

GRADUS

数学 II

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 平面向量与解三角形	1
1.1 平面向量的概念与线性运算	1
1.2 平面向量的基本定理与坐标表示	2
1.3 平面向量的数量积	3
1.4 正弦定理、余弦定理与解三角形的应用	4
第二章 复数	7
2.1 复数的概念	7
2.2 复数的四则运算	8
2.3 复数的几何意义、模与共轭	9
2.4 复数的三角表示与几何应用	10
第三章 立体几何初步	13
3.1 基本立体图形	13
3.2 直观图与三视图	15
3.3 空间中点线面的位置关系	17
3.4 空间中的平行与垂直	18
第四章 空间向量与立体几何	21
4.1 空间向量及其运算	21
4.2 空间向量基本定理与坐标化	22
4.3 用向量研究位置关系	23
4.4 空间角	24
4.5 空间距离	26
第五章 直线与圆的方程	29
5.1 直线的倾斜角与斜率、直线方程	29

5.2	两条直线的位置关系与距离公式	30
5.3	圆的方程与圆与圆的位置关系	32
5.4	直线与圆的位置关系	33
第六章	圆锥曲线的方程	37
6.1	椭圆	37
6.2	双曲线	38
6.3	抛物线	40
6.4	直线与圆锥曲线	42
第七章	卷末综合检测	45

第一章 平面向量与解三角形

1.1 平面向量的概念与线性运算

考点精要

Q1 向量与标量怎么区分？

A 向量既有大小又有方向（位移、速度、力）；标量只有大小（路程、速率、质量）。向量之间不能比较大小，只有模能比。

Q2 零向量有什么“怪脾气”？

A 模为 0，方向任意。由此推出：零向量与任何向量都平行（共线），且 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ 。

Q3 平行向量与共线向量是什么关系？

A 是同一个概念——方向相同或相反的向量。向量可以自由平移，故“平行”即“共线”，两者等价。

Q4 向量加减法的作图法则？

A 加法：三角形法则（首尾相接，起点到终点）或平行四边形法则（共起点作对角线）；减法：共起点连终点，指向被减向量。

例题精讲

例题 1.1

（向量概念辨析与加减法化简）判断下列量是向量还是标量：位移、速率、力、路程、速度；化简： $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ 与 $\vec{AB} - \vec{AC}$ 。

知识点 (1) 向量的概念与线性运算

A1. 下列命题正确的是（ ）

A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

C. 零向量的方向是北偏东 30°

D. 模为 1 的单位向量都相等

A2. 化简 $\vec{AB} + \vec{BD} - \vec{CD}$ 的结果是（ ）

A. $\vec{AC}$ B. $\vec{CA}$ C. $\vec{0}$ D. $\vec{AD}$

M1. 下列说法正确的是 ()

- A. 零向量没有方向
- B. $\vec{0}$ 与任一向量 $\vec{a}$ 都平行
- C. 若 $\vec{a} = \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向可能不同
- D. 若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} > \vec{b}$

1.2 平面向量的基本定理与坐标表示

考点精要

Q1 平面向量基本定理说什么?

A 不共线的 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 可唯一表示平面内任一向量 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 叫做一个基底。

Q2 向量坐标怎么求? $\overrightarrow{AB}$ 的坐标?

A $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ ——**终点减起点**; 中点坐标取两端的平均数。

Q3 共线 (平行) 的坐标条件是什么?

A $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。

Q4 向量坐标运算与模?

A $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$; $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 。

例题精讲

例题 1.2

(坐标运算与共线求参) 已知 $\vec{a} = (2, -1), \vec{b} = (-1, 3)$ 。(1) 求 $\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}, |\vec{a}|$; (2) 若 $\vec{c} = (1, k)$ 与 $\vec{a}$ 共线, 求 k 的值。

知识点 (1) 坐标表示与坐标运算

A3. 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (3, 1)$, 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标分别是 ()

- A. $(4, 3)$ 与 $(-2, 1)$
- B. $(4, 3)$ 与 $(2, 1)$
- C. $(3, 2)$ 与 $(-2, 1)$
- D. $(4, 3)$ 与 $(2, -1)$

A4. 已知 $\vec{a} = (2, m), \vec{b} = (3, 6)$ 。若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 m 等于 ()

- A. 3
- B. 4
- C. 6
- D. 9

知识点 (2) 基底表示与向量共线

B2. (2022 · 新高考 I 卷) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DA}$ 。记 $\overrightarrow{CA} = \vec{m}, \overrightarrow{CD} = \vec{n}$, 则 $\overrightarrow{CB} =$ ()

- A. $3\vec{m} - 2\vec{n}$
- B. $-2\vec{m} + 3\vec{n}$
- C. $3\vec{m} + 2\vec{n}$
- D. $2\vec{m} + 3\vec{n}$

M2. 已知 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} = 3\vec{a}, \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 。下列说法正确的是 ()

- A. $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 不平行
- B. $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线且方向相同
- C. $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线且方向相反
- D. $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 相等

1.3 平面向量的数量积

考点精要

Q1 数量积的定义？

A $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ (θ 为夹角, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$), **结果是实数不是向量**。

Q2 数量积的符号与夹角什么关系？

A 夹角为锐角 (含同向 0°) 时为正, 直角为 0, 钝角 (含反向 180°) 时为负。 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ **不一定是锐角, 也可能是同向**。

Q3 投影是什么？

A $|\vec{b}| \cos \theta$ 是 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影, 是**实数, 可正可负**——钝角时投影为负。

Q4 坐标式与垂直条件？

A $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$; $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; 夹角余弦 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。

例题精讲

例题 1.3

(数量积、夹角与投影) 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° 。(1) 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) 求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影。

知识点 (1) 数量积的定义、夹角与投影

A5. 已知 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (2, 3)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 ()

- A. -4 B. -1 C. 4 D. 8

B5. (2022 · 全国乙卷理) 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

M3. 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角一定是锐角
- B. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角一定是钝角
- C. 向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影一定不小于 0
- D. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$

C1. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° 。设 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ 。(1) 求 $|\vec{c}|$; (2) 求 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 夹角的余弦值。

知识点 (2) 数量积的坐标运算与垂直

A6. 已知 $\vec{a} = (3, -4)$, 则 $|\vec{a}|$ 等于 ()

A. 1 B. 5 C. 7 D. 25

B1. (2023 · 新课标 I 卷) 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$, 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 则 ()

A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

B3. (2024 · 新课标 I 卷) 已知向量 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 若 $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$, 则 $x =$ ()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

1.4 正弦定理、余弦定理与解三角形的应用

考点精要

Q1 正弦定理及其比值?

A $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ——边与对角的正弦成正比, 比值是**外接圆直径** $2R$ 。

Q2 余弦定理与求角形式?

A $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 。 $A = 90^\circ$ 时退化为勾股定理。

Q3 SSA 两解怎么处理?

A 由 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 求出正弦值后, B 可能有两解 (锐角与钝角互补), 要用内角和与“大边对大角”判断取舍, **不能默认只取锐角**。

Q4 面积公式?

A $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$ 。

Q5 方位角与方向角区别?

A 方位角从正北**顺时针**量 ($0^\circ \sim 360^\circ$, 正东 90°); 方向角是与正北/正南的**锐角**夹角 (如北偏东 30°)。方位角 $150^\circ \iff$ 南偏东 30° 。

例题精讲

例题 1.4

(余弦定理与面积) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 5$, $c = 7$, $\cos A = \frac{1}{2}$ 。(1) 求边 a ; (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 。

知识点 (1) 正弦定理与三角形解的个数

A7. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$, $a = 2$, 则 b 等于 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

M4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 4$, $b = 5$, $A = 30^\circ$ 。下列说法正确的是 ()

- A. $\angle B$ 有唯一解
 B. $\angle B$ 有两个解, 约为 38.7° 和 141.3°
 C. $\angle B$ 无解
 D. $\angle B$ 只有一个解, 约为 38.7°

知识点 (2) 余弦定理与三角形形状判定

A8. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边 $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 无法判断

B4. (2023 · 新课标 I 卷) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A + B = 3C$, $2\sin(A - C) = \sin B$ 。(1) 求 $\sin A$; (2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高。

B6. (2022 · 全国乙卷理) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 。已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$, 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$ 。

知识点 (3) 解三角形的应用

C2. 一艘科考船从港口 O 出发, 先向正东方向航行 20 km 到达 A 处, 然后转向, 沿与 OA 成 30° 角 (向北偏转) 的方向航行 $20\sqrt{3}$ km 到达 B 处进行采样。(1) 求 O 、 B 两点的距离; (2) 用方向角和方位角分别描述 B 在 O 的什么方向。

本章综合

S1. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ 。(1) 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 并求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角; (2) 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 。

S2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 。已知 $b\sin C = 2c\sin B\cos C$ 。(1) 求角 C ; (2) 若 $c = \sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 求 $a + b$ 的值。

第二章 复数

2.1 复数的概念

考点精要

Q1 虚数单位 i 满足什么？

A $i^2 = -1$ 。 i 的幂每 4 次一循环： $i^1 = i$ ， $i^2 = -1$ ， $i^3 = -i$ ， $i^4 = 1$ ，即 $i^{4k+r} = i^r$ 。

