠倒。

6.7 知识点 (2) 双曲线的几何性质与离心率 (含焦点三角形) 详解

A10. A.

思路： $c^2 = a^2 + b^2$ (用加)。

解析： $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16 + 9} = 5$ 。实轴 $2a = 8$, 虚轴 $2b = 6$, 焦距 $2c = 10$ 。**易错点：** c 是 5 不是 $\sqrt{7}$ ——双曲线用加号。

A11. $\frac{3}{2}$.

思路： $c^2 = a^2 + b^2$ 后套 $e = \frac{c}{a}$ 。

解析： $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{4 + 5} = 3$, $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ 。

A12. 16.

思路：双曲线焦点三角形——由 $|PF_1 - PF_2| = 2a$ 与 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 联立求 $PF_1 \cdot PF_2$, 再算面积。

解析： $a = 3$, $c = 5$, $F_1F_2 = 10$, $|PF_1 - PF_2| = 6$ 。由勾股定理 ($\angle F_1PF_2 = 90^\circ$): $PF_1^2 + PF_2^2 = F_1F_2^2 = 100$ 。又 $|PF_1 - PF_2|^2 = 36$, 即 $PF_1^2 + PF_2^2 - 2 \cdot PF_1 \cdot PF_2 = 36$, 故 $100 - 2 \cdot PF_1 \cdot PF_2 = 36$, $PF_1 \cdot PF_2 = 32$ 。

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot PF_1 \cdot PF_2 = 16$$

易错点：双曲线焦点三角形的平方关系是“减” ($|PF_1 - PF_2| = 2a$)，与椭圆的“加” ($PF_1 +$

$PF_2 = 2a$) 刚好相反——把双曲线当成椭圆用加法，是焦点三角形题的头号错误。

B3. (2022 · 全国乙卷 · 第 11 题) C。

思路：这是一道“双曲线 + 圆”的综合题。过 F_1 作圆 D 的切线，切点记为 G ，则 $OG \perp F_1N$ ，且 $OG = a$ 、 $OF_1 = c$ 、 $GF_1 = b$ (直角三角形)。把 $\angle F_1NF_2$ 的余弦条件翻译到 $\triangle F_1NF_2$ 中，用正弦定理 + 双曲线定义建方程。

解析：设 $\angle F_1NF_2 = \theta$ ， $\angle NF_1F_2 = \varphi$ 。由 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 得 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 。在 $\text{Rt}\triangle OGF_1$ 中， $\sin \varphi = \frac{OG}{OF_1} = \frac{a}{c}$ ， $\cos \varphi = \frac{GF_1}{OF_1} = \frac{b}{c}$ 。 $\angle F_1F_2N = \pi - \theta - \varphi$ ，故

$$\sin \angle F_1F_2N = \sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi = \frac{4b + 3a}{5c}$$

在 $\triangle F_1NF_2$ 中由正弦定理： $\frac{F_1F_2}{\sin \theta} = \frac{2c}{4/5} = \frac{5c}{2}$ ，于是

$$NF_2 = \frac{5c}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{5a}{2}, \quad NF_1 = \frac{5c}{2} \cdot \sin \angle F_1F_2N = \frac{4b + 3a}{2}$$

由 $\cos \theta > 0$ 知 N 在右支上， $NF_1 - NF_2 = 2a$ ：

$$\frac{4b + 3a}{2} - \frac{5a}{2} = 2a \implies 2b - a = 2a \implies 2b = 3a$$

离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 。选 C。

易错点：(1) 必须先把“切线 + 圆”还原成直角三角形关系 ($OG = a$ 、 $GF_1 = b$)，否则无从下手；(2) 由 $\cos \theta > 0$ 判断 N 在右支，才能用 $NF_1 - NF_2 = 2a$ (若判错分支会得到错误方程)。

为什么错：选 A、B、D 的同学往往 (1) 硬算坐标设点，运算爆炸；(2) 把 $\angle F_1NF_2$ 误当成 $\angle NF_1F_2$ 或 $\angle F_1F_2N$ ，正弦定理代错角。**本题的标准动作是：**切线 $\rightarrow$ Rt 三角形 $\rightarrow$ 正弦定理 + 双曲线定义，一步都不能跳；“求离心率”本质是找 a 、 b 的齐次关系 (本题为 $2b = 3a$)。

C2. (1) $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{1200} = 1$ ($x \geq 20$ ，右支)；(2) 双曲线，实轴长 40 km，焦距 80 km。

思路：“到两定点距离差为常数”正是双曲线的定义。 A 、 B 是焦点。

解析：设 $A(-40, 0)$ 、 $B(40, 0)$ ，船在 $P(x, y)$ 。 $|PA| - |PB| = 40$ 恒成立 $\rightarrow 2a = 40$ ， $a = 20$ ； $|AB| = 80 = 2c$ ， $c = 40$ 。验证 $0 < 40 < 80$ 。 $b^2 = c^2 - a^2 = 1600 - 400 = 1200$ 。轨迹为双曲线右支： $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{1200} = 1$ ($x \geq 20$)。实轴长 $2a = 40$ km，焦距 $2c = 80$ km。

