

GRADUS

数学 I

解答册

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 集合与常用逻辑用语	1
1.1 例题详解	1
1.2 知识点 (1) 集合的概念与表示详解	1
1.3 例题详解	2
1.4 知识点 (1) 子集与真子集详解	2
1.5 例题详解	3
1.6 知识点 (1) 交集与并集详解	3
1.7 知识点 (2) 补集与德摩根律详解	4
1.8 例题详解	6
1.9 知识点 (1) 充分条件、必要条件与充要条件详解	6
1.10 例题详解	7
1.11 知识点 (1) 全称量词与存在量词详解	7
第二章 一元二次函数、方程和不等式	11
2.1 例题详解	11
2.2 知识点 (1) 不等式的性质与比较大小详解	11
2.3 例题详解	13
2.4 知识点 (1) 基本不等式及其应用详解	13
2.5 例题详解	15
2.6 知识点 (1) 三个二次与一元二次不等式详解	15
第三章 函数的概念与性质	21
3.1 例题详解	21
3.2 知识点 (1) 函数的概念详解	22
3.3 知识点 (2) 函数的表示法与分段函数详解	22
3.4 例题详解	23

3.5	知识点 (1) 单调性详解	24
3.6	知识点 (2) 奇偶性详解	25
3.7	知识点 (3) 周期性与抽象函数 (新高考趋势) 详解	26
3.8	例题详解	27
3.9	知识点 (1) 幂函数概念与图象详解	28
3.10	例题详解	29
3.11	知识点 (1) 函数建模详解	29
第四章	指数函数与对数函数	33
4.1	例题详解	33
4.2	知识点 (1) 根式与分数指数幂详解	33
4.3	知识点 (2) 实数指数幂的运算性质详解	34
4.4	例题详解	34
4.5	知识点 (1) 指数函数的概念与图象详解	34
4.6	知识点 (2) 指数函数的单调性与值域详解	35
4.7	例题详解	36
4.8	知识点 (1) 对数的概念与指对互化详解	36
4.9	知识点 (2) 对数运算性质与换底公式详解	36
4.10	例题详解	37
4.11	知识点 (1) 对数函数的概念与求值详解	37
4.12	知识点 (2) 对数函数的单调性 (比较大小与解不等式) 详解	38
4.13	知识点 (3) 对数型复合函数与情境应用详解	38
4.14	例题详解	39
4.15	知识点 (1) 函数的零点与二分法详解	40
4.16	知识点 (2) 指数对数增长模型详解	40
第五章	三角函数	43
5.1	例题详解	43
5.2	知识点 (1) 任意角与弧度制详解	43
5.3	知识点 (2) 弧长与扇形面积 (文化情境) 详解	44
5.4	例题详解	44
5.5	知识点 (1) 任意角三角函数的定义详解	44
5.6	知识点 (2) 同角三角函数的基本关系详解	45

5.7	例题详解	45
5.8	知识点 (1) 诱导公式与求值化简详解	46
5.9	例题详解	46
5.10	知识点 (1) 周期、值域与单调性详解	47
5.11	知识点 (2) 零点与极值点的个数 (新高考趋势) 详解	48
5.12	例题详解	49
5.13	知识点 (1) 两角和与差、二倍角公式详解	50
5.14	知识点 (2) 辅助角公式详解	50
5.15	例题详解	51
5.16	知识点 (1) 参数 A 、 ω 、 φ 的意义详解	51
5.17	知识点 (2) 图象变换详解	51
5.18	例题详解	52
5.19	知识点 (1) 三角函数模型的实际应用详解	52
第六章	数列	55
6.1	例题详解	55
6.2	知识点 (1) 数列的概念与通项公式详解	55
6.3	知识点 (2) 由前 n 项和求通项详解	56
6.4	知识点 (3) 递推公式与情境应用详解	57
6.5	例题详解	57
6.6	知识点 (1) 通项公式与基本量详解	58
6.7	知识点 (2) 等差中项与下标和性质详解	58
6.8	知识点 (3) 前 n 项和与充要条件详解	59
6.9	例题详解	60
6.10	知识点 (1) 等比数列的通项与等比中项详解	60
6.11	知识点 (2) 等比数列的前 n 项和详解	61
6.12	知识点 (3) 裂项相消与错位相减详解	62
6.13	例题详解	64
6.14	知识点 (1) 数学归纳法的原理与基本应用详解	65
6.15	知识点 (2) 数学归纳法与不等式详解	65
第七章	一元函数的导数及其应用	69
7.1	例题详解	69

7.2	知识点 (1) 平均变化率与瞬时变化率详解	69
7.3	知识点 (2) 导数的几何意义与切线详解	70
7.4	例题详解	71
7.5	知识点 (1) 导数的四则运算法则详解	72
7.6	知识点 (2) 复合函数的导数详解	72
7.7	例题详解	73
7.8	知识点 (1) 导数与函数的单调性详解	73
7.9	知识点 (2) 函数的极值详解	74
7.10	知识点 (3) 含参讨论与隐零点详解	75
7.11	例题详解	76
7.12	知识点 (1) 闭区间上的最值详解	77
7.13	知识点 (2) 最优化建模详解	78

第八章	卷末综合检测	81
------------	---------------	-----------

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 例题详解

例题 1.1 解析

思考路径：判断“能否组成集合”只有一个标准——检验标准是否明确。能明确回答“属于不属于”的，就是集合；否则不是。表示时元素少用列举法，元素多且特征明显用描述法。

规范解：(1) 能。解方程 $(x-3)(x+1)=0$ ，得 $x=3$ 或 $x=-1$ ，用列举法表示为 $\{-1, 3\}$ 。(2) 不能。“优秀”标准不明确——考多少分算优秀？无法对每位同学给出确定的回答，违背确定性。(3) 能。大于 1 且小于 10 的偶数是 2, 4, 6, 8，即 $\{2, 4, 6, 8\}$ 。

易错点：(1) 中别把“解集”与“根”混写， $\{-1, 3\}$ 与 $x=-1, 3$ 是两回事；(2) 判断的标准是“标准是否明确”，与对象多少无关。

1.2 知识点 (1) 集合的概念与表示详解

A1. C。

思路：判断标准是否明确，能否对任一对象确定回答“属于不属于”。

解析：A 中“个子高”没有统一标准；B 中“接近 0”界限模糊；D 中“比较大”同样模糊；C 中方程 $x^2=9$ 的解明确为 $x=\pm 3$ ，能组成集合 $\{-3, 3\}$ 。

A2. A。

思路：先确定 x 是正整数，再找平方小于 20 的正整数。

解析： $x \in \mathbb{N}^*$ 且 $x^2 < 20$ 。 $4^2 = 16 < 20$ ， $5^2 = 25 > 20$ ，故 $x = 1, 2, 3, 4$ ，即 $\{1, 2, 3, 4\}$ 。**易错点：**C 把 0 也算进去了，但 $\mathbb{N}^*$ 是正整数集不含 0。

A3. B。

思路： $x \in \mathbb{N}$ 含 0，逐一代入验证 $x^2 < 10$ 。

解析： $0^2 = 0$ ， $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ， $3^2 = 9$ 均小于 10， $4^2 = 16 > 10$ ，故 $x = 0, 1, 2, 3$ ，即 $\{0, 1, 2, 3\}$ 。

易错点： $\mathbb{N}$ 含 0 是本题唯一陷阱——选 A 就漏了 0。

A4. C。

思路：逐个核对 $\mathbb{N}^*$ （正整数）、 $\mathbb{Q}$ （有理数）、 $\mathbb{R}$ （实数）、 $\mathbb{N}$ （自然数含 0）的含义。

解析：A 错，0 不是正整数；B 错， π 是无理数不在有理数集；C 对， $\sqrt{2}$ 是实数；D 错，-1 是负整数，不在自然数集 $\mathbb{N} (\{0, 1, 2, \dots\})$ 中。

1.3 例题详解

例题 1.2 解析

思考路径： $B \subseteq A$ 有两种可能—— $B = \emptyset$ 或 B 非空且元素落在 A 内。 B 由方程 $ax - 2 = 0$ 决定，先检 $B = \emptyset$ （一次项系数 $a = 0$ ），再检 B 为单点集的情形。