Q2 复数的实部与虚部怎么找？

A 对 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，实部是 a ，虚部是**系数** b ，**不是** bi 。

Q3 复数如何分类？

A $b = 0$ 时为实数； $b \neq 0$ 时为虚数； $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时为纯虚数（两者缺一不可）。

Q4 复数相等与比较大小？

A $a + bi = c + di \iff a = c$ 且 $b = d$ ——实部实部等、虚部虚部等；**复数（含虚部）不能比较大小**，只有模能比。

例题精讲

例题 2.1

（复数概念与分类）已知复数 $z = (m - 1) + (m + 1)i$ ($m \in \mathbb{R}$)。 (1) 当 z 为实数时，求 m ； (2) 当 z 为纯虚数时，求 m 。

知识点 (1) 虚数单位与复数的分类

A1. 复数 $z = 3 - 2i$ 的虚部是 ()

A. $-2i$ B. 2 C. -2 D. 3

A2. 已知 $(x + y) + (x - y)i = 4 + 2i$ ，则 x 、 y 的值分别是 ()

A. 3, 1 B. 1, 3 C. 2, 2 D. 4, 2

M1. 下列说法正确的是 ()

A. 复数 $1 - 5i$ 的虚部是 $-5i$

B. 若 $z = \bar{z}$ ，则 z 是实数

C. 两个虚数可以比较大小

D. 复数 $2+i$ 与 $1+2i$ 相等

M4. 已知复数 $z = (a-1) + (a+1)i$ ($a \in \mathbb{R}$)。下列说法正确的是 ()

- A. 当 $a = 1$ 时, z 是纯虚数
- B. 当 $a = -1$ 时, z 是纯虚数
- C. 当 $a = 1$ 时, z 是实数
- D. 存在 a , 使 $z = 0$

2.2 复数的四则运算

考点精要

Q1 复数加减法?

A 实部加(减)实部, 虚部加(减)虚部: $(a \pm c) + (b \pm d)i$ ——像合并同类项。

Q2 复数乘法?

A 按多项式分配律展开, 遇到 i^2 一律换成 -1 : $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ 。

Q3 复数除法?

A 分子分母同乘分母的共轭复数, 使分母变为实数 $c^2 + d^2$, 再化简。

Q4 i^n 怎么化简?

A 用 n 除以 4 取余数: $i^n = i^r$ ($n = 4k + r$, $r = 0, 1, 2, 3$)。

例题精讲

例题 2.2

(复数的四则运算) 计算: (1) $(3+4i) + (2-i)$; (2) $(1+2i)(2-i)$; (3) $\frac{2+i}{1-i}$ 。

知识点 (1) 复数的加减与乘法

A3. 计算 $(2-i)(3+2i)$ 的结果是 ()

- A. $8+i$
- B. $4+i$
- C. $8-i$
- D. $4-i$

M2. 下列运算过程正确的是 ()

- A. $(1+i)^2 = 1 + i^2 = 0$
- B. $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- C. $(1+i)^2 = 1 + 2i$
- D. $\frac{1+i}{1-i} = 1 + \frac{i}{-i} = 1 - 1 = 0$

知识点 (2) 复数的除法

A4. $\frac{1+i}{1-i}$ 等于 ()

- A. 1
- B. -1
- C. i
- D. $-i$

- B1.** (2024 · 新课标 I 卷) 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 则 $z = (\quad)$
 A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$
- B2.** (2023 · 新课标 I 卷) 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} = (\quad)$
 A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
- B6.** (2022 · 全国甲卷理) 已知 $z = -1 + \sqrt{3}i$, 则 $\frac{z}{z\bar{z}-1}$ 等于 $(\quad)$
 A. $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ B. $-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $1 - \sqrt{3}i$

2.3 复数的几何意义、模与共轭

考点精要

Q1 复平面怎么建?

A 横轴为实轴 (x 轴), 纵轴为虚轴 (y 轴); $z = a + bi$ 对应点 $Z(a, b)$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 。

Q2 复数的模?

A $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ——点 Z 到原点的距离, 是实数, 可以比较大小。

Q3 共轭复数?

A $\bar{z} = a - bi$ ——关于实轴对称; 万能钥匙: $z\bar{z} = |z|^2$ 。

Q4 模与共轭的运算性质?

A $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$; $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$); $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ 。

例题精讲

例题 2.3

(模、共轭与 $z\bar{z}$) 已知 $z = 3 - 4i$ 。(1) 求 $\bar{z}$ 与 $|z|$; (2) 求 $z\bar{z}$; (3) 求 $|z - i|$ 。

知识点 (1) 复数的模与复平面

- A5.** 已知 $z = -1 + \sqrt{3}i$, 则 $|z|$ 等于 $(\quad)$
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 4
- B3.** (2024 · 新课标 II 卷) 已知 $z = -1 - i$, 则 $|z| = (\quad)$
 A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
- M3.** 已知 $z = 1 + i$, 下列等式正确的是 $(\quad)$
 A. $|z|^2 = 2$, $z^2 = 2i$, 故 $|z|^2 \neq z^2$
 B. $|z|^2 = 2$, $z^2 = 2$, 故 $|z|^2 = z^2$
 C. $|z| = 1 + 1 = 2$
 D. $|z| = \sqrt{1^2 + i^2}$

C1. 已知复数 z 满足 $|z - 2i| = 2$, 且 $\frac{z}{i}$ 是正实数。(1) 求 z ; (2) 求 $|z + 2|$ 。

知识点 (2) 共轭复数与 $z\bar{z}$

A6. 已知 $z = 2 + i$, 则 $z\bar{z}$ 等于 ()

A. 3 B. 5 C. $4 + 4i$ D. $3 - 4i$

B4. (2023 · 北京卷) 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(1, 2)$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()

A. $1 + 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $-1 - 2i$

B5. (2022 · 全国乙卷理) 已知 $z = 1 - 2i$, 且 $z + a\bar{z} + b = 0$, 其中 a, b 为实数, 则 ()

A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$ C. $a = 1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

2.4 复数的三角表示与几何应用

考点精要

Q1 复数的三角形式?

A $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $r = |z|$ 为模, θ 为辐角; $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$ 。

Q2 三角形式下乘法有什么几何意义?

A 模相乘、辐角相加: $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 的模为 $r_1 r_2$, 辐角为 $\theta_1 + \theta_2$ 。

Q3 乘 i 是什么几何操作?

A $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, 乘 i 即把复数绕原点逆时针旋转 90° 。

例题精讲

例题 2.4

(三角形式与模) (1) 把 $z = -1 + i$ 化为三角形式; (2) 求 $(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)$ 的模。

知识点 (1) 复数的三角形式与辐角

A7. 复数 $z = \sqrt{3} + i$ 的模与辐角分别是 ()

A. $2, \frac{\pi}{6}$ B. $2, \frac{\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$ D. $4, \frac{\pi}{3}$

C2. 在信号处理中, 两路信号 $S_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $S_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ 。(1) 把 S_1, S_2 化为 $a + bi$ 形式; (2) 求 $S_1 \cdot S_2$ 与 $|S_1 S_2|$, 并说明乘积的辐角。

知识点 (2) 模的几何意义

A8. 已知 $|z - 1| = 2$, 则复数 z 在复平面内对应的点的集合是 ()

A. 以 $(1, 0)$ 为圆心、半径 2 的圆
B. 以 $(-1, 0)$ 为圆心、半径 2 的圆
C. 以 $(1, 0)$ 为圆心、半径 $\sqrt{2}$ 的圆
D. 直线 $x = 1$

本章综合

- S1.** 已知复数 $z = (1+i)(2-i) - \frac{2+i}{1+i}$ 。(1) 求 z ，并写出 z 的实部与虚部；(2) 求 $\bar{z}$ 与 $|z|$ 。
- S2.** 已知复数 z 满足 $|z-1|=1$ 。(1) 在复平面内指出 z 对应的点的轨迹，并写出圆心与半径；(2) 求 $|z|$ 的最大值与最小值。

第三章 立体几何初步

3.1 基本立体图形

考点精要

Q1 棱柱、棱锥、棱台各自的核心结构特征是什么？

A 棱柱：两个底面平行且全等、侧棱平行且相等；棱锥：底面是多边形、其余各面是共一个公共顶点的三角形；棱台：用平行于棱锥底面的平面截棱锥所得，**侧棱延长后必交于一点**。

Q2 判断“正棱锥”的两个条件缺一不可，是哪两个？

A 底面是**正多边形**，且顶点在底面上的**投影是底面中心**。只说“底面是正多边形”或“侧棱相等”都不够。

Q3 正棱锥求斜高、侧棱长的“两个直角三角形”分别由哪三条边构成？

A 高、底面边心距、斜高构成直角三角形（直角在底面中心）；高、底面外接圆半径、侧棱构成直角三角形（直角在底面中心）。

Q4 表面积与体积公式的“家族结构”怎么记？

A 柱体 $V = Sh$ ，锥体 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，台体 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$ （ S_1 、 S_2 为上下底面面积）；旋转体侧面：圆柱 πrl 型统一为“底面周长的一半 $\times$ 母线”。

例题精讲

例题 3.1

（判定几何体类型）下列几何体分别是什么体？说明理由。（1）有两个面互相平行且全等，其余各面都是平行四边形的多面体；（2）有一个面是四边形，其余各面都是共一个公共顶点的三角形的多面体；（3）用平行于圆锥底面的平面截圆锥，截面与底面之间的部分。