易错点： A 、 B 相距 80 km 是焦距 $2c$ ，不是半焦距 c ；“到 A 减到 B ”决定是哪一支。若题目给的是“距离之差的绝对值”，则轨迹是两支完整的双曲线。

6.8 例题详解

例题 6.5 解析

思考路径：先由系数 $2p$ 定 p ，再看一次项在哪个变量、符号定方向，然后“减半”写焦点。

规范解：(1) $2p = 4$, $p = 2$ 。一次项是 x 且系数正 $\rightarrow$ 开口向右。焦点 $(1, 0)$ ，准线 $x = -1$ ，通径 $2p = 4$ 。(2) $2p = 6$, $p = 3$ 。一次项是 y 且系数负 $\rightarrow$ 开口向下。焦点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ ，准线 $y = \frac{3}{2}$ ，通径 6。(3) $2p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ 。开口向右。焦点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ，准线 $x = -\frac{1}{4}$ ，通径 1。

易错点：求焦点前先把 $2p$ 除以 2 得 p ，再减半—— $y^2 = 4x$ 的焦点是 $(1, 0)$ 不是 $(4, 0)$ ； $x^2 = -6y$ 的准线是 $y = \frac{3}{2}$ 不是 $y = 3$ 。

例题 6.6 解析

思考路径：定义直译——“到焦点距离 = 到准线距离”，先求 p 再写标准式；焦点弦用 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 与 $y_1 y_2 = -p^2$ 。

规范解：(1) 焦点 $F(2, 0)$ ，准线 $x = -2$, $p = 4$ 。开口向右， $y^2 = 2px = 8x$ 。(2) $p = 2$ ，焦点 $F(1, 0)$ ，直线 $y = x - 1$ 。联立： $(x - 1)^2 = 4x \rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$ 。韦达： $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = 1$ 。

$$|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$$

$$y_1 y_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 1 - 6 + 1 = -4 = -p^2$$

易错点：焦点弦长公式 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 只适用于 $y^2 = 2px$ 型； $y_1 y_2 = -p^2$ 恒为负（过焦点的弦两端一上一下）。

6.9 知识点 (1) 抛物线的定义与标准方程详解

A13. A。

思路： $2p = 12$, $p = 6$ ，减半。

解析：焦点 $(3, 0)$ ，准线 $x = -3$ ，开口向右。

A14. B。

思路：一次项是 y 、系数负 $\rightarrow$ 开口向下。

解析： $p = 4$ ，焦点 $\left(0, -\frac{p}{2}\right) = (0, -2)$ 。

A15. A。

思路： $F(0, 3)$ 到准线 $y = -3$ 的距离 $p = 6$ ，开口向上。

解析： $x^2 = 2py = 12y$ 。验证： $p = 6$ ，焦点 $(0, 3)$ ，准线 $y = -3$ 。

A16. 4。

思路：抛物线的焦半径—— $y^2 = 8x$ 上点 $P(x, y)$ 到焦点距离为 $x + \frac{p}{2}$ （定义直译）。

解析： $p = 4$, $\frac{p}{2} = 2$ 。 $PF = x + 2 = 6$, $x = 4$ 。

易错点： $y^2 = 8x$ 的焦半径公式是 $x + \frac{p}{2} = x + 2$ ，别把 $p = 4$ 当焦点距直接写 $x + 4$ 。

M4. B。

思路： $2p = 8$ ， $p = 4$ ，焦点横坐标是 $\frac{p}{2} = 2$ 不是 p 。

解析：焦点 $(2, 0)$ ，准线 $x = -2$ 。

为什么错：选 A 把 $p = 4$ 直接当焦点横坐标、 p 直接当准线位置—— $y^2 = 2px$ 里系数是 $2p$ ，焦点只取一半 $\frac{p}{2}$ 。选 D 把准线符号写反。口诀：“先除以 2 得 p ，再减半放焦点”。

M5. B。

思路：系数为负 $\rightarrow$ 开口向左，焦点在负半轴。

解析： $p = 4$ ， $y^2 = -8x$ 开口向左，焦点 $(-2, 0)$ ，准线 $x = 2$ 。

为什么错：选 A $((2, 0)$ ，向右) 是忽略负号——只记了“ $y^2 = 2px$ 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ ”的正面情形，把 $-8x$ 也当正开口处理。负号决定开口方向，但“减半”算法不变；选 C 是把 p 当焦点距。

B4. (2022 · 全国乙卷 · 第 5 题) B。

思路：先由定义写 $|AF|$ ，再由 $|AF| = |BF|$ 定 A 的横坐标，最后求距离。

解析： $F(1, 0)$ ，准线 $x = -1$ 。 $|BF| = |3 - 1| = 2$ ，故 $|AF| = 2$ 。由抛物线定义 $|AF| = x_A + \frac{p}{2} = x_A + 1$ ，得 $x_A = 1$ 。代入 $y^2 = 4x$ ： $y = \pm 2$ ， $A(1, 2)$ 或 $(1, -2)$ 。

$$|AB| = \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 0)^2} = 2\sqrt{2}$$