规范解： $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$ 。(1) $B = \emptyset$ ： $a = 0$ 时方程 $0 \cdot x - 2 = 0$ 无解， $B = \emptyset \subseteq A$ ，符合；(2) $B \neq \emptyset$ ： $a \neq 0$ 时 $B = \left\{\frac{2}{a}\right\}$ ，需 $\frac{2}{a} \in \{1, 2\}$ ，即 $a = 2$ 或 $a = 1$ 。综上， a 的取值集合为 $\{0, 1, 2\}$ 。

易错点：最容易漏掉的是 $a = 0$ 时 $B = \emptyset$ 的情形——“一次方程必有解”的直觉在 $a = 0$ 时失效。含参子集题第一刀永远是“ $B = \emptyset$ 行不行”。

1.4 知识点 (1) 子集与真子集详解

A5. C。

思路：区分“ $\in$ （元素与集合）”与“ $\subseteq$ （集合与集合）”，并记住空集的性质。

解析：A 错，1 是元素，应写 $1 \in A$ ；B 错， $\{1\}$ 是集合，应写 $\{1\} \subseteq A$ ；C 对，空集是任何集合的子集；D 错， $\{1, 2\}$ 是集合，应写 $\{1, 2\} \subseteq A$ 。

A6. B。

思路： n 元集合有 2^n 个子集，真子集 $2^n - 1$ 个。

解析： A 有 2 个元素，子集 $2^2 = 4$ 个，真子集 $4 - 1 = 3$ 个（ $\emptyset$ 、 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ ）。**易错点：**真子集要减去集合本身，不是减去空集。

A7. C。

思路：含元素 a 的子集 = 其余元素任意搭配，把 a 固定， $\{b, c\}$ 的每个子集并上 $\{a\}$ 。

解析： $\{b, c\}$ 有 $2^2 = 4$ 个子集，分别并上 $\{a\}$ 得 $\{a\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{a, b, c\}$ ，共 4 个。也可理解：固定 a 必选， b 、 c 各自“选 / 不选”两种状态，共 $2^2 = 4$ 。

A8. A。

思路： $A \subseteq B$ 翻译成数轴上 $[-2, 3]$ 完整落在 $(-\infty, a]$ 内。

解析：需 $a \geq 3$ ，即 $B = (-\infty, a]$ 覆盖 A 的最右端 3。答案 A。**易错点：**端点 $a = 3$ 时 $3 \in B$ ，成立，要取等。

B1. (2023 · 新课标 II 卷 · T2) B。

思路： $0 \in A \subseteq B$ ，所以 0 必须是 B 的元素——“ B 里谁等于 0”，分两种可能代入检验。

解析：由 $0 \in B$: (1) $a - 2 = 0$, 得 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, 但 $-2 \notin B$, $A \not\subseteq B$, 舍; (2) $2a - 2 = 0$, 得 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, $A \subseteq B$ 成立。答案 B。

易错点：求出 a 后必须代回检验——“ $0 \in B$ ”只是必要条件，还要验证 $-a$ 是否也在 B 中。

M1. B。

思路： $B \subseteq A = \{1\}$ 有两种可能—— $B = \emptyset$ 或 $B = \{1\}$ ，**先检空集**。

解析： B 是方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的解集。(1) $B = \emptyset$: $\Delta = 4a^2 - 4 < 0$, 得 $-1 < a < 1$; (2) $B = \{1\}$: 方程有且只有根 $x = 1$ (二重根), 需 $\Delta = 0$ 且 $1 - 2a + 1 = 0$, 得 $a = 1$, 此时 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的根为 1 (二重), 符合; (3) $B = \{-1\}$ 是否可能? $a = -1$ 时方程为 $x^2 + 2x + 1 = 0$, 根为 $-1 \notin A$, 舍去。综上 $-1 < a \leq 1$ 。答案 B。

为什么错：选 D ($a = 1$) 或 A ($a > 0$) 的同学，只解了“方程有根且根等于 1”的情形，**漏掉了 $B = \emptyset$ ($\Delta < 0$) 也满足 $B \subseteq A$** 。教材例题几乎不出现空集，于是默认“ B 至少有一个元素”——这正是空集漏检的根源。记住：含参子集题，先问一句“这个集合会不会是空集”。

M2. C。

思路：三个公式 2^n 、 $2^n - 1$ 、 $2^n - 2$ 别记串，逐个反推。

解析：A 错， $A = \{1, 2, 3\}$ 有 $2^3 - 1 = 7$ 个真子集。B 错， $2^n = 16$ 得 $n = 4$, 不是 5。C 对， $2^n - 1 = 15$ 得 $n = 4$ 。D 错，非空真子集 $2^n - 2$, 真子集 $2^n - 1$, 前者比后者少 1 个。

为什么错：三个公式长相接近，靠死记必混。推导一遍就不会错：每个元素“选 / 不选”两种状态，得 2^n 个子集；减去空集得真子集 $2^n - 1$ ；再减去集合本身得非空真子集 $2^n - 2$ 。D 选项专门打击“非空真子集比真子集多”的错觉——要数清“空集”和“本身”这两个特殊子集。

1.5 例题详解

例题 1.3 解析

思考路径：先写出全集 $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ ，再逐项运算。交集找公共元素，并集合并去重，补集先明确全集。

规范解：(1) $A \cap B = \{3, 5, 7\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 。(2) $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; 先算 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ ，再取补集 $\complement_U(A \cup B) = \{4, 6, 8, 10\}$ 。

易错点：求 $\complement_U(A \cup B)$ 要先算括号内的并集再补，不要和 $\complement_U A \cup \complement_U B$ (那是德摩根律的另一边) 混淆；此题中两者恰好不同 ($\{4, 6, 8, 10\}$ 对 $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$)，可见次序不能乱。

1.6 知识点 (1) 交集与并集详解

A9. A。

思路：交集取公共元素，并集合并去重。

解析： $A \cap B = \{2, 4\}$ ； $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ （重复的 2, 4 只写一次）。

A10. A。

思路：区间求交，画数轴。

解析： $A = (-1, 3)$ ， $B = [0, +\infty)$ ，交集 $[0, 3)$ ，即 $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ 。**易错点：** $x = 0 \in B$ 且 $0 \in A$ ，左端取闭； $x = 3 \notin A$ ，右端取开。

A11. A。

思路：容斥原理——至少爱好一科 = 数学 + 物理 - 两样都爱好。

解析： $30 + 25 - 18 = 37$ （人）。**易错点：**别把两样都爱好的 18 人重复加两次。

B2. (2024 · 新高考 I 卷 · T1) A。

思路： B 只有 5 个元素，逐个代入 A 的条件 $-5 < x^3 < 5$ 验证即可。

解析： $(-3)^3 = -27 < -5$ ，不合； $(-1)^3 = -1$ ，满足； $0^3 = 0$ ，满足； $2^3 = 8 > 5$ ，不合； $3^3 = 27$ ，不合。故 $A \cap B = \{-1, 0\}$ 。答案 A。

易错点：也可用 $\sqrt[3]{5} \approx 1.71$ 估算 A 中整数的范围，但逐个代入最稳，避免漏判。

1.7 知识点 (2) 补集与德摩根律详解

A12. A。

思路：补集是全集 U 中不在 A 里的元素。

解析： $\complement_U A = \{1, 3, 5\}$ 。**易错点：**B 把全集当成了含 7 的更大集合；做补集前先圈出全集 U 。

A13. A。

思路：先圈全集，再逐一排除属于 A 的元素。

解析： U 中不在 $\{2, 4\}$ 里的元素为 1, 3, 5, 6，故 $\complement_U A = \{1, 3, 5, 6\}$ 。**易错点：** $6 \in U$ 且 $6 \notin A$ ，别漏掉（选 B 就漏了 6）。

A14. A。

思路：德摩根律 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$ ，先算并集再补。

解析： $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $\complement_U (A \cup B) = \{6\}$ 。答案 A。

易错点：直接算两个补集再交集也可以，但用德摩根更快；注意 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 是正整数 1 到 6，不是实数集。