例题 3.2

（正棱锥的基本量计算）正四棱锥的底面边长为 6，高为 4。求它的斜高、侧棱长、表面积与体积。

例题 3.3

(圆台的体积) 圆台的上、下底面半径分别为 2、4, 高为 6, 求它的体积。

知识点 (1) 棱柱、棱锥、棱台的结构特征

A1. 下列说法正确的是 ()

- A. 棱台的侧面都是平行四边形
- B. 底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥
- C. 棱锥的每个侧面都是三角形
- D. 圆锥的母线长不一定相等

A2. 棱柱的侧面不可能是 ()

- A. 三角形
- B. 平行四边形
- C. 矩形
- D. 菱形

M1. 下列说法正确的是 ()

- A. 棱台的侧面都是平行四边形
- B. 棱台的侧棱延长后必交于一点
- C. 有两个面平行、其余各面都是梯形的几何体一定是棱台
- D. 棱台的体积公式是 $V = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)h$

M2. 底面是菱形的四棱锥, 其顶点在底面上的投影恰好是底面菱形的中心。下列说法正确的是 ()

- A. 它一定是正棱锥
- B. 它不一定是正棱锥
- C. 它一定不是正棱锥
- D. 无法作出判断

知识点 (2) 柱、锥、台的表面积与体积

A3. 圆锥的底面半径为 3, 母线长为 5, 则它的侧面积与体积分别是 ()

- A. 15π , 12π
- B. 15π , 15π
- C. 12π , 15π
- D. 24π , 12π

A4. 正三棱柱的底面边长为 2, 高为 3, 则它的体积是 ()

- A. $3\sqrt{3}$
- B. 6
- C. $6\sqrt{3}$
- D. 18

A5. 正四棱锥的底面边长为 6, 斜高为 5, 则它的高是 ()

- A. 3
- B. 4
- C. $\sqrt{21}$
- D. $\sqrt{34}$

B1. (2023 · 全国乙卷 · 理科第 8 题) 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$, O 为底面圆心, PA 、 PB 为圆锥的母线, $\angle AOB = 120^\circ$ 。若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, 则该圆锥的体积为 ()

- A. π
- B. $\sqrt{6}\pi$
- C. 3π
- D. $3\sqrt{6}\pi$

B2. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 4 题) 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库。已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km^2 ; 水

位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km^2 。将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 () ($\sqrt{7} \approx 2.65$)

A. $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$ C. $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$

B3. (2022 · 全国乙卷 · 理科第 9 题) 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C1. (蜂巢六棱柱) 蜜蜂建造的蜂房横截面近似正六边形, 单个蜂房可看作一个底面是边长为 4 mm 的正六边形、高为 10 mm 的正六棱柱 (蜂房壁厚忽略不计)。(1) 求单个蜂房的体积; (2) 若要为这个蜂房“封顶” (再覆盖一个相同形状的正六边形面), 加上侧面, 一共需要多少面积的蜂蜡?

3.2 直观图与三视图

考点精要

Q1 斜二测画法口诀是什么? 为什么直观图面积是原面积的 $\frac{\sqrt{2}}{4}$?

A 口诀: 横不变、纵减半、平行关系不改变。面积缩水来自两次压缩: 纵方向减半, 再乘 $\sin 45^\circ$, 故 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ 。

Q2 由直观图面积反求原面积, 公式方向怎么记?

A $S = \frac{4}{\sqrt{2}}S' = 2\sqrt{2}S'$ 。直观图是“缩水”的, 原面积总比直观图面积大。

Q3 三视图的三对对应关系各是“谁与谁”?

A 长对正 (正视图与俯视图的长相等)、高平齐 (正视图与侧视图的高相等)、宽相等 (俯视图与侧视图的宽相等)。

Q4 虚实线规则是什么?

A 看得见的轮廓线画实线, 被遮挡的轮廓线画虚线——虚线常提示“这里挖了洞或被挡住了”。

例题精讲

例题 3.4

(斜二测画法求直观图面积) 画出水平放置的边长为 6 的正三角形 ABC 的直观图, 并求直观图的面积。

例题 3.5

(由直观图面积反求原面积) 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个面积为 $4\sqrt{2}$ 的平行四边形, 求原图形的面积。

例题 3.6

(由三视图还原几何体并求体积)【文字化还原】某几何体的三视图为：正视图与侧视图都是底边为 2、高为 4 的等腰三角形，俯视图是半径为 1 的圆。求该几何体的体积。

知识点 (1) 斜二测画法与直观图面积

A6. 边长为 4 的正方形的斜二测直观图面积为 ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. 16 D. $2\sqrt{2}$

A7. 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是边长为 4 的正方形，则原图形的面积是 ()

- A. 16 B. $16\sqrt{2}$ C. 32 D. $32\sqrt{2}$

M3. 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是边长为 a 的正三角形，则原图形的面积是 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ B. $\sqrt{6}a^2$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$ D. $\frac{1}{2}a^2$

知识点 (2) 三视图

A8. 某几何体的三视图全是边长为 2 的正方形，则它的体积与表面积分别为 ()

- A. 8, 24 B. 8, 16 C. 2, 12 D. 4, 24

A9. 某几何体的三视图中，正视图与侧视图都是底边为 4、高为 3 的等腰三角形，俯视图是半径为 2 的圆，则该几何体的体积是 ()

- A. 4π B. 6π C. 8π D. 12π

B4. (2023 · 全国乙卷 · 第 3 题，文理通用)【文字化还原】一个零件的三视图所对应的几何体为：在长、宽、高分别为 2、2、3 的长方体上，沿其中一条竖棱切去一个长、宽、高分别为 1、1、3 的小长方体（贯穿全高），剩下的几何体。网格小正方形的边长为 1，则该零件的表面积为 ()

- A. 24 B. 26 C. 28 D. 30

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理科第 4 题)【文字化还原】网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1。由三视图还原可知：该多面体是直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，底面是直角梯形 $ABCD$ ，满足 $AD \perp AB$ 、 $AB \parallel DC$ 、 $AD = DC = 2$ 、 $AB = 4$ ，侧棱 $AA_1 = 2$ 。则该多面体的体积为 ()

- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

M4. 下列说法正确的是 ()

- A. 正视图与俯视图的高相等
B. 正视图与侧视图的长相等
C. 俯视图与侧视图的宽相等
D. 正视图与俯视图的宽相等

C2. (体育馆穹顶) 某体育馆穹顶的三视图：正视图与侧视图相同，都是由一个宽 8 m、高 3

m 的矩形和其正上方一个直径 8 m 的半圆组成；俯视图是直径为 8 m 的圆。(1) 该穹顶由哪两个基本旋转体组合而成？(2) 求该穹顶的体积；(3) 求该穹顶外表面的面积（不含底部圆形底面）。

3.3 空间中点线面的位置关系

考点精要

Q1 空间中两条直线的位置关系有哪三种？

A 平行（共面且无公共点）、相交（共面且唯一公共点）、异面（不共面、无公共点）。平面几何里“不相交就平行”在空间中不成立。

Q2 判断两条直线异面的常用方法？

A 两条直线既不共面又无公共点即异面；常用判定：一条直线与平面相交于一点，另一条直线在平面内但不经过该交点。

Q3 异面直线所成角的定义与范围？

A 过空间任一点分别作两异面直线的平行线，它们所成的锐角（或直角）即为异面直线所成角，范围 $[0, 90^\circ]$ 。求法：平移法（把角“搬”到一个三角形里，用余弦定理）。

Q4 四个公理中，确定一个平面有哪三种方式？

A 不共线三点确定一平面；一直线及线外一点确定一平面；两相交直线（或两平行直线）确定一平面。

例题精讲

例题 3.7

（位置关系判定）在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列各组直线的位置关系（填“平行、相交或异面”）：(1) AB 与 C_1D_1 ；(2) AB 与 B_1C_1 ；(3) AA_1 与 BC ；(4) AC 与 BD 。

例题 3.8

（求异面直线所成角）【文字化还原】正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值。

知识点 (1) 位置关系的判定

A10. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列各组直线的位置关系（填“平行、相交或异面”）：(1) AB 与 D_1C_1 ；(2) AA_1 与 BC ；(3) AC 与 BD 。

M5. 下列说法正确的是（ ）

- A. 空间中两条不相交的直线一定平行
- B. 两条异面直线没有公共点

- C. 两条直线没有公共点就一定异面
D. 平行于同一条直线的两条直线可能异面

知识点 (2) 异面直线所成角

A11. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则异面直线 A_1B 与 D_1C_1 所成角的余弦值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

A12. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3.4 空间中的平行与垂直

考点精要

Q1 线面平行的判定定理三条件是什么? 为什么“线在面外”不能省?

A $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \parallel b$ 。若 a 已经在面内, 就谈不上“线平行于面”——判定定理只管平面外的直线。

Q2 线面垂直的判定为什么必须“两条相交直线”?

A 两条相交直线才能“锁住”平面的方向; 两条平行线只确定一个方向, 不能代表整个平面。

Q3 面面垂直的性质定理使用时, 第一步找什么?