选 B。

易错点： $y^2 = 4x$ 的 $p = 2$ ，焦点是 $(1, 0)$ 不是 $(4, 0)$ ；焦半径 $|AF| = x_A + 1$ ，别写成 $x_A + 2$ 。

为什么错：选 A、C 的同学把焦点写错（把 $p = 2$ 或 $p = 4$ 直接当焦点横坐标），导致 $|BF|$ 、 x_A 全错——任何抛物线题先静下心来定准 p 与焦点坐标，再动笔；本题也可用“ A 在焦点正上方（通径端点）、 $\triangle AFB$ 为等腰直角三角形”快速出答案。

6.10 知识点 (2) 抛物线的焦点弦与焦半径详解

A17. 8。

思路：通径是过焦点且垂直于对称轴的弦，长 $2p$ 。

解析： $y^2 = 8x$ 中 $2p = 8$ ，通径长 8。验证：焦点 $(2, 0)$ ，竖直线 $x = 2$ 与抛物线交于 $(2, \pm 4)$ ，弦长 8。

B5. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 11 题，多选) BCD。

思路：先由 $A(1, 1)$ 在抛物线上定 p ，再逐项验证。过 B 的直线设为 $y = kx - 1$ ，与 C 联立用韦达定理处理 $|OP| \cdot |OQ|$ 、 $|BP| \cdot |BQ|$ 。

解析： $1 = 2p \times 1$ ， $p = \frac{1}{2}$ ， $C: x^2 = y$ ，准线 $y = -\frac{1}{4}$ 。A 错（准线是 $y = -\frac{1}{4}$ ，不是 $y = -1$ ）。直线 AB 过 $A(1, 1)$ 、 $B(0, -1)$ ，斜率 2，方程 $y = 2x - 1$ 。与 C 联立： $x^2 = 2x - 1$ ，即 $(x -$

$1)^2 = 0$, 唯一交点且 $\Delta = 0$, 相切于 A 。B 对。过 $B(0, -1)$ 的直线 $l: y = kx - 1$, 代入 $y = x^2$: $x^2 - kx + 1 = 0$, 需 $k^2 - 4 > 0$ 。 $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = 1$ 。

$$|OP| \cdot |OQ| = |x_1 x_2| \sqrt{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} = \sqrt{1 + k^2 - 2 + 1} = |k| > 2 > |OA|^2 = 2$$

C 对。同理 $|BP| \cdot |BQ| = k^2 + 1 > 5 = |BA|^2$ 。D 对。答案 BCD。

易错点: A 项是“把 p 当焦点距”的升级—— $x^2 = 2py$ 中 $p = \frac{1}{2}$, 准线是 $y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$; D 项要用 $x_1 x_2 = 1$ 做整体代换 (设而不求), 硬解坐标会非常繁琐。多选题逐项验证最稳妥。

B6. (2022 · 全国甲卷 · 第 20 题) (1) $C: y^2 = 4x$; (2) 直线 $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ 。

思路: (1) 当 $MD \perp x$ 轴时 M 横坐标为 p , 用 $\text{Rt}\triangle MFD$ 勾股定理定 p ; (2) 用抛物线参数式设 $M(y_1^2/4, y_1)$ 等四点, 把“三点共线”翻译成纵坐标的倒数关系 ($y_3 = -8/y_1$), 进而得 $k_{MN} = 2k_{AB}$, 再用基本不等式求 $\alpha - \beta$ 最大。

解析: (1) 当 $x = p$ 时 $y^2 = 2p^2$, $y_M = \sqrt{2}p$, $|MD| = \sqrt{2}p$; $|FD| = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ 。 $\text{Rt}\triangle MFD$ 中 $|MF|^2 = |FD|^2 + |MD|^2$:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + (\sqrt{2}p)^2 = 9 \implies \frac{9p^2}{4} = 9 \implies p = 2$$

$C: y^2 = 4x$ 。(2) 设 $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, $A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right)$, $B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$ 。直线 MN 过焦点 $(1, 0)$, 设 $l_{MN}: x = my + 1$, 联立 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$ 。斜率公式 (利用 $y^2 = 4x$ 的平方结构):

$$k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}, \quad k_{MN} = \frac{1}{m}$$

直线 MD 过 M 与 $D(2, 0)$, 与抛物线另一交点为 A , 联立得 $y_1 y_3 = -8$, 即 $y_3 = -\frac{8}{y_1}$; 同理 $y_4 = -\frac{8}{y_2}$ 。于是 $y_3 + y_4 = -8\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) = -8 \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = 8m$, 故

$$k_{AB} = \frac{4}{8m} = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}k_{MN}$$

记 $k = k_{AB} > 0$, 则 $k_{MN} = 2k$, $\tan \alpha = 2k$, $\tan \beta = k$ ($\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$)。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{2k - k}{1 + 2k^2} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

等号当且仅当 $\frac{1}{k} = 2k$, 即 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得。设 $AB: x = \sqrt{2}y + n$, 联立 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$, $y_3 y_4 = -4n$ 。又 $y_3 y_4 = \frac{64}{y_1 y_2} = \frac{64}{-4} = -16$, 故 $n = 4$ 。