A15. A。

思路：混合运算按括号顺序——先并后补。

解析： $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，在 $U = \{1, \dots, 6\}$ 中的补集为 $\{6\}$ 。答案 A。**易错点：**6 没被任何集合覆盖，恰好留在补集里；漏算 U 的边界元素是此类题常见丢分点。

A16. B。

思路：两集合容斥的变式——参加至少一个 = 两堆相加减重叠；都没参加 = 总数 - 至少参加一个。

解析：参加至少一个社团的有 $22 + 18 - 10 = 30$ (人)，都没参加的有 $40 - 30 = 10$ (人)。答案 B。

B3. (2022 · 全国乙卷理 · T1) A。

思路：补集相对全集—— $\complement_U M = \{1, 3\}$ 说明 1, 3 不在 M 中，其余元素都在 M 中。

解析： $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，补集 $\{1, 3\}$ 以外的元素是 2, 4, 5，故 $M = \{2, 4, 5\}$ 。 $2 \in M$ 正确，A 对； $3 \notin M$ (B 错)、 $4 \in M$ (C 错)、 $5 \in M$ (D 错)。答案 A。

易错点：把“补集”与“集合本身”搞反是本题唯一陷阱—— $\complement_U M$ 是“不在 M 里的”， M 恰恰是剩下的 2, 4, 5。

B4. (2022 · 全国甲卷理 · T3) D。

思路：先解一元二次方程写出 B ，再并集、补集按序运算。

解析： $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$ ，得 $B = \{1, 3\}$ 。 $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$ 。在 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中取补集，剩 $\{-2, 0\}$ 。答案 D。

易错点：(1) 别把 B 解错 (根是 1, 3 不是 $-1, -3$)；(2) 补集是相对 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 的， U 比并集多了 $-2, 0$ 两个元素。

M3. A。

思路：补集必须“相对于全集 U ”——先抄全集，再逐一排除属于 A 的元素。

解析： $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ， U 中不在 A 里的是 2, 4，故 $\complement_U A = \{2, 4\}$ 。

为什么错：选 C 的同学把全集当成了 $\mathbb{R}$ 或更大的集合，把不在 A 里的 6 也补了进来——补集不是“剩下什么”说了算，而是“相对于全集剩下什么”说了算，全集换了补集立刻变脸；选 D 的同学求的其实是 $A \cup (\complement_U A) = U$ 全集本身，不是补集。做题第一步永远先圈出全集 U 。

C1. (图书馆查书系统)

思路：把图书检索语言翻译成集合语言；两集合并集用容斥原理；“数学类中不含两者”就是 C 去掉 $A \cup B$ 的部分。

规范解：(1) 书名同时含两个关键词，是交集： $A \cap B$ 。(2) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 80 - 15 = 185$ (本)。(3) $A \cup B \subseteq C$ ，故 $C \setminus (A \cup B)$ 的元素个数为 $|C| - |A \cup B| = 2000 - 185 = 1815$ (本)。

验算：两关键词至少含其一的书恰 185 本；数学类 2000 本全部覆盖这 185 本后，剩余 1815 本书名不含任一关键词，数据自洽。

C2. (选科组合)

思路：三集合容斥原理： $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ 。

规范解：(1) $|A \cup B \cup C| = 320 + 280 + 180 - 160 - 80 - 60 + 30 = 510$ (人)。(2) 三门都没

选: $|U| - |A \cup B \cup C| = 600 - 510 = 90$ (人)。

验算: $320 + 280 + 180 = 780$, $780 - 160 - 80 - 60 = 480$, $480 + 30 = 510$, 成立; $600 - 510 = 90$, 成立。重叠部分只该减一次、三叠区加回一次, 是容斥最容易出错的地方。

1.8 例题详解

例题 1.4 解析

思考路径: 判断“ p 是 q 的什么条件”, 就做两件事——试 $p \Rightarrow q$, 再试 $q \Rightarrow p$ 。找反例是判断“推不出”的武器。

规范解: (1) p 的解集 $P = (2, +\infty)$, q 的解集 $Q = (1, +\infty)$, $P \subsetneq Q$ 。 $x > 2 \Rightarrow x > 1$, 但 $x > 1 \nRightarrow x > 2$ (如 $x = 1.5$)。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。(2) $P = \{-2, 2\}$, $Q = \{2\}$ 。 $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, 但 $x^2 = 4 \nRightarrow x = 2$ (x 可能为 -2)。故 p 是 q 的**必要不充分条件**。(3) 菱形 $\Rightarrow$ 平行四边形 (菱形是特殊的平行四边形), 但平行四边形 $\nRightarrow$ 菱形 (矩形反例)。故 p 是 q 的**充分不必要条件**。

易错点: (2) 是最典型的陷阱—— p 的解集比 q 大, p 反而是“必要”? 答案恰恰如此: $Q \subsetneq P$ 时 $q \Rightarrow p$, p 是 q 的必要条件。别凭直觉, 画数轴标集合, 箭头从大集合方向反推。

1.9 知识点 (1) 充分条件、必要条件与充要条件详解

A17. A。

思路: 集合包含法。 $P = \{x \mid x > 3\}$, $Q = \{x \mid x > 1\}$, $P \subsetneq Q$ 。

解析: $x > 3 \Rightarrow x > 1$; $x > 1 \nRightarrow x > 3$ ($x = 2$ 即反例)。故充分不必要。

A18. B。

思路: p 的解集 $\{-3, 3\}$, q 的解集 $\{3\}$, 后者真包含于前者。

解析: $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$; $x^2 = 9 \nRightarrow x = 3$ (x 可能为 -3)。故 p 是 q 的必要不充分条件。易错

点: 又是“解集大的当必要”—— $q \Rightarrow p$ 成立才是必要。

A19. B。

思路: $ab = 0$ 推不出 $a = 0$ (可能 $b = 0$); $a = 0$ 必推出 $ab = 0$ 。

解析: $q \Rightarrow p$ 成立, $p \Rightarrow q$ 不成立 (取 $a = 1, b = 0$ 反例)。故 p 是 q 的必要不充分条件。易

错点: $ab = 0$ 是“或”结构—— $a = 0$ 或 $b = 0$, 范围比 $a = 0$ 大, “或”把解集撑大了。

A20. A。

思路: $P \subseteq Q$ 时, 小集合 P 对应充分条件。

解析: $P = (-\infty, 3) \subsetneq Q = (-\infty, 5)$ 。 $x \in P \Rightarrow x \in Q$; $x \in Q \nRightarrow x \in P$ (如 $x = 4$)。故“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件。

B5. (2023 · 天津卷 · T2) B。

思路：两个等式都变形到最简： $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$ ； $a^2 + b^2 = 2ab \iff (a - b)^2 = 0 \iff a = b$ 。再看谁推得出谁。

解析：充分性： $a = -b \neq 0$ 时 $a^2 = b^2$ 成立，但 $a^2 + b^2 = 2b^2$ ， $2ab = -2b^2$ ，两者不等，故 $a^2 = b^2 \not\Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab$ ，充分性不成立。必要性： $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ，成立。故是**必要不充分**条件。答案 B。

易错点： $a^2 = b^2$ 推出的是 $a = \pm b$ ，不能只写 $a = b$ ；反之 $a = b$ 才能推出 $a^2 = b^2$ ——方向判断用“等价变形”最可靠。

M4. A。

思路：三连问专打“方向搞反”与“小集合大集合对应记反”。每一问都画数轴，标出集合，再定箭头。

解析：(1) $P = (2, +\infty) \subsetneq Q = (1, +\infty)$ ， $p \Rightarrow q$ 而 $q \not\Rightarrow p$ ， p 是 q 的**充分不必要**条件；(2) $x > 1 \not\Rightarrow x > 2$ ($x = 1.5$)， $x > 2 \Rightarrow x > 1$ ， p 是 q 的**必要不充分**条件；(3) $P \subseteq Q$ 时， $x \in P \Rightarrow x \in Q$ 而反推不成立 (Q 中有元素不在 P)，“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的**充分不必要**条件。答案 A。