A 先找交线, 再找面内“垂直于交线”的直线——只有垂直于交线的直线才垂直于另一个面, 面内其他直线(如平行于交线的)不垂直另一面。

Q4 等体积法求点到平面的距离怎么做?

A 换底不换体: 同一个四面体, 换一组“底 + 高”写体积等式, 未知的高(即点到面的距离)就解出来了。

例题精讲

例题 3.9

(线面平行证明) 【文字化还原】四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, E 为棱 PD 的中点。求证: $PB \parallel$ 平面 AEC 。

例题 3.10

(面面垂直判定 + 等体积法求距离) 【文字化还原】四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = 1$, $AB = 1$, $AD = 2$ 。(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAB ; (2) 求点 C 到平面 PBD 的距离。

知识点 (1) 线面平行与线面垂直的判定

A13. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D 、 E 分别是棱 AB 、 AC 的中点。求证: $DE \parallel$ 平面 PBC 。

A14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求证: $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D 。

M6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 l 是底面 $ABCD$ 内一条与 AB 平行的直线。甲说: “因为 $l \parallel AB$, 且 $AB \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $l \parallel$ 底面 $ABCD$ 。” 乙说: “ l 已经在底面内, 谈不上 $l \parallel$ 底面 $ABCD$ 。” 则 ()

A. 甲对乙错 B. 乙对甲错 C. 甲乙都对 D. 甲乙都错

M7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$ (交线为 AB)。下列说法正确的是 ()

- A. 平面 $ABCD$ 内与 AB 平行的直线 CD 垂直于平面 ABB_1A_1
- B. 平面 $ABCD$ 内垂直于 AB 的直线 (如 AD) 垂直于平面 ABB_1A_1
- C. 平面 ABB_1A_1 内任意一条直线都垂直于平面 $ABCD$
- D. 由两平面垂直可推出面内任意直线都垂直于另一个平面

知识点 (2) 面面垂直与体积

B6. (2022 · 全国乙卷 · 理科第 7 题, 文科第 9 题) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别为 AB 、 BC 的中点, 则 ()

- A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1
- B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
- C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC
- D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D

B7. (2023 · 全国甲卷 · 文科第 10 题) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PA = PB = 2$, $PC = \sqrt{6}$, 则该棱锥的体积为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

本章综合

S1. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 4, 高为 3。(1) 求它的斜高与侧棱长; (2) 求它的体积与表面积; (3) 求异面直线 PA 与 BC 所成角的余弦值。

S2. 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = 2$, E 为棱 PC 的中点。(1) 求证: $PA \parallel$ 平面 BDE ; (2) 求证: 平面 $BDE \perp$ 平面 $ABCD$; (3) 求点 C 到平面 BDE 的距离。

第四章 空间向量与立体几何

4.1 空间向量及其运算

考点精要

Q1 空间向量加减、数乘、模长的坐标法则是什么？

A $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$, $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ——勾股定理从平面升到三维。

Q2 数量积坐标公式与两个推论？

A $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$; 垂直 $\Leftrightarrow$ 点积为零; 夹角 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。

Q3 两向量共线的坐标判定？

A $\vec{a} \parallel \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ 存在 λ 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 即对应分量成比例。三点共线转化为两向量共线。

例题精讲

例题 4.1

(线性运算与模长) 已知 $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{c} = (-1, 0, 2)$ 。求: (1) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; (2) $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$; (3) 判断 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 是否共线。

例题 4.2

(数量积、夹角与垂直) (1) 已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值; (2) 已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ 与 $\vec{b} = (x, -1, 2)$ 互相垂直, 求 x 。

知识点 (1) 空间向量的线性运算与模长

A1. 已知 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, -1)$, 则 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 分别是 ()

- A. $(-4, -2, 7)$, $\sqrt{6}$, 0 B. $(-4, -2, 7)$, $\sqrt{6}$, 2
C. $(4, 2, 7)$, $\sqrt{6}$, 0 D. $(-4, -2, 7)$, $\sqrt{5}$, 0

A2. 判断 $\vec{a} = (-2, 1, 4)$ 与 $\vec{b} = (6, -3, -12)$ 是否共线 ()

- A. 共线 B. 不共线 C. 垂直 D. 无法判断

知识点 (2) 数量积、夹角与垂直

A3. 已知 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 与两向量夹角 θ 的余弦值分别是 ()

A. $-1, -\frac{1}{2}$ B. $-1, \frac{1}{2}$ C. $1, -\frac{1}{2}$ D. $1, \frac{1}{2}$

M1. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ 。直线 l_1 、 l_2 的方向向量分别为 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 则 l_1 与 l_2 所成角的余弦值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.2 空间向量基本定理与坐标化

考点精要

Q1 空间向量基本定理讲了什么?

A 三个不共面向量构成空间的一个基底, 空间中任意向量可唯一地表示为 $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ 。

Q2 四点共面的向量判定怎么写?

A 四点 A 、 B 、 C 、 P 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 x 、 y 使 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ——注意是“第三个向量能否用前两个线性表示”, 与“两个向量总共面”是两回事。

Q3 建系三原则是什么?

A (1) 找三条两两垂直的直线交于一点作原点; (2) 尽量让关键点落在坐标轴上; (3) 优先用长方体的棱、直棱柱的底面边与高、正棱锥的高与底面中心连线当轴。

Q4 求平面法向量的标准算法?

A 在面内取两个不共线向量, 设法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 列两个点积为零的方程, 解出两个分量与第三个的关系, 再把一个自由分量取成好算的整数 (不要盲目令 $x = 0$, 可能解出零向量)。

例题精讲

例题 4.3

(四点共面判定) 已知四点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(1, 2, 1)$, 判断四点是否共面。

例题 4.4

(建系与写点坐标) 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 3。以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AA_1}$ 方向分别为 x 、 y 、 z 轴正方向建系, 写出各顶点的坐标。

例题 4.5

(求平面的法向量) 在例题 4.4 的坐标系中, 求平面 A_1BD 的一个法向量。

知识点 (1) 空间向量基本定理与四点共面

A4. 已知 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $P(2,1,1)$, 则四点 A 、 B 、 C 、 P ()

A. 共面 B. 不共面

M2. 已知四点 $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$, $D(1,0,1)$ 。小甲说: “ $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 两两不共线, 所以四点 A 、 B 、 C 、 D 不共面。” 小乙说: “应设 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 看方程组是否有解来判断。” 则 ()

A. 甲对乙错 B. 乙对甲错 C. 甲乙都对 D. 甲乙都错

知识点 (2) 建系与点的坐标

A5. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 以 A 为原点建系, 则体对角线 $\overrightarrow{AC_1}$ 与其中点 O 分别是 ()

A. $(2,2,2)$, $(1,1,1)$ B. $(2,2,2)$, $(1,1,2)$
C. $(2,2,0)$, $(1,1,1)$ D. $(2,2,2)$, $(2,2,2)$

知识点 (3) 平面的法向量

A6. 平面 α 过 $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,2)$ 三点, 则平面 α 的一个法向量是 ()

A. $(2,2,1)$ B. $(1,1,2)$ C. $(2,1,2)$ D. $(1,2,1)$

M3. 平面 α 过 $O(0,0,0)$, $A(1,2,0)$, $B(0,1,1)$ 。小明求法向量时令 $x=0$, 解得 $y=z=0$, 于是说: “这个平面没有非零法向量。” 他的说法 ()

A. 正确 B. 错误

4.3 用向量研究位置关系

考点精要

Q1 方向向量与法向量怎么“分工”?

A 直线用方向向量 (一个向量就够); 平面用法向量 (垂直于平面的非零向量, 乘以非零常数仍合法, 不唯一)。

Q2 位置关系的向量判定表?

A 线面平行: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 且直线不在面内; 线面垂直: $\vec{v} \parallel \vec{n}$ (成比例); 面面垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$; 面面平行: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ 。

Q3 向量法证线面平行, 最后一步必须做什么?

A 取直线上一点代入平面方程, 确认该点不在面内—— $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ 只说明方向与平面平行, 若直线整个躺在面内, 点积同样为零。

例题精讲

例题 4.6

(向量法证明线面平行)【文字化还原】直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 4, E 为棱 CC_1 的中点。用向量法证明: $AC_1 \parallel$ 平面 BDE 。

例题 4.7

(向量法证明线面垂直与面面垂直) 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 3。求证: $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ; 并判断平面 A_1C_1C 与平面 BDD_1B_1 是否垂直。

知识点 (1) 方向向量与法向量的位置关系判定

A7. 直线 l 的方向向量 $\vec{v} = (1, 2, -1)$, 平面 α 的法向量 $\vec{n} = (2, 4, -2)$, 则 l 与 α 的位置关系是 ()

A. $l \parallel \alpha$ B. $l \perp \alpha$ C. l 在平面 α 内 D. 无法判断

M5. 直线 l 的方向向量 $\vec{v} = (2, -1, 3)$, 平面 α 的法向量 $\vec{n} = (4, -2, 6)$, 则 l 与 α 的位置关系是 ()

A. $l \parallel \alpha$ B. $l \perp \alpha$ C. l 在平面 α 内 D. 无法判断

知识点 (2) 向量法证明平行与垂直

A8. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 用向量法证明: 平面 $A_1C_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。

M4. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, E 为棱 CC_1 的中点。小明用向量法证明“ $AC_1 \parallel$ 平面 BDE ”时, 只验证了方向向量 $\vec{v} = (2, 2, 2)$ 与平面 BDE 的法向量 $\vec{n} = (1, 1, -2)$ 满足 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 就下结论“ $AC_1 \parallel$ 平面 BDE ”。他的证明 ()

A. 完整正确 B. 缺少“ AC_1 不在平面 BDE 内”的验证, 不严谨
C. 方法完全错误 D. 结论本身错误

4.4 空间角

考点精要

Q1 三种角的向量公式与范围?