直线 $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ 。

易错点：(1) MD 垂直 x 轴时 M 横坐标就是 p ，别与焦点横坐标 $\frac{p}{2}$ 混淆；(2) $y_1y_3 = -8$ 来自直线 MD 过定点 $D(2,0)$ 的联立——“过 x 轴上定点 $(x_0,0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 4x$ 两交点纵坐标之积为 $-4x_0$ ”，这是抛物线最重要的结构结论之一。

为什么错：此题第 (2) 问若用 $y = kx + b$ 硬设 AB ，含四个参数无从下手；正确做法是把抛物线方程当作“纵坐标的平方”处理，用 $\frac{y_i^2}{4}$ 表示横坐标，让斜率直接化为 $\frac{4}{y_i + y_j}$ ——**看到抛物线 $y^2 = 4x$ 的联立题，优先用纵坐标参数式**。另外求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值用基本不等式 $\frac{1}{k} + 2k \geq 2\sqrt{2}$ ，别走判别式弯路。

6.11 例题详解

例题 6.7 解析

思考路径：直线 $y = x + m$ 代入椭圆，消元得关于 x 的二次方程， Δ 定位置。

规范解：代入 $\frac{x^2}{4} + (x+m)^2 = 1$ ，乘 4： $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$ 。

$$\Delta = (8m)^2 - 4 \times 5 \times (4m^2 - 4) = 80 - 16m^2$$

相交： $\Delta > 0 \rightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ ；相切： $\Delta = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{5}$ ；相离： $\Delta < 0 \rightarrow |m| > \sqrt{5}$ 。

易错点： Δ 的符号决定位置；边界 $m = \pm\sqrt{5}$ 是“相切”别漏进“相交”或“相离”。

例题 6.8 解析

思考路径：弦长用韦达定理 + $\sqrt{1+k^2}$ ；中点弦用点差法（设而不求），先判中点是否在椭圆内部。

规范解：(1) 代入： $\frac{x^2}{4} + (x+1)^2 = 1 \rightarrow 5x^2 + 8x = 0$ ， $x = 0$ 或 $x = -\frac{8}{5}$ 。交点 $A(0,1)$ 、 $B\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 。

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

(2) 先判 M 在椭圆内部： $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$ 。由点差法 $k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} = -\frac{1 \times 1}{4 \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 。直线： $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$ ，即 $x + 2y - 2 = 0$ 。

易错点：(1) 弦长公式 $\sqrt{1+k^2}$ 是 M7 的打击点；(2) 点差法三步缺一不可：**先判中点内部性，再算斜率，最后写直线复核**。

6.12 知识点 (1) 直线与圆锥曲线的位置关系详解

A18. C。

思路：联立看 Δ 。

解析： $\frac{x^2}{4} + (x+3)^2 = 1 \rightarrow 5x^2 + 24x + 32 = 0, \Delta = 576 - 640 = -64 < 0$ ，相离。

A19. A。

思路：代入消元看实根个数。

解析： $(2x+1)^2 = 4x \rightarrow 4x^2 + 1 = 0$ ，判别式 $0 - 16 < 0$ ，无实根 $\rightarrow 0$ 个交点。**易错点：**别只看“二次方程”就默认两个交点——无实根就是没交点。

M6. C。

思路：代入消元，先看二次项系数是否为零；若 $A = 0$ 退化为一元一次方程，说明直线平行于渐近线——一个交点但非相切。

解析：代入： $\frac{x^2}{4} - \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = 1 \rightarrow -x - 1 = 1, x = -2, y = 0$ 。唯一交点 $(-2, 0)$ ，消元后得到的是一次方程（二次项系数为 0），判别式判据失效——因为直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 平行于渐近线 $y = \frac{x}{2}$ 。选 C。

为什么错：选 B（相切）是“一个交点 = 相切”的惯性—— $\Delta = 0$ 判相切的前提是二次项系数 $A \neq 0$ ；平行于渐近线的直线与双曲线“穿过”一个交点后继续走，不是相切。凡是双曲线联立，先看直线斜率是不是 $\pm \frac{b}{a}$ ，是则直接按“退化一次”处理。

M7. A。

思路：弦长公式 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$ 。

解析： $(2x-1)^2 = 4x \rightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0, \Delta = 48, |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{48}}{4} = \sqrt{3}$ 。 $|AB| = \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$ 。选 A。

为什么错：选 C ($\sqrt{3}$) 把“横坐标差”直接当弦长——**忘乘斜率修正系数** $\sqrt{1+k^2} = \sqrt{5}$ ；直线越陡 ($|k|$ 越大)，斜着量的弦比横着量的差越长。选 B 是 $|x_1 - x_2|$ 算错。记忆：**弦长 = 横差 $\times$ 斜率修正**， $\sqrt{1+k^2}$ 一个都不能省。