为什么错：选 B、C 的同学把“充分”和“必要”的箭头方向记反——口诀“小充分大必要”没落地成箭头。记住两句话： $P \subseteq Q$ 时， P 对应的是**充分条件**， Q 对应的是**必要条件**；主语一换（问“ q 是 p 的什么条件”），立刻反转，逐字写箭头最稳。

1.10 例题详解

例题 1.5 解析

思考路径：命题的否定是“反转双面牌”——量词翻面 ($\forall$ 变 $\exists$ 、 $\exists$ 变 $\forall$)，结论也翻面（不等号、等号都要反过来），缺一不可。原命题与否定真假相反，可用来验证。

规范解：(1) 原命题 $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 \geq 0$ 是真命题（任何实数的平方非负）。否定： $\exists x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 < 0$ ，为假命题——验证：原真、否定假，一真一假吻合。(2) 原命题 $\exists x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 = 2$ 是真命题 ($x = \pm\sqrt{2}$)。否定： $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 \neq 2$ ，为假命题。

易错点：否定时两个动作要同时做——只换量词不改结论（如写成 $\exists x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 \geq 0$ ）或只改结论不换量词（如写成 $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $x^2 < 0$ ）都错。用“一真一假”验一遍最稳。

1.11 知识点 (1) 全称量词与存在量词详解

A21. C。

思路：全称命题找反例，存在命题找实例。

解析：A 假，取 $x = 0$ ， $0^2 = 0$ 不大于 0。B 假， $x^2 + 1 \geq 1$ ，不可能等于 0。C 真，任何实数的绝对值非负。D 假，自然数都是非负数，不存在 $x < 0$ 。

A22. B。

思路：量词与结论同时翻面—— $\forall$ 变 $\exists$, $>$ 变 $\leq$ 。

解析： $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0) \iff \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ 。答案 B。

易错点：A 只改结论没换量词 ($\forall$ 没变成 $\exists$)；“ $>$ ”的否定是“ $\leq$ ”，不是“ $<$ ”也不是“ $=$ ”。

B6. (2024 · 新课标 II 卷 · T2) B。

思路：分别判断 p 、 q 的真假，再按“原命题与否定一真一假”推出 $\neg p$ 、 $\neg q$ 的真假。

解析： p 假——取 $x = -1$, $|-1 + 1| = 0 \leq 1$, 找到反例； q 真——取 $x = 1 > 0$, $1^3 = 1$ 成立。故 $\neg p$ 真、 q 真。答案 B。

易错点：判断含量词命题真假时，全称找反例、存在找实例，方向别弄反； $|x + 1| > 1$ 的解是 $x > 0$ 或 $x < -2$ ，显然 $\mathbb{R}$ 上不是恒成立。原卷选项顺序：A. 两者都真；B. $\neg p$ 与 q 真；C. p 与 $\neg q$ 真；D. $\neg p$ 与 $\neg q$ 真——选 B。

M5. A。

思路：否定是“反转双面牌”——量词翻面 ($\exists$ 变 $\forall$)，结论也翻面 ($x^2 < 1$ 变 $x^2 \geq 1$)，缺一不可。

解析： $\neg(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1) \iff \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ 。答案 A。

为什么错：选 B 的同学只改了结论、**忘了换量词** ($\exists$ 没变成 $\forall$)；选 C 的同学只换量词、**忘了否结论** ($<$ 没变成 $\geq$)。“所有”和“有的”一字之差，承诺范围完全不同。用“一真一假”验证：原命题真 ($x = 0$ 时 $0 < 1$)，否定应假；而“ $\forall x, x^2 \geq 1$ ”确实假 ($x = 0$ 时 $0 < 1$)，两边对得上。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：先解一元二次不等式得到 A ； $B \subseteq A$ 分两步——**先检** $B = \emptyset$ ($a > 2a - 1$)，再检非空情形端点同时落进 A ；子集个数用 2^n 公式。

规范解：(1) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) \leq 0$ ，故 $A = [2, 3]$ 。(2) (1) $B = \emptyset$ ： $a > 2a - 1$ ，即 $a < 1$ ；(2) $B \neq \emptyset$ ： $a \leq 2a - 1$ ，即 $a \geq 1$ 。此时 $B \subseteq [2, 3]$ 需 $a \geq 2$ 且 $2a - 1 \leq 3$ ，即 $a \geq 2$ 且 $a \leq 2$ ，得 $a = 2$ (此时 $B = [2, 3] = A$ ，子集要求允许相等)。综合： $a < 1$ 或 $a = 2$ 。(3) A 有 2 个元素，子集 $2^2 = 4$ 个，真子集 $4 - 1 = 3$ 个。

易错点：第 (2) 问若漏掉 $B = \emptyset$ ($a < 1$)，答案只剩 $a = 2$ ，直接丢一半分数——这就是空集漏检 (M1) 的实战化。另外 $a = 2$ 时 $B = A$ ，属于“ $B \subseteq A$ ”，不要因为“看起来太满”而舍掉。

S2 解析

思考路径： p 是 q 的充分不必要条件 $\Rightarrow p$ 的解集 A 真包含于 q 的解集 B 。画数轴，让 $A = [1, 3]$ 完整落在开区间 $B = (m, m + 4)$ 内部。

规范解： $A = [1, 3]$, $B = (m, m + 4)$ 。需 $A \subsetneq B$ ：1 严格在 B 内) 且 $3 < m + 4$ (右端点 3 严格在 B 内)，即 $m < 1$ 且 $m > -1$ ，得 $-1 < m < 1$ 。真包含性自动满足 (B

是开区间且比 A 宽), 无需再验。

检验: $m = 0$ 时 $B = (0, 4)$, $[1, 3] \subsetneq (0, 4)$, 成立; $m = 1$ 时 $B = (1, 5)$, $1 \notin B$, $A \not\subset B$, 不成立; $m = -1$ 时 $B = (-1, 3)$, $3 \notin B$, $A \not\subset B$, 不成立。故 $-1 < m < 1$ 。

易错点: $A = [1, 3]$ 是闭区间, 端点 $1, 3$ 必须在 B 内部, 所以两个不等式都是严格不等号; $m = 1$ 与 $m = -1$ 恰好让端点顶到开区间边界, 要排除。

S3 解析

思考路径: p 是全称命题, x^2 在 $[1, 2]$ 上的最小值是 1 ; q 是存在命题, 找“见证者”即可。把“ p 真 / q 真”分别翻译成 a 的不等式, 再组合“一真一假”。

规范解: (1) $\neg p$: $\exists x \in [1, 2], x^2 - a < 0$ 。(2) p 真: 对一切 $x \in [1, 2], a \leq x^2$ 。 $x^2 \in [1, 4]$, 最小值是 1 , 故 $a \leq 1$ 。(3) q 真: 存在 $x \in [1, 2], a \geq x^2$ 。只需 $a \geq \min_{x \in [1, 2]} x^2 = 1$, 故 q 真 $\Leftrightarrow a \geq 1$ 。于是 p 真 $\Leftrightarrow a \leq 1$, q 假 $\Leftrightarrow a < 1$; p 假 $\Leftrightarrow a > 1$, q 真 $\Leftrightarrow a \geq 1$ 。一真一假: p 真且 q 假 $\Rightarrow a \leq 1$ 且 $a < 1$, 即 $a < 1$; p 假且 q 真 $\Rightarrow a > 1$ 且 $a \geq 1$, 即 $a > 1$ 。综合得 $a \neq 1$ 。

易错点: $a = 1$ 时 p 真 ($x^2 \geq 1 = a$) 且 q 真 ($x = 1$ 时 $1 - 1 = 0 \leq 0$), 两真, 不在“一真一假”里, 务必排除端点。存在命题的“见证者”不必全部验证, 只需确认 $x = 1$ 这个实例。