A 线线角 $\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$ (取绝对值), $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; 线面角 $\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; 二面角 $\cos \theta = \pm \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$, $\theta \in [0, \pi]$ 。

Q2 线面角为什么是“正弦等于夹角余弦”?

A 方向向量与法向量的夹角 φ , 与线面角 θ 互余: $\sin \theta = |\cos \varphi|$ ——这是全章最容易搞反的公式。

Q3 二面角为什么需要“判号”?

A 两法向量夹角 φ 与二面角 θ 相等或互补。判号方法：观察法（看图估锐钝）、平面角验证（在棱上取点作平面角）、法向量指向（一内一外相等、同向互补）。

例题精讲

例题 4.8

（线线角）正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，求异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值。

例题 4.9

（线面角）【文字化还原】正四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，顶点到底面的高为 3。求侧棱 PA 与底面所成角的正弦值。

例题 4.10

（二面角判号）【文字化还原】直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AA_1 = 2$ 。求平面 A_1BC 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值。

知识点 (1) 异面直线所成角

A9. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 0

知识点 (2) 线面角

A10. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，则直线 A_1B 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B4. (2023 · 全国甲卷 · 理科第 18 题) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = 2$ ， $A_1C \perp$ 底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1。(1) 求证： $AC = A_1C$ ；(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值。

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理科第 7 题) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° ，则（ ）

- A. $AB = 2AD$
B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°
C. $AC = CB_1$
D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

M6. 直线 l 的方向向量 $\vec{v}$ 与平面 α 的法向量 $\vec{n}$ 的夹角（锐角）为 60° ，则直线 l 与平面 α 所成角的正弦值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

知识点 (3) 二面角

B1. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 18 题) 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = 4$. 点 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 分别在棱 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 、 DD_1 上, $AA_2 = 1$, $BB_2 = DD_2 = 2$, $CC_2 = 3$. (1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$; (2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .

B2. (2023 · 新高考 II 卷 · 第 18 题) 三棱锥 $A - BCD$ 中, $DA = DB = DC$, $BD \perp CD$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, E 为 BC 的中点. (1) 证明: $BC \perp DA$; (2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$, 求二面角 $D - AB - F$ 的正弦值.

B3. (2024 · 新高考 I 卷 · 第 17 题) 【文字化还原】四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. (1) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ; (2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A - CP - D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .

M7. 两个半平面的法向量 $\vec{n}_1$ 、 $\vec{n}_2$ 的夹角为 60° . 下列说法正确的是 ()

- A. 二面角一定是 60°
- B. 二面角一定是 120°
- C. 二面角为 60° 或 120°
- D. 二面角大小无法由这两个法向量确定

C1. (卫星轨道面夹角) 以地心 O 为原点建立空间直角坐标系. 一颗卫星的轨道平面 α 是 xOy 平面; 另一颗卫星的轨道平面 β 过 O 、 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$ 三点. (1) 分别求平面 α 、 β 的一个法向量; (2) 求两轨道平面夹角 (二面角) 的余弦值; (3) 卫星 T 位于点 $(1, 1, 1)$ (在轨道面 β 上), 求它到轨道面 α 的距离.

4.5 空间距离

考点精要

Q1 点到平面的距离公式?

A $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}|}$ (A 在面内、 P 在面外). 记忆锚点: 距离 = $\overrightarrow{PA}$ 沿法方向压缩出的投影长度.

Q2 点到直线的距离公式?

A $d = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ ——分子是 $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 张成的平行四边形面积, 除以底边 AB 得高.

Q3 异面直线距离怎么用向量投影法?

A 求公法向量 $\vec{n} \perp \vec{v}_1$ 、 $\vec{n} \perp \vec{v}_2$, 在两直线上各取一点 P 、 Q , $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$. 线面距离、面面距离 (平行时) 都转化为点到平面距离.

例题精讲

例题 4.11

(点到平面的距离) 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱长 6。求点 C_1 到平面 A_1BD 的距离。

例题 4.12

(点到直线的距离) 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 3, 求点 A 到直线 B_1D_1 的距离。

知识点 (1) 点到平面的距离

A11. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 则点 A_1 到平面 B_1BDD_1 的距离为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

M8. 已知平面 α 的法向量 $\vec{n} = (1, 2, 2)$, $A(1, 0, 0)$ 在平面 α 内, $P(0, 0, 1)$ 在平面外。小华写出了三种“点 P 到平面 α 的距离”表达式: (1) $\frac{|\vec{n} \cdot \vec{PA}|}{|\vec{n}|}$ (2) $\frac{|\vec{n} \cdot \vec{AP}|}{|\vec{n}|}$ (3) $|\vec{n} \cdot \vec{PA}|$ 其中正确的是 ()

A. (1)(2) B. 只有 (1) C. (1)(3) D. (1)(2)(3)

知识点 (2) 点到直线、异面直线的距离

A12. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 则点 A 到直线 B_1D_1 的距离为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

C2. (机械臂末端定位) 某工业机械臂的末端执行器位于点 $E(2, 2, 1)$ 。它需要检测的工件表面是平面 α , 平面 α 过 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ 三点。(1) 求平面 α 的一个法向量; (2) 求末端执行器 E 到工件表面 α 的距离; (3) 若机械臂末端沿方向 $\vec{d} = (1, 1, 1)$ 直线运动去接近工件表面, 判断该运动方向是否垂直于工件表面, 并说明理由。

本章综合

S1. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 2$, $AA_1 = 4$ 。(1) 求异面直线 A_1C 与 AB_1 所成角的余弦值; (2) 求直线 A_1C 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值; (3) 求点 A 到平面 A_1BC 的距离。

S2. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2。(1) 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值; (2) 点 P 在棱 BB_1 上移动, 求点 P 到平面 A_1BD 的距离 d 的取值范围。

第五章 直线与圆的方程

5.1 直线的倾斜角与斜率、直线方程

考点精要

Q1 倾斜角的取值范围是什么？斜率与倾斜角什么关系？

A 倾斜角 $\alpha \in [0, \pi)$ ；斜率 $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$)。倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ (直线垂直于 x 轴) 时斜率不存在——这是解析几何第一个“坑”。

Q2 用两点坐标求斜率前先检查什么？

A 先检查两点的横坐标是否相同。若相同，则直线垂直于 x 轴，斜率不存在，方程写成 $x = x_0$ ，而不是强行写 $y = kx + b$ 。

Q3 直线方程有哪五种形式？各自的局限是什么？

A 点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式。点斜式与斜截式不能表示竖直线；两点式要求两点的横、纵坐标均不同；截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 不能过原点 (a, b 均不为零)；只有一般式 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为零) **无死角**。

Q4 由一般式 $Ax + By + C = 0$ 求斜率用什么公式？

A $k = -\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)；当 $B = 0$ 时一般式表示竖直线，无斜率。记公式时别丢了负号、别把分子分母写反。

Q5 截距是“距离”吗？

A 不是。截距是带符号的坐标值——直线过 $(-2, 0)$ 时 x 截距为 -2 ；过 $(0, 3)$ 时 y 截距为 3 。距离是非负数，截距可正、可负、可为零。

例题精讲

例题 5.1

(斜率与倾斜角，含竖直线) (1) 求过 $A(0, 1)$ 、 $B(2, 5)$ 的直线的斜率，并判断倾斜角是锐角还是钝角；(2) 求过 $C(3, 4)$ 、 $D(3, -2)$ 的直线的斜率，若不存在，说明理由；(3) 求倾斜角为 120° 的直线的斜率。

例题 5.2

(直线方程的几种形式) (1) 求过点 $(2, -3)$ 且垂直于 x 轴的直线方程; (2) 求过点 $(2, -3)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线方程, 并化为一般式; (3) 把直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 化为斜截式, 并求其斜率。

知识点 (1) 直线的倾斜角与斜率

A1. 过 $P(0, 1)$ 、 $Q(2, 5)$ 两点的直线的倾斜角是 ()

A. 锐角 B. 直角 C. 钝角 D. 不能确定

A2. 过 $M(3, 4)$ 、 $N(3, -2)$ 两点的直线的倾斜角为 ()

A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

A3. 已知直线的倾斜角为 60° , 则它的斜率为_____。

M1. 过点 $(2, 3)$ 且垂直于 x 轴的直线方程是 ()

A. $y = 3$ B. $x = 2$ C. $y - 3 = k(x - 2)$ (k 为任意实数) D. 不存在

知识点 (2) 直线方程的几种形式

A4. 求过点 $(2, -1)$ 且倾斜角为 135° 的直线方程, 并化为一般式: _____。

A5. 求过点 $(2, 3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线方程: _____。

A6. 把直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 化为斜截式, 得_____。

M2. 直线过 $A(-2, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 两点, 其截距式方程与两个截距分别是 ()

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, 两个截距为 2 与 3
B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$, x 截距为 -2 , y 截距为 3
C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, 两个截距为 2 与 -3
D. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$, 两个截距为 2 与 3

M3. 直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 的斜率是 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

5.2 两条直线的位置关系与距离公式

考点精要

Q1 判定两直线平行、垂直有哪两套判据?