6.13 知识点 (2) 弦长公式与中点弦（点差法）详解

A20. A。

思路：点差法 + 存在性检验。

解析：先判 M 在椭圆内部： $\frac{(3/2)^2}{9} + \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$ 。 $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = -\frac{4 \times \frac{3}{2}}{9 \times 1} = -\frac{2}{3}$ 。选 A。

M8. C。

思路：点差法求弦斜率前，先判中点是否在曲线内部；椭圆内部 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ 。

解析： $N(2, 2): \frac{2^2}{4} + 2^2 = 5 > 1$ ——在椭圆外部。以椭圆外一点为中点的弦不存在（弦的两端必须被椭圆“包住”），故 C 正确。若强算 $k = -\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = -\frac{1}{4}$ （选 A 正是这个“公式答案”），

代入检验并无交点。

为什么错：选 A 是只背点差法公式、跳过存在性检验。点差法算出斜率只是“如果弦存在，斜率必须是这样”；中点落在曲线内部才是弦存在的必要条件。**中点弦三步：先判内部性，再算斜率，最后复核。**

B7. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 21 题) (1) l 的斜率为 -1 ；(2) $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{16\sqrt{2}}{9}$ 。

思路：把 A 代入双曲线定方程；设 $l: y = kx + m$ ，联立用韦达定理，把“斜率之和为 0”翻译成关于 k 、 m 的方程（设而不求）；第二问由 k 与 m 的关系 + $\tan \angle PAQ$ 定参数，再算面积。

解析：(1) 代入 $A(2, 1)$: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2 - 1} = 1$ ，解得 $a^2 = 2$ ，故 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 。设 $l: y = kx + m$ ， $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 。联立得 $(1 - 2k^2)x^2 - 4kmx - 2m^2 - 2 = 0$ ， $x_1 + x_2 = \frac{4km}{1 - 2k^2}$ ， $x_1x_2 = -\frac{2(m^2 + 1)}{1 - 2k^2}$ 。由 $k_{AP} + k_{AQ} = 0$ 展开并代入韦达定理，整理得 $(k + 1)(m + 2k - 1) = 0$ 。若 $m + 2k - 1 = 0$ ，则 l 过点 A ，与题意不符，故 $k = -1$ 。(2) 设 $l: y = -x + m$ ， AP 斜率为 k ($k \neq 0$)，则 AQ 斜率为 $-k$ 。由“三点在双曲线与直线上”的坐标关系可得 $m = \frac{2k^2 + 1}{2k^2 - 1}$ 。又

$$\tan \angle PAQ = \left| \frac{2k}{1 - k^2} \right| = 2\sqrt{2}$$

得 $k^2 = 2$ 或 $k^2 = \frac{1}{2}$ 。 $k^2 = \frac{1}{2}$ 使 $2k^2 - 1 = 0$ 、 m 无有限值，舍去，故 $k^2 = 2$ ， $m = \frac{5}{3}$ 。直线 $l: y = -x + \frac{5}{3}$ 。与 C 联立: $9x^2 - 60x + 68 = 0$ ， $x_1 + x_2 = \frac{20}{3}$ ， $x_1x_2 = \frac{68}{9}$ 。

$$|PQ| = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{3}$$

$A(2, 1)$ 到 l ($x + y - \frac{5}{3} = 0$) 的距离 $d = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。面积

$$S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2} \times |PQ| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

易错点：第 (1) 问的“斜率之和为 0”要展开成关于 x_1 、 x_2 的对称式再代韦达，别硬解交点；第 (2) 问 $k^2 = \frac{1}{2}$ 对应 $m \rightarrow \infty$ （直线无限平移、不构成有限弦），必须舍去。

为什么错：第 (1) 问漏解“ $m + 2k - 1 = 0$ ”的同学，把 l 过 A 的退化情形也当成了答案——韦达分解出乘积为零时，要逐个检验每个因子对应的几何情形是否与题设冲突；第 (2) 问把 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ 直接平方时，要注意 k^2 的两支中有一支使 m 发散，属于“增根”必须舍去。本题是“设而不求 + 几何条件翻译”的集大成题，按“定曲线 $\rightarrow$ 设直线 $\rightarrow$ 翻译条件 $\rightarrow$ 消参求面积”四步走。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：(1) 联立 $\Delta > 0$ ；(2) 用韦达定理表达中点坐标，消去参数 m ；(3) 弦长公式化为关于 m 的函数求最值。

规范解：代入 $\frac{x^2}{4} + (x+m)^2 = 1 \rightarrow 5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$ 。(1) $\Delta = 80 - 16m^2$ 。相交： $|m| < \sqrt{5}$ 。(2) $x_0 = -\frac{4m}{5}$, $y_0 = \frac{m}{5}$, 消去 m : $y_0 = -\frac{x_0}{4}$ 。由 $|m| < \sqrt{5}$ 得 $|x_0| < \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。中点轨迹为线段 $y = -\frac{x}{4}$ ($-\frac{4\sqrt{5}}{5} < x < \frac{4\sqrt{5}}{5}$)。(3) $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$, 当 $m=0$ 时 $|AB|_{\max} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ 。