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 例题详解

例题 2.1 解析

思考路径：作差法三步——作差、变形（配方或展开）、定号。能配成完全平方，符号一眼看出。

规范解：（1）作差：

$$x^2 + 4 - 4x = (x - 2)^2 \geq 0$$

故 $x^2 + 4 \geq 4x$ ，等号当且仅当 $x = 2$ 时成立。（2）作差：

$$(x + 1)(x + 3) - (x + 2)^2 = (x^2 + 4x + 3) - (x^2 + 4x + 4) = -1 < 0$$

故 $(x + 1)(x + 3) < (x + 2)^2$ ，对一切实数恒成立。

易错点：（1）等号成立条件别漏——“ $\geq$ ”必须交代何时取等；展开（2）时 $x^2 + 4x$ 两项抵消，剩下 -1 ，要写完整不跳步。

2.2 知识点（1）不等式的性质与比较大小详解

A1. B。

思路：逐条对照不等式性质，特别注意“乘除看符号”。

解析：A 错， $c > 0$ 乘过去方向不变，应为 $ac > bc$ ；B 对，加法性质，两边同加 c 方向不变；C 错， $c > 0$ 除过去方向不变，应为 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ；D 错，两边同乘 $-c < 0$ 要反向，应为 $-ac < -bc$ 。

A2. $x^2 + 3 \geq 2x + 2$ ，等号当 $x = 1$ 时成立。

思路：作差、配方、定号三步走。

解析：作差

$$x^2 + 3 - (2x + 2) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

故 $x^2 + 3 \geq 2x + 2$ ，等号当且仅当 $x = 1$ 时成立。**易错点：**最后要写清“等号何时成立”，这是“ $\geq$ ”题型的必答项。

A3. D。

思路： $a < b < 0$ 说明两数同为负。凡结论涉及平方、绝对值、取倒数的，都要先验符号前提。

解析：取 $a = -2$, $b = -1$ 代入检验：A 中 $a^2 = 4 > b^2 = 1$ ，错；B 中 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} > -1 = \frac{1}{b}$ ，错（倒过来反而大）；C 中 $|a| = 2 > 1 = |b|$ ，错；D 中 $(-2)^3 = -8 < -1 = (-1)^3$ ，且 $y = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增， $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$ ，对。答案 D。

A4. C。

思路：加法性质不受 c 的符号影响；乘法、除法、加负号都受 c 符号影响。

解析：A 错， $c < 0$ 乘过去方向反转，应为 $ac < bc$ ；B 错，同理应为 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ；C 对，两边同加 c 方向不变；D 错， $-c > 0$ ， $-ac < -bc$ 。答案 C。**易错点：** $a + c > b + c$ 与 c 的正负无关，别把加法性质也“一刀切”地认为要反向。

A5. A。

思路：“同向可乘”的前提是两个不等式都是正数。

解析： $a > b > 0$ 且 $c > d > 0$ ，两式相乘得 $ac > bd$ 。B 反了；C、D 把 c 、 d 交叉或取倒数，失去“同向正数可乘”的保障，未必成立。答案 A。

B1. (2022 · 新高考 II 卷 · T12, 多选) BC。

思路：多选判断，先用 $x^2 + y^2 = 1 + xy$ 把目标式统一到 xy ，再估计 xy 的范围。

解析：由 $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ 及 $x^2 + y^2 = 1 + xy$ ：

- 若 $xy \geq 0$ ： $1 + xy \geq 2xy$ ，得 $xy \leq 1$ ；
- 若 $xy < 0$ ： $1 + xy \geq -2xy$ ，得 $xy \geq -\frac{1}{3}$ 。

故 $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$ 。

A 假：取 $x = y = 1$ ， $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，但 $x + y = 2 > 1$ 。B 真： $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 3xy \leq 1 + 3 = 4$ ，故 $x + y \leq 2$ 。C 真： $x^2 + y^2 = 1 + xy \leq 1 + 1 = 2$ 。D 假：取 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ， $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，则 $x^2 + y^2 - xy = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ，但 $x^2 + y^2 = \frac{2}{3} < 1$ 。答案 BC。

易错点：判断不等式是否恒成立，必须**举反例**而不是靠直觉；D 的反例 $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ 说明 $x^2 + y^2$ 的下界其实是 $\frac{2}{3}$ 而非 1。

M1. C。

思路： $a > b$ 只是一个大小关系，没有给出符号信息。凡是要“平方、绝对值、取倒数”的结论，都需要额外前提，逐一举反例。

解析：A 假， $a = 1$ ， $b = -2$ ： $1 > -2$ 但 $1 < 4$ 。B 假，同上， $|1| < |-2|$ 。C 真， $y = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增， $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$ 恒成立。D 假， $a = 2$ ， $b = -1$ ： $2 > -1$ 但 $\frac{1}{2} > -1$ ， $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立——倒数法则要求同号 ($ab > 0$)。

为什么错：A、B 的陷阱是“凭正数直觉就平方/取绝对值”，忘了 $a^2 > b^2$ 、 $|a| > |b|$ 需要 $a > b \geq 0$ 的前提；D 的陷阱是“倒过来就小”，忘了**只有同号才可倒数**。 $a > b$ 本身不含符号信息，凡结论需要符号前提，就举反例。

2.3 例题详解

例题 2.2 解析

思考路径： $x + \frac{4}{x-1}$ 的两项积不是定值，直接套基本不等式没用。先把 x 拆成 $(x-1) + 1$ ，凑出 $(x-1)$ 与 $\frac{4}{x-1}$ 互为倒数的定积。

规范解：因为 $x > 1$ ，所以 $x-1 > 0$ 。配凑：

$$x + \frac{4}{x-1} = (x-1) + \frac{4}{x-1} + 1$$

一正： $x-1 > 0$ ， $\frac{4}{x-1} > 0$ ，成立；二定： $(x-1) \cdot \frac{4}{x-1} = 4$ 为定值，成立。由基本不等式：

$$(x-1) + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$$

三相等： $x-1 = \frac{4}{x-1}$ ，即 $(x-1)^2 = 4$ ， $x-1 = 2$ （正）， $x = 3 \in (1, +\infty)$ 可取等。故 $x + \frac{4}{x-1} \geq 4 + 1 = 5$ ，当 $x = 3$ 时取得最小值 5。

易错点：配凑时别丢掉尾部的 +1；取等条件要代回检验是否在定义域内—— $x = 3 > 1$ ，成立，这里取得到，若取不到就要改判端点（见 M3）。

2.4 知识点 (1) 基本不等式及其应用详解

A6. B。

思路： $x > 0$ ， x 与 $\frac{9}{x}$ 积为定值 9。

解析： $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6$ ，等号当 $x = \frac{9}{x}$ ，即 $x = 3$ 时成立。最小值 6。

A7. A。

思路： x 与 $2y$ 的和为定值 10，积 $2xy$ 有最大值。

解析： $2xy \leq \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = 25$ ，故 $xy \leq \frac{25}{2}$ 。等号当 $x = 2y = 5$ ，即 $x = 5$ ， $y = \frac{5}{2}$ 时成立。

最大值为 $\frac{25}{2}$ 。**易错点：**基本不等式直接给的是 $2xy \leq 25$ ，别把 xy 的最大值错写成 25—— $xy \leq \frac{25}{2}$ 。

A8. C。

思路：两项积为定值 $2x \cdot \frac{8}{x} = 16$ 。

解析： $2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{8}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$ ，等号当 $2x = \frac{8}{x}$ ，即 $x = 2 > 0$ 时成立。最小值 8。

A9. B。

思路：“和定积最大”—— $x + y = 4$ 为定值。

解析： $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ ，等号当 $x = y = 2$ 时成立。最大值 4。**易错点：**别写成 $\frac{S^2}{4}$ 还除以 2—— $S = 4$ 时 $\frac{S^2}{4} = 4$ ，答案就是 4。

B2. (2020 · 新高考 I 卷 · T11, 多选) ABD。

思路： $a + b = 1$ 先推 $ab \leq \frac{1}{4}$ ，再逐项用基本不等式与指数、对数的单调性验证。

解析： $a > 0, b > 0, a + b = 1$ ，由基本不等式 $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 得 $ab \leq \frac{1}{4}$ (等号当 $a = b = \frac{1}{2}$)。A: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \geq 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ，正确。B: $a - b = a - (1 - a) = 2a - 1$ ，因 $0 < a < 1$ ，故 $-1 < a - b < 1$ ，而 $y = 2^x$ 递增， $2^{a-b} > 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ，正确。C: $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$ ，C 说“ ≥ -2 ”正好相反，错误。D: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$ ，故 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ ，正确。答案 ABD。