A 斜率式: 平行 $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$, 垂直 $k_1 k_2 = -1$ (两斜率都存在时); 一般式: 平行 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, 垂直 $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ (对竖直、水平直线一律有效)。

Q2 为什么说一般式判定垂直“无死角”?

A 竖直线没有斜率, $k_1 k_2 = -1$ 在竖直线参与时失效; 而一般式中 $B = 0$ 就表示竖直线,

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ 不依赖斜率是否存在。凡涉及竖直直线的题目，优先化一般式。

Q3 点到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式是什么？

A $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ——分子是“把点代进一般式取绝对值”，分母是“系数平方和再开根”。分母 $\sqrt{A^2 + B^2}$ 千万不能丢。

Q4 两平行线间距离公式的使用前提是什么？

A 两线系数必须**先化成相同** ($Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$)，再算 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。系数不同就直接套公式，答案必错。

Q5 两直线的交点坐标怎么求？

A 联立两直线方程解方程组——相交对应唯一解，平行对应无解，重合对应无穷多解。

例题精讲

例题 5.3

(位置关系判定) 判断下列各组直线的位置关系：(1) $l_1: 2x + 3y - 1 = 0$, $l_2: 2x + 3y + 7 = 0$; (2) $l_3: 2x + 3y - 1 = 0$, $l_4: 3x - 2y + 5 = 0$; (3) $l_5: x = 2$, $l_6: y = 3$ 。

例题 5.4

(距离与交点) (1) 求点 $(1, 2)$ 到直线 $3x + 4y - 1 = 0$ 的距离；(2) 求两平行线 $x + y - 1 = 0$ 与 $2x + 2y + 3 = 0$ 间的距离；(3) 求直线 $x + y - 5 = 0$ 与 $2x - y - 4 = 0$ 的交点坐标。

知识点 (1) 两条直线的位置关系与交点

A7. 已知直线 $l_1: x + 2y - 3 = 0$, $l_2: 2x - y + 5 = 0$, 则 l_1 与 l_2 的位置关系是 ()

A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 重合

A8. 已知直线 $l_1: (a + 1)x + 2y - 4 = 0$ 与 $l_2: x + ay + 1 = 0$ 平行, 则 $a =$ _____。

A9. 直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与 $2x + y - 8 = 0$ 的交点坐标是 ()

A. (3, 2) B. (2, 3) C. (1, 1) D. (4, 0)

知识点 (2) 距离公式与对称

A10. 点 $(2, -3)$ 到直线 $3x + 4y - 9 = 0$ 的距离是 ()

A. 3 B. $\frac{3}{5}$ C. 15 D. 5

A11. 点 $P(2, 1)$ 关于直线 $x + y = 0$ 的对称点为_____。

M4. 点 $(1, 2)$ 到直线 $3x + 4y - 1 = 0$ 的距离为 ()

A. 10 B. 2 C. 5 D. $\frac{10}{\sqrt{7}}$

M5. 两平行线 $l_1: x + y - 1 = 0$ 与 $l_2: 2x + 2y + 3 = 0$ 间的距离为 ()

A. $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

5.3 圆的方程与圆与圆的位置关系

考点精要

Q1 圆的标准方程与一般方程分别是什么？

A 标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (圆心 (a,b) , 半径 r)；一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 配方后圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 。

Q2 一般方程表示圆的充要条件是什么？

A $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 。等于 0 是点圆，小于 0 不表示任何图形——只看“ x^2 、 y^2 系数相同”就下结论是经典错误。

Q3 求圆的方程有哪两条路？

A 已知圆心（或半径）→ 用标准式直接写；已知三个点 → 用一般式待定 D 、 E 、 F （解三元方程组）。

Q4 两圆的位置关系怎么判定？

A 设圆心距为 d ，两半径为 r_1 、 r_2 ($r_1 \geq r_2$)： $d > r_1 + r_2$ 外离、 $d = r_1 + r_2$ 外切、 $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ 相交、 $d = r_1 - r_2$ 内切、 $d < r_1 - r_2$ 内含。

Q5 两圆的公共弦所在直线方程怎么求？

A 两圆方程相减（消去 $x^2 + y^2$ 项）所得直线即为公共弦所在直线。

例题精讲

例题 5.5

（圆的标准方程与一般方程）（1）求以 $(2, -1)$ 为圆心、半径为 3 的圆的方程，并化为一般式；（2）求圆 $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ 的圆心与半径；（3）求过 $A(0, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(0, 2)$ 三点的圆的方程。

例题 5.6

（两圆位置与公共弦）（1）判断两圆 $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 与 $C_2: (x+2)^2 + y^2 = 1$ 的位置关系；（2）求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的公共弦所在直线的方程与公共弦长。

知识点 (1) 圆的标准方程与一般方程

A12. 圆 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 的圆心与半径分别是 ()

A. $(2, -3)$, 4 B. $(-2, 3)$, 4 C. $(2, -3)$, 16 D. $(-2, 3)$, 16

A13. 若方程 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$ 表示圆，则 m 的取值范围是_____。

M6. 方程 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0$ 表示的图形是 ()

A. 圆，圆心 $(-1, 2)$ ，半径 $\sqrt{5}$

- B. 圆, 圆心 $(-1, 2)$, 半径 5
 C. 点圆, 圆心 $(-1, 2)$
 D. 不表示任何图形

知识点 (2) 圆与圆的位置关系

A14. 两圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 与 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 ()

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

A15. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的公共弦所在直线的方程是_____。

B1. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 14 题) 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程: _____。

B2. (2022 · 全国乙卷 · 第 14 题) 过四点 $(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(4, 2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____。

C1. (桥梁拱形) 某拱桥的桥拱设计为半圆, 拱顶离水面 4 m, 拱的两端恰好落在水面上 (水面宽为 8 m)。一艘宽 3 m、船舷高出水面 3.2 m 的货船, 沿桥面正中的方向单向通过桥洞 (船身不倾斜)。问: 货船能否安全通过桥洞? 请说明理由。

5.4 直线与圆的位置关系

考点精要

Q1 直线与圆的三种位置关系有哪些判据?

A 几何判据 (首选): 圆心到直线的距离 d 与半径 r 比较—— $d > r$ 相离、 $d = r$ 相切、 $d < r$ 相交; 代数判据 (兜底): 联立消元后判别式 $\Delta < 0$ 相离、 $\Delta = 0$ 相切、 $\Delta > 0$ 相交。两法互为检验。

Q2 直线与圆相交时弦长怎么算?

A $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ (垂径定理: 弦心距 d 、半弦、半径构成直角三角形)。写成 $\sqrt{r^2 - d^2}$ 就漏了半弦的两倍。

Q3 圆的切线方程有哪两类写法?

A 过圆上一点 $P_0(x_0, y_0)$: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ (唯一一条); 过圆外一点: 设 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 由 $d = r$ 解 k ——**还要检查过该点的竖直线是否是切线**, 共有两条。

Q4 圆上的点到直线距离的最值怎么取?

A 设圆心到直线距离为 d 、半径为 r : 最大值为 $d + r$, 最小值为 $|d - r|$ (直线与圆相交时最小值为 0)。取最值的点在“圆心到直线的垂线”方向上的圆的两端。

Q5 判断直线与圆的位置关系, 为什么几何法优先?

A 几何法只需算一次点到直线的距离, 计算量小、不易错; 代数法在“求交点坐标、求弦长”时才必须用。

例题精讲

例题 5.7

(位置判定与弦长) (1) 判断直线 $x + y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的位置关系, 若相交, 求弦长; (2) 求圆 $x^2 + y^2 = 25$ 被直线 $3x + 4y - 15 = 0$ 截得的弦长。

例题 5.8

(切线方程两类) (1) 已知圆 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$, 点 $P(2, 1)$ 在圆上, 求过 P 的切线方程; (2) 求过点 $(1, 2)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切的直线方程。

例题 5.9

(圆上点到直线距离最值) 求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的距离的最大值与最小值。

知识点 (1) 直线与圆的位置关系与弦长

A16. 直线 $x + 2y - 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 的位置关系是 ()

A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不能确定

A17. 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 被直线 $3x + 4y - 15 = 0$ 截得的弦长为 ()

A. 8 B. 4 C. 10 D. 6

A18. 直线 $3x + 4y - 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交, 则截得的弦长为_____。

M7. 下列说法正确的是 ()

A. 直线与圆相切 $\Leftrightarrow$ 联立消元后 $\Delta > 0$

B. 直线与圆相交 $\Leftrightarrow$ 圆心到直线的距离 $d > r$

C. 直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r \Leftrightarrow \Delta = 0$

D. 直线与圆相离 $\Leftrightarrow$ 圆心到直线的距离 $d < r$

B3. (2023 · 新高考 II 卷 · 第 15 题) 已知直线 $x - my + 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A 、 B 两点, 写出满足 “ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{8}{5}$ ” 的一个 m 的值: _____。