易错点：(2) 中点轨迹不是整条直线 $y = -\frac{x}{4}$, 而是被相交条件约束的**线段** ($|m| < \sqrt{5}$ 限制了范围)——写轨迹方程要带定义域。

S2 解析

思考路径：渐近线给出 $a:b$, 代点定方程; 离心率由 a, b 求 c ; 第三问看直线斜率是否等于渐近线斜率 (平行于渐近线 $\rightarrow$ 一个交点非相切)。

规范解：(1) 渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b^2 = \frac{a^2}{3}$ 。代入 $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $\frac{18}{a^2} - \frac{6}{a^2} = 1$, $a^2 = 12$, $b^2 = 4$ 。 $C: \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。(2) $c^2 = 16$, $c = 4$, $e = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。(3) 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 的斜率 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{a}$, **平行于渐近线**。联立得 $-\frac{\sqrt{3}}{6}x = \frac{5}{4}$, $x = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$ 。只有一个交点, 且消元后为一次方程 (二次项系数为 0), **不是相切**, 是平行于渐近线的情形。

易错点：(3) “一个交点” 不能自动等于 “相切”——判别式判据只在二次项系数非零时成立; 直线与渐近线平行时, 与双曲线恰好相交于一点。

S3 解析

思考路径：焦点弦长 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 直接定 p ; $y_1y_2 = -p^2$; 面积用割补公式 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 化为关于斜率 k 的函数求最值。

规范解：(1) $|AB| = x_1 + x_2 + p = 10 + p = 14$, $p = 4$, $C: y^2 = 8x$ 。(2) $y_1y_2 = -p^2 = -16$ 。(3) 焦点 $F(2, 0)$ 。设过 F 的直线 $y = k(x-2)$ ($k \neq 0$)。联立 $y^2 = 8x$: $k^2x^2 - (4k^2 + 8)x + 4k^2 = 0$, $x_1 + x_2 = \frac{4k^2 + 8}{k^2}$, $x_1x_2 = 4$ 。

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = 2|k||x_2 - x_1| = 2|k| \cdot \frac{8\sqrt{k^2+1}}{k^2} = \frac{16\sqrt{k^2+1}}{|k|}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{k^2+1}}{|k|} = 8\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

当 $|k| \rightarrow \infty$ (直线垂直于对称轴, 即通径) 时 $S \rightarrow 8$; 对有限 k , $S > 8$ 。故最小值为 8, 在 AB 为通径 (直线 $x = 2$) 时取得。

易错点：(3) 通径 $2p = 8$ 是过焦点且垂直对称轴的弦, 它是所有焦点弦中最短的; 对 $\triangle AOB$ 面积, 割补公式 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 比 “底 $\times$ 高” 更直接。别漏掉 $|k| \rightarrow \infty$ 的极限情形 (即竖直线)。

第七章 卷末综合检测

Z1 解析

答案：A。

思考路径：单位向量 = 向量 ÷ 模长；“同向”要求方向一致（正数倍）。

规范解： $\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), 0 - 2) = (4, -2)$ ， $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 。同向单位向量

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(4, -2)}{2\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

易错点：B 是反向单位向量（乘了 -1 ）；C、D 分量位置错。同向取“正数倍”，反向取“负数倍”。

Z2 解析

答案：B。

思考路径： $|z - 2i| = 1$ 表示复平面内 z 在以 $(0, 2)$ 为圆心、半径为 1 的圆上； $|z|$ 是该圆上的点到原点的距离。

规范解：圆心 $(0, 2)$ 到原点距离为 2，圆上的点到原点最近距离 $= 2 - 1 = 1$ ，故 $|z|_{\min} = 1$ 。

易错点：复数模的几何意义—— $|z - z_0| = r$ 就是圆；别把 $2i$ 当成实轴上的点。

Z3 解析

答案：B。

思考路径：椭圆定义给“和” ($|PF_1| + |PF_2| = 2a$)，余弦定理给“差”，两式联立出乘积。

规范解： $a = 3$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ ，故 $|PF_1| + |PF_2| = 6$ ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$ 。设 $u = |PF_1|$ ， $v = |PF_2|$ ，由余弦定理：

$$(2\sqrt{5})^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos 60^\circ = u^2 + v^2 - uv$$

又 $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 36$ 。两式相减： $36 - 20 = 3uv$ ， $uv = \frac{16}{3}$ 。

易错点：这是“椭圆定义 + 余弦定理”的跨章综合（向量/解三角形工具用于圆锥曲线）—— $2a$ 是和不是单边长， $|F_1F_2| = 2c$ 别漏掉 2。

Z4 解析

答案：D。

思考路径：空间向量夹角用数量积公式 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 。

规范解： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 2 \times (-2) + 2 \times 1 = 2 - 4 + 2 = 0$ ，故 $\cos \theta = 0$ ， $\theta = 90^\circ$ 。

易错点：数量积为零就是垂直，不必再算模长；空间向量与平面向量夹角公式同构。

Z5 解析

答案：B。

思考路径：焦点在 x 轴，渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 。

规范解： $a = 2$ ， $b = \sqrt{5}$ ，渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 。用“右边换 0”验证： $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0 \rightarrow y^2 = \frac{5}{4}x^2 \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ✓。