易错点：C 项 $\log_2(ab)$ 是“ ≤ -2 ”不是“ ≥ -2 ”—— $ab \leq \frac{1}{4}$ ，底数大于 1 的对数是增函数，所以 $\log_2(ab)$ 不超过 $\log_2 \frac{1}{4}$ ，方向别弄反。

M2. C。

思路： $x < 0$ 不满足“一正”，不能直接套 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。先对 $-x > 0$ 用基本不等式。

解析： $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $\frac{1}{-x} > 0$ ，且 $(-x) \cdot \frac{1}{-x} = 1$ 为定值。故

$$(-x) + \frac{1}{-x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{-x}} = 2$$

即 $-x - \frac{1}{x} \geq 2$ ，移项得 $x + \frac{1}{x} \leq -2$ 。等号当 $-x = \frac{1}{-x}$ ，即 $x = -1$ 时成立。所以 $x + \frac{1}{x}$ 有最大值 -2 。答案 C。

为什么错：选 A 的同学直接写 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ——但 $x < 0$ 时 $\sqrt{x}$ 无意义，基本不等式“一正”前提被踩掉，结论纯属虚构。事实上 $x < 0$ 时 $x + \frac{1}{x}$ 恒 ≤ -2 ($x \rightarrow 0^-$ 时趋向 $-\infty$ ，无最小值)，说它有最小值 2 或 -2 都错。**套基本不等式前先检查符号。**

M3. B。

思路：直接套基本不等式得下界 4，但等号条件 $x = 2$ 不在区间 $[3, 5]$ 内，“三相等”落空。此时改由单调性判断端点。

解析： $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增 (对勾函数，可用定义法验证：任取 $2 \leq x_1 < x_2$ ，作差 $y(x_1) - y(x_2) = (x_1 - x_2) \frac{x_1 x_2 - 4}{x_1 x_2} < 0$)。故在 $[3, 5]$ 上最小值在左端点：

$$y_{\min} = y(3) = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

答案 B。

为什么错：选 A 的同学只算了代数下界 4，没验证 $x = 2$ 是否在 $[3, 5]$ 内——等号取不到，4 就不是最小值。这是“三相等”的典型坑：算出“不小于 4”没错，但真正的最小值要落在区间端点。口诀永远要三步走完：一正、二定、三相等 (可取到吗)。

2.5 例题详解

例题 2.3 解析

思考路径：三个二次是一家。先令 $y = 0$ 求根，根把 x 轴切成区间；开口向上时“大于取两边、小于取中间”；开口向下先化正。

规范解：(1) 令 $y = 0$: $3x^2 - 8x + 4 = 0$, 因式分解 $(3x - 2)(x - 2) = 0$, 得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = 2$ 。
交点坐标为 $(\frac{2}{3}, 0)$ 和 $(2, 0)$ 。(2) $a = 3 > 0$, 开口向上, “小于取中间”:

$$3x^2 - 8x + 4 < 0 \iff \frac{2}{3} < x < 2$$

(3) 先化正: 两边同乘 -1 (不等号反向) 得 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 。因式分解 $(x - 3)(x + 1) \leq 0$, 开口向上, “小于取中间”:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$$

易错点：(3) 是 M4 的正面示范—— $a < 0$ 时先乘 -1 化正再套口诀, 方向别弄反; 检验端点: $x = -1$ 、 $x = 3$ 时 $-x^2 + 2x + 3 = 0$, 属于 ≥ 0 的解集, 应取闭区间。

2.6 知识点 (1) 三个二次与一元二次不等式详解

A10. A。

思路：因式分解, 开口向上, “小于取中间”。

解析： $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) < 0$, 得 $2 < x < 3$ 。

A11. A。

思路：因式分解, 求两根后按“大于取两边”。

解析： $3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1) > 0$, 两根 $\frac{1}{3}$ 、 1 , 开口向上, 得 $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$ 。

A12. A。

思路：配方找最小值, 或开口向上用 $\Delta < 0$ 。

解析：配方 $x^2 - 2x + a = (x - 1)^2 + (a - 1)$ 。 $(x - 1)^2 \geq 0$, 故最小值是 $a - 1$ (在 $x = 1$ 处)。
恒大于 0 需 $a - 1 > 0$, 即 $a > 1$ 。**易错点：** $a = 1$ 时在 $x = 1$ 处恰好等于 0, 不满足“恒大于 0”, 端点要舍。

A13. B。

思路：两个不等实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 。

解析： $\Delta = (-4)^2 - 4m = 16 - 4m > 0$, 得 $m < 4$ 。**易错点：** $\Delta = 0$ 是两个相等实根, 不算“两个不相等的实数根”。

A14. A。

思路：因式分解，开口向上，“大于取两边”。

解析： $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) \geq 0$ ，两根 -1 、 4 ，得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 4$ 。**易错点：** ≥ 0 包含端点， $x = -1$ 、 $x = 4$ 都要取到（闭区间）。

A15. A。

思路： $a = -1 < 0$ ，先乘 -1 化正，再套口诀。

解析：两边同乘 -1 得 $x^2 - 5x + 6 < 0$ ， $(x - 2)(x - 3) < 0$ ，得 $2 < x < 3$ 。答案 A。**易错点：**不化正直接“大于取两边”会得到 $x < 2$ 或 $x > 3$ （正好是原不等式解集的补集方向），验证 $x = 0$ 代入原式得 $-6 > 0$ 不成立即可排除。

A16. A。

思路：判别式与开口方向结合—— $\Delta < 0$ 且开口向上，函数恒正。

解析： $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ ， $a = 1 > 0$ 开口向上，故 $x^2 + 2x + 3$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒为正，解集为 $\mathbb{R}$ 。答案 A。**易错点：**别以为“无实根就没解”—— $\Delta < 0$ 时解集要么是 $\mathbb{R}$ （开口向上、恒正）要么是 $\emptyset$ （开口向下、恒负），看开口方向定。

A17. A。

思路：解集端点是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根，用韦达定理反求系数。

解析：解集 $\{x \mid -1 < x < 2\}$ 说明两根为 -1 、 2 ，故 $x^2 + bx + c = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$ ， $b = -1$ ， $c = -2$ ， $b + c = -3$ 。答案 A。

A18. A。

思路：令 $y = 0$ 求根，根就是与 x 轴交点的横坐标。

解析： $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$ ， $x = 3$ 或 -1 ，交点坐标为 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 。答案 A。**易错点：**交点是坐标对 $(x, 0)$ ，别只写横坐标丢了 0 。

A19. A。

思路：十字相乘分解，开口向上，“大于取两边”。

解析： $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) > 0$ ，两根 $-\frac{1}{2}$ 、 1 ，得 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ 。答案 A。

A20. B。

思路：解集端点对应两根，反求 a 、 b 。

解析：两根为 -2 、 1 ， $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ ，故 $a = 1$ ， $b = -2$ ， $a + b = -1$ 。答案 B。

A21. A。

思路：开口向上的二次不等式恒非负，需 $\Delta \leq 0$ 。

解析： $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ ，得 $-2 \leq a \leq 2$ 。答案 A。**易错点：** ≥ 0 恒成立允许函数与 x 轴相切（ $\Delta = 0$ ），端点 $a = \pm 2$ 要取到；只有“恒 > 0 才严格 $\Delta < 0$ ”。

B3. (2023 · 新课标 I 卷 · T1) C。

思路：先解一元二次不等式求出 N ，再与 M 求交集。可整体解，也可逐个代入 M 的元素验证。

解析： $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \geq 0$ ，得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$ ，故 $N = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ 。 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 中只有 -2 落在 N 内， $M \cap N = \{-2\}$ 。答案 C。

易错点：逐个代入验证更快—— $-1, 0, 1, 2$ 代入 $(x - 3)(x + 2)$ 均不满足 ≥ 0 ，只有 -2 满足。

B4. (2022 · 新高考 I 卷 · T1) D。

思路：分别解两个不等式表示出 M 、 N ，再取交集。

解析： $\sqrt{x} < 4$ 得 $0 \leq x < 16$ ， $M = [0, 16)$ ； $3x \geq 1$ 得 $x \geq \frac{1}{3}$ ， $N = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 。交集 $M \cap N = \left[\frac{1}{3}, 16\right)$ 。答案 D。