知识点 (2) 圆的切线方程

A19. 求圆 $x^2 + y^2 = 13$ 上点 $(2, -3)$ 处的切线方程: _____。

A20. 若直线 $y = x + b$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 则 $b =$ _____。

M8. 过点 $P(2, 3)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线, 小明设切线为 $y - 3 = k(x - 2)$, 由 $d = r$ 解得 $k = \frac{5}{12}$, 得到一条切线 $5x - 12y + 26 = 0$, 于是认为过 P 的切线只有一条。下列说法正确的是 ()

A. 小明是对的, 过圆外一点只有一条切线

B. 小明漏了竖直线 $x = 2$, 它也是切线, 过圆外一点应有两条切线

C. 小明算错了 k 的值

D. 点 P 在圆内, 没有切线

B4. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 6 题) 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

知识点 (3) 圆上点到直线的距离最值

A21. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 的距离的最大值为 $(\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

B5. (2021 · 新高考 I 卷 · 第 11 题, 多选) 已知点 P 在圆 $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则 $(\quad)$

- A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10
B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB| = 3\sqrt{2}$
D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 3\sqrt{2}$

C2. (雷达探测) 某海岸雷达站 P 位于坐标原点, 探测半径为 60 km (覆盖区域为圆 $x^2 + y^2 = 3600$, 单位: km)。一艘渔船沿直线航线航行, 航线方程为 $3x + 4y - 200 = 0$ 。(1) 判断渔船航线是否会进入雷达探测区; (2) 若会进入, 求渔船在探测区内航行的距离。

本章综合

S1. 已知直线 $l: (2m + 1)x + (m - 1)y + 3m - 4 = 0$ (m 为参数)。(1) 证明 l 恒过定点 P , 并求 P 的坐标; (2) 求原点到直线 l 的距离的最大值。

S2. 已知圆 C 过点 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$, 且圆心在直线 $x - y + 2 = 0$ 上。(1) 求圆 C 的方程; (2) 求直线 $x - y + 4 = 0$ 被圆 C 截得的弦长; (3) 求圆 C 上的点到直线 $x - y + 4 = 0$ 的距离的最大值。

第六章 圆锥曲线的方程

6.1 椭圆

考点精要

Q1 椭圆的定义是什么？

A 平面内到两个定点 F_1 、 F_2 （焦点）的距离之和为常数 $2a$ （且 $2a > |F_1F_2| = 2c$ ）的点的轨迹。椭圆是“和”。

Q2 椭圆中 a 、 b 、 c 满足什么关系？谁最大？

A $a^2 = b^2 + c^2$ ， a 最大。以中心 O 、焦点 $(c, 0)$ 、顶点 $(0, b)$ 为三点的直角三角形中斜边是 a ——认出这个三角形就不会记反公式。

Q3 怎么判断椭圆焦点在 x 轴还是 y 轴？

A 看 x^2 、 y^2 分母谁大——分母大的是 a^2 ，焦点跟着大分母所在的轴走。

Q4 离心率公式与范围？

A $e = \frac{c}{a}$ ，且 $0 < e < 1$ ；又 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 。 e 越接近 0 越“圆”，越接近 1 越“扁”。

Q5 通径是什么？怎么算？

A 过焦点且垂直于长轴的弦，长度 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ 。

例题精讲

例题 6.1

（由标准方程求基本量 + 离心率反求）（1）已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，求长轴长、短轴长、焦距、焦点坐标与离心率；（2）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $a : b$ 。

例题 6.2

（由条件求标准方程 + 定义直译）（1）已知椭圆的顶点为 $(\pm 6, 0)$ ，焦点为 $(\pm 2, 0)$ ，求椭圆的标准方程；（2）动点 P 到 $F_1(-4, 0)$ 、 $F_2(4, 0)$ 的距离之和恒为 10，求 P 的轨迹方程。

知识点 (1) 椭圆的定义与标准方程

A1. 动点 P 到 $F_1(-3,0)$ 、 $F_2(3,0)$ 的距离之和为 10, 则 P 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

A2. 已知椭圆的焦点在 x 轴上, 顶点为 $(\pm 6, 0)$, 焦距为 4, 求椭圆的标准方程: _____。

A3. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点 P 到左焦点 F_1 的距离为 4, 则 P 到右焦点 F_2 的距离为_____。

M1. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的焦点坐标是 ()

- A. $(\pm 4, 0)$ B. $(0, \pm 4)$ C. $(\pm \sqrt{34}, 0)$ D. $(0, \pm \sqrt{34})$

知识点 (2) 椭圆的几何性质与离心率

A4. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

A5. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{34}}{5}$

B1. (2023 · 新高考 I 卷 · 第 5 题) 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$), $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1 、 e_2 。若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

C1. (行星轨道) 某颗行星绕太阳运行的轨道是椭圆, 太阳位于椭圆的一个焦点上。已知该行星距太阳最近 (近日点) 为 1.4 亿 km, 距太阳最远 (远日点) 为 2.6 亿 km。(1) 求该椭圆轨道的长半轴长 a 与半焦距 c ; (2) 求该椭圆轨道的离心率 e 。

知识点 (3) 椭圆的焦点三角形与焦点弦

A6. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两焦点为 F_1 、 F_2 , P 为椭圆上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____。

M2. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦距分别为 ()

- A. 6 与 6 B. 6 与 10 C. 8 与 10 D. 8 与 6

B2. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 16 题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1 、 F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$ 。过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D 、 E 两点, $|DE| = 6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是_____。

6.2 双曲线

考点精要

Q1 双曲线的定义是什么？

A 平面内到两个定点 F_1 、 F_2 的距离之差的绝对值为常数 $2a$ (且 $0 < 2a < 2c$) 的点的轨迹。双曲线是“差”，“绝对值”决定它是两支。

Q2 双曲线中 a 、 b 、 c 满足什么关系？谁最大？

A $c^2 = a^2 + b^2$, c 最大——与椭圆 (a 最大) 恰好相反。两式背靠背各算一次 b^2 或 c^2 , 是防混淆的最佳训练。

Q3 怎么判断双曲线焦点在哪个轴？

A 看标准方程中 x^2 、 y^2 谁前面的系数是正号——正号项对应的变量所在轴是实轴 (焦点所在轴)。双曲线看正号，椭圆看大分母，口诀别混。

Q4 渐近线方程怎么记？

A 焦点在 x 轴 ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$): $y = \pm \frac{b}{a}x$; 焦点在 y 轴 ($\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$): $y = \pm \frac{a}{b}x$ 。万能做法：把方程右边 1 换成 0 解出 y , 永不颠倒。

Q5 离心率范围？

A $e = \frac{c}{a} > 1$ 。

例题精讲

例题 6.3

(由标准方程求基本量) 已知双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 求实轴长、虚轴长、焦距、焦点坐标、渐近线方程与离心率。

例题 6.4

(由渐近线反求方程 + 定义直译) (1) 已知双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 且经过点 $(3\sqrt{2}, 2)$, 求双曲线的标准方程; (2) 动点 P 到 $F_1(-5, 0)$ 、 $F_2(5, 0)$ 的距离之差的绝对值为 6, 求 P 的轨迹方程。

知识点 (1) 双曲线的定义与标准方程

A7. 动点 P 到 $F_1(-5, 0)$ 、 $F_2(5, 0)$ 的距离之差的绝对值为 6, 则 P 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($x \geq 3$)

A8. 双曲线 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 的焦点坐标是 ()

A. $(0, \pm 5)$ B. $(\pm 5, 0)$ C. $(0, \pm \sqrt{7})$ D. $(\pm \sqrt{7}, 0)$

A9. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离为 12, 则 P 到另一焦点 F_2 的距离为_____。

M3. 双曲线 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 的渐近线方程是 ()

A. $y = \pm \frac{4}{3}x$ B. $y = \pm \frac{3}{4}x$ C. $y = \pm \frac{9}{16}x$ D. $y = \pm \frac{16}{9}x$

知识点 (2) 双曲线的几何性质与离心率 (含焦点三角形)

A10. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的实轴长、虚轴长、焦距分别是 ()

A. 8, 6, 10 B. 6, 8, 10 C. 8, 6, 14 D. 4, 3, 5

A11. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的离心率为_____。

A12. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的两焦点为 F_1, F_2 , P 为双曲线上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____。

B3. (2022 · 全国乙卷 · 第 11 题) 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 的两支交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

C2. (双曲线导航) 某海域有两座导航台 A, B , 相距 80 km。一艘船测得它到 A 台的距离减去到 B 台的距离恒等于 40 km。以 AB 的中点为原点、 AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系 (A 在 B 左侧)。(1) 求这艘船所在位置的轨迹方程; (2) 说明这条轨迹是哪一种曲线, 并指出它的实轴长与焦距。

6.3 抛物线

考点精要

Q1 抛物线的定义是什么?

A 平面内到定点 F (焦点) 与到定直线 l (准线) 距离相等的点的轨迹。抛物线是“等”。焦点到准线的距离叫焦准距 p ($p > 0$)。

Q2 四种标准方程怎么配对?