易错点： $b = \sqrt{5}$ 不是 5； $y = \pm \frac{5}{4}x$ 是拿 b^2 、 a^2 直接相除的典型错误。

Z6 解析

答案：A、B、D。

规范解：A 对： $a = 5$ ， $b = 3$ ， $c = \sqrt{25 - 9} = 4$ ，焦距 $2c = 8$ 。B 对： $a = 4$ ， $b = 3$ ，渐近线 $y = \pm \frac{3}{4}x$ 。C 错： $y^2 = 4x$ 的 $p = 2$ ，焦点是 $(\frac{p}{2}, 0) = (1, 0)$ ，不是 $(4, 0)$ 。D 对： $c = \sqrt{16 + 9} = 5$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ 。

易错点：C 是 M4 的直接打击—— $y^2 = 2px$ 的系数是 $2p$ ，焦点只取一半 $\frac{p}{2}$ 。

Z7 解析

答案：A、B、C。

规范解：配方： $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ ，圆心 $C(1, -2)$ ，半径 $r = 3$ 。A 对。圆心代入 $x + y + m = 0$ ： $1 - 2 + m = 0 \rightarrow m = 1$ ，直线过圆心。B 对。圆心到直线距离 $d = \frac{|1 - 2 + m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m - 1|}{\sqrt{2}}$ 。相切要求 $d = 3$ ，即 $|m - 1| = 3\sqrt{2}$ ，有解 $m = 1 \pm 3\sqrt{2}$ 。C 对。 $m = 0$ 时 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} < 3$ ，直线与圆相交不是相离。D 错。

易错点：一般式配方求圆心时， $+4y$ 配方成 $(y + 2)^2$ ，圆心纵坐标是 -2 ；判断相交/相离要看 d 与 r 的大小方向 ($d < r$ 相交)。

Z8 解析

答案：A、B、C。

规范解：A 对： $a = 2$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ ， $e = \frac{1}{2}$ 。B 对： $x^2 - y^2 = 4$ 是等轴双曲线 ($a = b = 2$)， $c = 2\sqrt{2}$ ， $e = \sqrt{2}$ 。C 对： $y^2 = x$ 的 $p = \frac{1}{2}$ ，焦点 $(\frac{1}{4}, 0)$ 。D 错：通径 $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$ ，不是 2。

易错点：通径公式是 $\frac{2b^2}{a}$ (分子是 $2b^2$)；等轴双曲线 $e = \sqrt{2}$ 是固定结论。

Z9 解析

答案：8。

思考路径：过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点的弦长 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 。

规范解： $y^2 = 4x$, $p = 2$, $|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$ 。

易错点：焦点弦长公式里加的 p 是“焦准距”， $y^2 = 4x$ 的 $p = 2$ 不是 4。

Z10 解析

答案：2。

思考路径：渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 给 $\frac{b}{a}$ ，离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ 。

规范解： $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + 3} = 2$ 。

易错点：双曲线 e 用加号 ($c^2 = a^2 + b^2$)； $e = 2$ 是双曲线 ($e > 1$)，若误用椭圆公式 $\sqrt{1 - 3}$ 无意义。

Z11 解析

答案： $\sqrt{14}$ 。

思考路径：垂径定理——弦心距 d 、半径 r 、半弦构成直角三角形。

规范解：圆心 $(0, 0)$ 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。半径 $r = 2$ ，弦长 = $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{14}$ 。

易错点：弦长公式 $2\sqrt{r^2 - d^2}$ 别漏系数 2、别把 d^2 写成 d ； $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 平方后是 $\frac{1}{2}$ 。

Z12 解析

思考路径：(1) 两边夹一角 $\rightarrow$ 余弦定理；(2) 外接圆半径用正弦定理 $R = \frac{a}{2\sin A}$ 。

规范解：(1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 100 - 48 = 52$, $BC = 2\sqrt{13}$ 。(2) 由正弦定理, $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2\sqrt{13}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$ 。

复核： $A = 60^\circ$ 是特殊角， $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $R = \frac{2\sqrt{39}}{3} \approx 4.16$ ，由面积公式 $\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}bc \sin A$ 验证： $\frac{6 \times 8 \times 2\sqrt{13}}{4R} = \frac{48\sqrt{13}}{2R} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ ，故 $R = \frac{48\sqrt{13}}{24\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$ ✓。

易错点：余弦定理中是 $-2bc \cos A$ ；正弦定理中 $R = \frac{a}{2\sin A}$ ，分母是 $2\sin A$ 不是 $\sin A$ 。

Z13 解析

思考路径：正方体建系后，直线方向向量与平面法向量求线面角 ($\sin \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}$)，异面直线

夹角用方向向量夹角取绝对值 ($\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$)。

规范解：各点坐标： $D(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $C_1(0, 2, 2)$ 。(1)

$\overrightarrow{A_1C} = C - A_1 = (-2, 2, -2)$ 。平面 $ABCD$ 即平面 $z = 0$ ，法向量取 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 。