易错点： $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x \geq 0$ ， M 的左端点是 0 (含)，不是 $-\infty$ ——漏掉这一点的同学会选成 C 之类。

B5. (2022 · 新高考 II 卷 · T1) B。

思路：绝对值不等式 $|x - 1| \leq 1$ 等价于 $-1 \leq x - 1 \leq 1$ ，解出区间后再与 A 求交集。

解析： $|x - 1| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ ，即 $B = [0, 2]$ 。 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ 中落在 $[0, 2]$ 内的是 1, 2，故 $A \cap B = \{1, 2\}$ 。答案 B。

易错点： $x = 2$ 满足 $|2 - 1| = 1 \leq 1$ ，端点取到； $x = -1$ 与 $x = 4$ 都不在 $[0, 2]$ 内。

M4. B。

思路： $a = -1 < 0$ ，口诀“大于取两边”的前提不满足，先乘 -1 化正。

解析：两边同乘 -1 ： $x^2 - 2x - 3 < 0$ 。因式分解 $(x - 3)(x + 1) < 0$ ，开口向上，“小于取中间”：

$$-1 < x < 3$$

答案 B。

为什么错：选 A 的同学把“大于取两边”直接套在开口向下的不等式上，得出 $x < -1$ 或 $x > 3$ ——但这恰好是 $-x^2 + 2x + 3 < 0$ 的解。 $x = 0$ 代入原式得 $3 > 0$ ，说明 0 应在解集内，A 显然错。**口诀的前提是 $a > 0$ ；**开口向下先化正、变号，再套口诀。

M5. B。

思路： $kx^2 + kx + 2 > 0$ 恒成立，二次项系数含参数 k ——先讨论 $k = 0$ ，再讨论 $k \neq 0$ 。

解析：(1) $k = 0$ ：原式变为 $2 > 0$ ，对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，成立；(2) $k \neq 0$ ：需开口向上且与 x 轴无交点，即 $k > 0$ 且 $\Delta = k^2 - 8k < 0$ ，得 $0 < k < 8$ 。综合： $0 \leq k < 8$ 。答案 B。

为什么错：选 A 的同学只做了“二次”的讨论，**漏掉 $k = 0$ 这一刀**—— $k = 0$ 时不等式退化为一次 (常数) 不等式，照样恒成立。见到 $ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立，第一反应是“ a 会不会是 0”，这是含参恒成立问题最容易丢分的地方。

M6. 答案：(1) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4 > 0$ ，方程有两个不相等的实数根。(2) 错在 b^2 的写法： $b = -4$ 时 b^2 是“整个 b 的平方”，即 $(-4)^2 = 16$ ，不能写成 $-4^2 = -16$ 。

思路： Δ 计算最容易错的是 b^2 —— b 带负号时要整体平方。

解析： $\Delta = 4 > 0$ ，两根为 $x = \frac{4 \pm 2}{6}$ ，即 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{3}$ 。把正确 Δ 与错误值 -28 对比：符号错了，根的判断也就全错了。

为什么错：选错的同学把“负号的平方”和“平方后取负”混为一谈—— $(-4)^2 = 16$ ， $-4^2 = -16$ ，两者差一个负号。判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 中 b^2 永远非负，若算出 Δ 是“负数开头的巨大负值”，先检查 b^2 是不是忘了平方。

C1. (围栏面积)

思路：一边靠墙时，围栏只围三条边。面积是二次函数，用配方（或基本不等式）求最值；墙长约束决定定义域右端，且要检验最值点是否落在定义域内。

规范解：(1) 垂直于墙的边为 x m，平行于墙的边为 $(48 - 2x)$ m，面积 $S = x(48 - 2x)$ 。约束： $x > 0$ ， $48 - 2x > 0$ 且 $48 - 2x \leq 30$ （不能超过墙长 30 m），故 $9 \leq x < 24$ 。即 $S = -2x^2 + 48x$ ， $9 \leq x < 24$ 。(2) 配方： $S = -2(x - 12)^2 + 288$ 。对称轴 $x = 12 \in [9, 24)$ ，故 $x = 12$ 时 $S_{\max} = 288$ (m^2)，此时平行边为 $48 - 24 = 24$ m， $24 \leq 30$ ，成立。答：垂直墙边 12 m、平行墙边 24 m 时面积最大，最大面积 **288** m^2 。

验算： $x = 11$ 时 $S = 11 \times 26 = 286 < 288$ ； $x = 13$ 时 $S = 13 \times 22 = 286 < 288$ ； $x = 12$ 时 $S = 12 \times 24 = 288$ ，成立。也可用基本不等式： $2x(48 - 2x) \leq \left(\frac{48}{2}\right)^2 = 576$ ， $S = \frac{1}{2} \cdot 2x(48 - 2x) \leq 288$ ，等号当 $2x = 48 - 2x$ 即 $x = 12$ 。**易错点：**忘写定义域 $9 \leq x < 24$ （由墙长 30 约束平行边）会扣分；最值点必须落在定义域内。

C2. (定价利润)

思路：利润 = 单件利润 $\times$ 日销量。设降价 x 元，单价利润 $40 - x$ ，日销量 $60 + 5x$ ，建二次函数；解二次不等式得利润不低于 2400 元的降价范围；配方求最大值。

规范解：(1) $y = (40 - x)(60 + 5x)$ ，展开 $y = -5x^2 + 140x + 2400$ 。定义域： $0 \leq x \leq 40$ （不亏本 $40 - x \geq 0$ ）。(2) $y \geq 2400$ ： $-5x^2 + 140x + 2400 \geq 2400$ ，即 $-5x^2 + 140x \geq 0$ ， $x^2 - 28x \leq 0$ ，得 $0 \leq x \leq 28$ 。结合定义域，降价 0 ~ 28 元（定价 62 元到 90 元）利润不低于 2400 元。(3) $y = -5(x - 14)^2 + 3380$ （检验： $-5 \times 14^2 + 140 \times 14 + 2400 = -980 + 1960 + 2400 = 3380$ ，成立）。对称轴 $x = 14 \in [0, 40]$ ，故降价 14 元（定价 76 元）时日利润最大，最大日利润 **3380** 元。

验算： $x = 14$ ： $y = 26 \times 130 = 3380$ ，成立； $x = 13$ ： $27 \times 125 = 3375 < 3380$ ； $x = 15$ ： $25 \times 135 = 3375 < 3380$ ； $x = 28$ ： $12 \times 200 = 2400$ ，成立恰为下界。**易错点：**第 (2) 问是不等式应用，别忘了与定义域取交集；第 (3) 问最大值取在顶点 $x = 14$ ，不是端点。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：三个小问串起“三个二次”三副面孔——恒成立用 Δ ，根的分布用韦达定理三件套（ Δ 、和、积），具体数值代入后解不等式。

规范解：(1) $f(x) > 0$ 恒成立，开口向上，需 $\Delta < 0$ ：

$$\Delta = 4a^2 - 4(a + 2) = 4(a^2 - a - 2) = 4(a - 2)(a + 1) < 0$$

得 $-1 < a < 2$ 。(2) 两根均为正，需三条件同时成立：

$$\Delta > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ 或 } a > 2$$

$$x_1 + x_2 = 2a > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$x_1 x_2 = a + 2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

交集为 $a > 2$ 。(3) $a = 3$ 时 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 。 $f(x) \leq 2$ 即 $x^2 - 6x + 5 \leq 2$ ， $x^2 - 6x + 3 \leq 0$ 。 $\Delta = 36 - 12 = 24$ ，两根 $x = 3 \pm \sqrt{6}$ 。故解集为 $[3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}]$ 。