A 一次项在哪个变量, 开口就朝那个变量方向: 一次项是 x 则开口横向 (系数正右负左), 一次项是 y 则开口纵向 (系数正上负下)。如 $y^2 = 2px$: 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$, 准线 $x = -\frac{p}{2}$, 通径 $2p$ 。

Q3 求焦点前先做什么?

A 先把 $2p$ 除以 2 得 p , 再减半放焦点—— $y^2 = 2px$ 的焦点横坐标是 $\frac{p}{2}$ 不是 p 。

Q4 过焦点弦有什么结论?

A 过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 的弦两端 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 满足 $y_1y_2 = -p^2$, 弦长 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ 。

Q5 抛物线的离心率是多少?

A $e = 1$ 。离心率数轴: 圆 $e = 0$ 、椭圆 $0 < e < 1$ 、抛物线 $e = 1$ 、双曲线 $e > 1$ 。

例题精讲

例题 6.5

(标准方程与焦点、准线互译) 求下列抛物线的焦点坐标、准线方程与通径长: (1) $y^2 = 4x$; (2) $x^2 = -6y$; (3) $y^2 = x$ 。

例题 6.6

(定义直译 + 焦点弦) (1) 动点 P 到定点 $F(2, 0)$ 与到直线 $x = -2$ 的距离相等, 求 P 的轨迹方程; (2) 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作斜率为 1 的直线, 交抛物线于 A 、 B 两点, 求 $|AB|$ 与 $y_1 y_2$ 。

知识点 (1) 抛物线的定义与标准方程

A13. 抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点坐标与准线方程分别是 ()

A. $(3, 0)$, $x = -3$ B. $(6, 0)$, $x = -6$ C. $(3, 0)$, $x = 3$ D. $(-3, 0)$, $x = 3$

A14. 抛物线 $x^2 = -8y$ 的焦点坐标是 ()

A. $(0, 2)$ B. $(0, -2)$ C. $(-2, 0)$ D. $(2, 0)$

A15. 动点 P 到定点 $F(0, 3)$ 与到直线 $y = -3$ 的距离相等, 则 P 的轨迹方程为 ()

A. $x^2 = 12y$ B. $y^2 = 12x$ C. $x^2 = 6y$ D. $x^2 = 24y$

A16. 抛物线 $y^2 = 8x$ 上一点 P 到焦点 F 的距离为 6, 则 P 的横坐标为_____。

M4. 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点坐标与准线方程分别是 ()

A. $(4, 0)$, $x = -4$ B. $(2, 0)$, $x = -2$ C. $(8, 0)$, $x = -8$ D. $(2, 0)$, $x = 2$

M5. 抛物线 $y^2 = -8x$ 的焦点坐标与开口方向分别是 ()

A. $(2, 0)$, 向右 B. $(-2, 0)$, 向左 C. $(4, 0)$, 向左 D. $(-2, 0)$, 向右

B4. (2022 · 全国乙卷 · 第 5 题) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3, 0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$ ()

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

知识点 (2) 抛物线的焦点弦与焦半径

A17. 抛物线 $y^2 = 8x$ 的通径长为_____。

B5. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 11 题, 多选) 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P 、 Q 两点, 则 ()

A. C 的准线为 $y = -1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

B6. (2022 · 全国甲卷 · 第 20 题) 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M 、 N 两点。当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$ 。(1) 求 C 的方

程；(2) 设直线 MD 、 ND 与 C 的另一个交点分别为 A 、 B ，记直线 MN 、 AB 的倾斜角分别为 α 、 β 。当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程。

6.4 直线与圆锥曲线

考点精要

Q1 直线与圆锥曲线联立后怎么判断位置关系？

A 代入消元得 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ： $A \neq 0$ 时 $\Delta > 0$ 相交（两交点）、 $\Delta = 0$ 相切（一交点）、 $\Delta < 0$ 相离； $A = 0$ 时**退化**为一次方程——**只有一个交点但不是相切**（双曲线渐近线方向必考）。

Q2 弦长公式是什么？

A $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$ 。 $\sqrt{1+k^2}$ 把“横坐标差”换算成“斜线段长”，**忘乘它就偏短**。

Q3 中点弦的点差法斜率公式是什么？

A 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ： $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ；双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ： $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ 。核心思想是“设而不求”。

Q4 用点差法前先做什么？

A 先验证中点是否在曲线**内部**（椭圆： $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ ）——中点在外部时弦不存在，强算出的斜率没有实际交点支撑。

Q5 三角形面积有哪些坐标算法？

A 底 $\times$ 高（弦长 $\times$ 点到直线距离 $\div 2$ ）；顶点含原点时用割补公式 $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ ，一步到位。

例题精讲

例题 6.7

（含参直线与椭圆的位置关系）当 m 取何值时，直线 $y = x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交、相切、相离？

例题 6.8

（弦长与中点弦）(1) 直线 $y = x + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A 、 B 两点，求 $|AB|$ ；(2) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，求以 $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 为中点的弦所在直线的方程。

知识点 (1) 直线与圆锥曲线的位置关系

A18. 直线 $y = x + 3$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的位置关系是 ()

A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

A19. 直线 $y = 2x + 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

M6. 直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的公共点情况, 下列说法正确的是 ()

A. 0 个公共点, 相离

B. 1 个公共点, 相切

C. 1 个公共点, 但不相切

D. 2 个公共点, 相交

M7. 直线 $y = 2x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A 、 B 两点, 则 $|AB| =$ ()

A. $\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

知识点 (2) 弦长公式与中点弦 (点差法)

A20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 以 $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 为中点的弦所在直线的斜率为 ()

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

M8. 关于 “以 $N(2, 2)$ 为中点、端点在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的弦”, 下列说法正确的是 ()

A. 存在, 斜率为 $-\frac{1}{4}$

B. 存在, 斜率为 -4

C. 不存在

D. 存在无数条

B7. (2022 · 新高考 I 卷 · 第 21 题) 已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ ($a > 1$) 上, 直线 l 交 C 于 P 、 Q 两点, 直线 AP 、 AQ 的斜率之和为 0。(1) 求 l 的斜率; (2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积。

本章综合

S1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 直线 $l: y = x + m$ 与 C 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点。(1) 求使 l 与 C 相交的 m 的取值范围; (2) 求弦 AB 的中点的轨迹方程; (3) 求 $|AB|$ 的最大值及此时 m 的值。

S2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 且经过点 $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 。(1) 求 C 的方程; (2) 求 C 的离心率; (3) 判断直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与 C 的交点个数, 并说明理由。

S3. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 过 F 的直线与 C 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点。(1) 若 $x_1 + x_2 = 10$, $|AB| = 14$, 求 p 的值与 C 的方程; (2) 在 (1) 的条件下, 求 $y_1 y_2$ 的值; (3) 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值。

第七章 卷末综合检测

一、单项选择题 (Z1-Z5)

Z1. 已知 $A(-1, 2)$ 、 $B(3, 0)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 ()

- A. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ B. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
C. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Z2. 已知复数 z 满足 $|z - 2i| = 1$, 则 $|z|$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Z3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 点 P 在椭圆上, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 等于 ()

- A. 4 B. $\frac{16}{3}$ C. 6 D. 8

Z4. 已知空间向量 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. 0° B. 30° C. 60° D. 90°

Z5. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{5}{4}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ C. $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$ D. $y = \pm \frac{4}{5}x$

二、多项选择题 (Z6-Z8)

Z6. 下列说法正确的有 ()

- A. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦距为 8
B. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$
C. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $(4, 0)$
D. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$

Z7. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, 直线 $l: x + y + m = 0$, 下列说法正确的有 ()

- A. 圆 C 的圆心为 $(1, -2)$, 半径为 3
B. 当 $m = 1$ 时, 直线 l 过圆心
C. 存在 m , 使得直线 l 与圆 C 相切

D. 当 $m = 0$ 时, 直线 l 与圆 C 相离

Z8. 下列说法正确的有 ()

A. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$

B. 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的离心率为 $\sqrt{2}$

C. 抛物线 $y^2 = x$ 的焦点为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

D. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的通径长为 2

三、填空题 (Z9-Z11)

Z9. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作弦 AB , 若 A 、 B 两点的横坐标之和为 6, 则 $|AB|$ 的值为_____。

Z10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线为 $y = \sqrt{3}x$, 则其离心率 e 的值为_____。

Z11. 直线 $x - y + 1 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为_____。

四、解答题 (Z12-Z15)

Z12. (解三角形与圆) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $AC = 8$, $\angle A = 60^\circ$ 。(1) 求 BC 的长; (2) 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

Z13. (空间向量与立体几何) 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}$ 、 $\overrightarrow{DC}$ 、 $\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 、 y 、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系。(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值; (2) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值。

Z14. (椭圆与直线, 压轴) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 其右焦点为 F 。(1) 求过 F 且斜率为 1 的直线被椭圆 C 截得的弦长; (2) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A 、 B 两点, 求 $\triangle ABF$ 面积的最大值, 并求面积最大时直线 AB 的方程。

Z15. (双曲线综合, 压轴) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 且经过点 $(2, \sqrt{3})$ 。(1) 求 C 的方程; (2) 若直线 l 与 C 的一条渐近线平行, 判断 l 与 C 的交点个数, 并说明理由; (3) 判断以 $(1, 0)$ 为中点、端点在双曲线 C 上的弦是否存在, 并说明理由。