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1C}| |\vec{n}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4+4+4} \times 1} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) $\overrightarrow{A_1B} = B - A_1 = (0, 2, -2)$, $\overrightarrow{AC_1} = C_1 - A = (-2, 2, 2)$ 。

$$\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \times (-2) + 2 \times 2 + (-2) \times 2 = 0$$

故两方向向量垂直，异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角为 90° ，余弦值为 0。

易错点：线面角的正弦 = 方向向量与法向量夹角的余弦绝对值；异面直线夹角取锐角或直角（余弦加绝对值）；坐标“终点减起点”别写反。

Z14 解析

思考路径：(1) 右焦点 $F(\sqrt{3}, 0)$ ，直线 $y = x - \sqrt{3}$ ，联立消元用弦长公式；(2) 设过原点直线 $y = kx$ ，面积 = 底（弦长 $|AB|$ ） $\times$ 高（ F 到直线距离） $\div 2$ ，化为关于 k 的函数求最值。

规范解：(1) $F(\sqrt{3}, 0)$ ，直线 $l: y = x - \sqrt{3}$ 。代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$: $5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0$ 。 $\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 5 \times 8 = 192 - 160 = 32$, $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{32}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 。

$$|AB| = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{8}{5}$$

(2) 设过原点的直线 $y = kx$ (k 为实数)。交点 x 坐标满足 $\frac{x^2}{4} + k^2x^2 = 1$, $x_A = \frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$, $y_A = \frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}$, $B = -A$ 。弦长 $|AB| = 2\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$ 。 $F(\sqrt{3}, 0)$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离 $d = \frac{\sqrt{3}|k|}{\sqrt{1+k^2}}$ 。

$$S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}} \times \frac{\sqrt{3}|k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{2\sqrt{3}|k|}{\sqrt{1+4k^2}}$$

$$S^2 = \frac{12k^2}{1+4k^2} = \frac{12}{4 + \frac{1}{k^2}} \leq 3 \quad (k \neq 0)$$

当 $|k| \rightarrow \infty$ 时 $S^2 \rightarrow 3$ 。 $|k| \rightarrow \infty$ 即直线垂直于 x 轴 ($x = 0$)，此时与椭圆交于 $(0, \pm 1)$, $|AB| = 2$, F 到直线 $x = 0$ 的距离为 $\sqrt{3}$, $S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 。故 $S_{\max} = \sqrt{3}$ ，此时直线 AB 为 $x = 0$ (即椭圆的短轴所在直线)。

复核： $k = 1$ 时 $S = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 1.55 < \sqrt{3} \approx 1.73$ ✓； $k = 0$ (x 轴) 时 F 在直线上， $S = 0$ ✓。

易错点： F 在 x 轴上，故 $y = kx$ 型直线在 $k = 0$ 时 F 恰在其上、面积为零；最大值在竖直直线 ($x = 0$) 取得，不要遗漏“斜率不存在”的极限情形。这是本卷压轴——联立消元 + 弦长 + 距离 + 最值的“四件套”。

Z15 解析

思考路径：离心率 + 过点双条件定方程；平行于渐近线的直线与双曲线“一个交点非相切”；中点弦先判存在性（本题中点在 x 轴上，竖直线代入无实交点）。

规范解： (1) $e = 2 \rightarrow c = 2a, b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2$ 。代入点 $(2, \sqrt{3})$: $\frac{4}{a^2} - \frac{3}{3a^2} = 1$, 即 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1, \frac{3}{a^2} = 1, a^2 = 3, b^2 = 9$ 。 $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ 。 (2) 渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm\sqrt{3}x$ 。 设 $l: y = \sqrt{3}x + m$ (平行于一条渐近线), 代入 $C: \frac{x^2}{3} - \frac{(\sqrt{3}x + m)^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{3x^2 + 2\sqrt{3}mx + m^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{2\sqrt{3}m}{9}x = -1 - \frac{m^2}{9}$, 解得唯一 x (只要 $m \neq 0$)。消元后是一次方程 (二次项系数为 0), 故 l 与 C 有且仅有 1 个交点, 且这个交点不是相切——这是“平行于渐近线”的特殊退化情形。若 $m = 0$, l 即渐近线本身, 与 C 无交点。 (3) 设以 $(1, 0)$ 为中点的弦端点为 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 。中点 $M(1, 0)$ 在 x 轴上 ($y_0 = 0$)。由点差法, 双曲线中点弦斜率 $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ——分母 $y_0 = 0$, 说明弦垂直于 x 轴, 方程为 $x = 1$ 。代入 $C: \frac{1}{3} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow -\frac{y^2}{9} = \frac{2}{3}, y^2 = -6 < 0$, 无实交点。故以 $(1, 0)$ 为中点的弦不存在。

易错点： (2) “一个交点 = 相切”的直觉在双曲线渐近线方向失效; (3) 点差法算出斜率前先判断弦是否存在——本题中点 $(1, 0)$ 虽在双曲线“两支之间”的内部区域, 但竖直线 $x = 1$ 与双曲线无交点, 必须用代入法验证。