验算：(2) $a = 3$ 时方程 $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) = 0$ ，两根 1, 5 均为正，成立；(3) $x = 3$ 代入 $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4 \leq 2$ ，成立， $x = 0$ 代入 $f(0) = 5 > 2$ ，不成立，0 不在解集内，成立 ($3 - \sqrt{6} \approx 0.55 > 0$)。**易错点：**第 (2) 问“两根为正”要同时满足判别式、和、积三个条件，漏一个都会出错。

S2 解析

思考路径：靠墙围地，围栏只围三条边。先做一般化证明（用基本不等式求理论最大），再代入实际数据，关键是检验最值点是否受墙长约束。

规范解：(1) $S = x(L - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(L - 2x)$ 。因 $2x > 0$ ， $L - 2x > 0$ ，且 $2x + (L - 2x) = L$ 为定值，由基本不等式：

$$2x(L - 2x) \leq \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4}$$

故 $S \leq \frac{1}{2} \times \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{8}$ 。等号当 $2x = L - 2x$ ，即 $x = \frac{L}{4}$ 时成立，此时平行边为 $\frac{L}{2} \leq m$ （题设 $m \geq \frac{L}{2}$ ），可行。最大值为 $\frac{L^2}{8}$ 。■ (2) $L = 40$ 时理论最大值为 $\frac{40^2}{8} = 200$ (m^2)，取等需 $x = 10$ ，平行边 20 m。但墙长仅 15 m， $20 > 15$ 超限，故理论最值点不可行。实际约束 $L - 2x \leq 15$ ，即 $x \geq 12.5$ 。 $S = x(40 - 2x) = -2(x - 10)^2 + 200$ 在 $x \geq 10$ 时单调递减，故在可行域 $[12.5, 20)$ 上， $x = 12.5$ 时面积最大：

$$S_{\max} = 12.5 \times 15 = 187.5 \text{ (m}^2\text{)}$$

差异原因：理论最值点要求平行边 20 m，超过了墙长 15 m 的约束，对称轴被挡在可行域之外，最值只能落到可行域的端点 $x = 12.5$ （此时恰好用满整面墙）。

验算： $x = 12.5$ ： $S = 12.5 \times 15 = 187.5$ ，成立； $x = 13$ ： $13 \times 14 = 182 < 187.5$ ，成立； $x = 15$ ： $15 \times 10 = 150$ ，成立。**易错点：**实际问题的“理论最优”与“可行最优”可能不同——套基本不等式/顶点公式后，必须回头检查最值点是否满足题目的全部约束（墙长、非负等），不满足就转端点（这正是 M3 三相等思想的现实版）。

第三章 函数的概念与性质

3.1 例题详解

例题 3.1 解析

思考路径：判断“是不是函数”只有一个标准——定义域中每个元素是否都有唯一的 y 与之对应。逐项检查：对应关系是否“对每个输入都给唯一输出”。

规范解：(1) 是函数。每个 $x \in \{1, 2, 3\}$ 经 $f: x \mapsto 2x$ 唯一对应到 $2, 4, 6$ ，且 $2, 4, 6 \in B$ 。(2) 不是函数。取 $x = 1$ ，由 $y^2 = 1$ 得 $y = \pm 1$ ，一个输入对应两个输出，违反唯一性。(3) 是函数。每个学生只有一个学号，学号唯一确定；且不同学生学号不同（多对一/一一对应都算函数）。

易错点：(2) 的错误根源是“一个 x 对多个 y ”；还要注意 (1) 中 B 比实际值域大没关系——值域 $\subseteq B$ 即可。

例题 3.2 解析

思考路径：定义域是“让解析式有意义的所有 x ”。逐个禁区排查：偶次根号下非负、分母不为 0，然后取交集。

规范解：需同时满足 $x - 1 \geq 0$ 且 $x - 2 \neq 0$ ，即 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$ ，定义域 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

易错点：两个条件取交集； $x = 2$ 满足根号条件但被分母排除，别漏； $x = 1$ 要算进（根号下等于 0 合法）。

例题 3.3 解析

思考路径：分段函数求值——先看自变量的值落在哪一段，用哪一段的解析式。嵌套 $f(f(-1))$ 从内往外算。

规范解：先算内层： $-1 \leq 0$ ，用第一段， $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ 。 $2 > 0$ ，用第二段， $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$ 。故 $f(f(-1)) = 3$ 。

易错点：嵌套时内外层可能用不同段（ $f(-1) = 2$ 进了第二段）——先算内层值，再看它落在哪一段，别默认内外层用同一段。

3.2 知识点 (1) 函数的概念详解

A1. C。

思路：函数的图象判据——任意作竖直线，与图象至多一个交点。

解析：竖直直线 $x = 1$ 与自身重合有无数交点；圆、开口向右的抛物线在 $x > 0$ 处都有两个 y 值，均不是函数。斜率为正的直线满足“一 x 一 y ”。

A2. B。

思路：偶次根号下 ≥ 0 。

解析： $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ ，即 $[-2, +\infty)$ 。易错点： $x = -2$ 要算进（根号下等于 0 合法），选 A 就漏了端点。

A3. A。

思路：代入 $x = 2$ 。

解析： $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$ 。

A4. D。

思路：同一函数 = 定义域相同且对应关系相同。

解析：A 中 $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$ （对应关系不同）；B 中 $g(x)$ 定义域 $x \neq 0$ ，与 f 定义域 $\mathbb{R}$ 不同；C 中 $g(x) = x$ 与 $f(x) = x^2$ 对应关系不同；D 中 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$ ，定义域都是 $\mathbb{R}$ 、对应关系都是“取绝对值”，是同一函数。答案 D。

易错点：B 是最经典的陷阱—— $\frac{x^2}{x}$ 约分后是 x ，但约分前定义域少了 $x = 0$ ，两个函数定义域不同就不是同一函数。约分要小心定义域变化。

M1. B。

思路：先展开 $f(x+1)$ 再作差——直接打击“看到加号就分配”的坏习惯。

解析： $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ， $f(x) = x^2$ ，差 $= 2x + 1$ 。

为什么错：选 A（= 1）或 C 的同学，是把 $f(x+1)$ 当成了 $f(x) + 1$ （ $= x^2 + 1$ ）再减 x^2 ——错误发生在第一步“代入”。记住： $f(x+1)$ 是把整个括号当自变量代入，不是给 $f(x)$ 结果加 1。

3.3 知识点 (2) 函数的表示法与分段函数详解

A5. A。

思路：分段各段取值再求和。

解析： $f(-1) = -1 - 1 = -2$ ； $f(0) = 0$ ； $f(1) = 1 + 1 = 2$ 。和为 0。易错点： $x = 0$ 用中间那段（= 0），不是 $x + 1$ 。

A6. B。

思路：总价 = 成人票 + 儿童票。

解析：2 成人 = 60 元固定，儿童 x 名 = $15x$ ，故 $y = 60 + 15x$ 。

A7. B。

思路： $f(x+1)$ 是把 $x+1$ 代入解析式。

解析： $f(x+1) = 2(x+1) + 1 = 2x + 3$ 。**易错点：**别把 $f(x+1)$ 错当 $f(x) + 1$ （那会是 $2x + 2$ ，选 A 就踩坑）。

M2. C。

思路： $x^0 = 1$ 只在 $x \neq 0$ 时成立—— 0^0 无意义。

解析：定义域 $x \neq 0$ ，即 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

为什么错：选 A 的同学默认“ x^0 恒等于 1”，忽略了 0^0 未定义。计算器输 0^0 会报错——数学上 0^0 是未定义量， $y = x^0$ 与 $y = 1$ 不是同一函数（定义域差一个点）。

3.4 例题详解

例题 3.4 解析

思考路径：定义法证明单调递增——任取 $x_1 < x_2$ ，证 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ 。作差后变形到能看出符号。

规范解：任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 且 $x_1 < x_2$ ，则

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 1) - (2x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2) < 0$$

（因 $x_1 < x_2$ ， $x_1 - x_2 < 0$ ），故 $f(x_1) < f(x_2)$ ， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。■

易错点：定义法四步（取值 → 作差 → 变形 → 定号）缺一不可；符号判断要写清理由（这里是 $2 > 0$ 且 $x_1 - x_2 < 0$ ）。

例题 3.5 解析

思考路径：二次函数最值——先配方找对称轴，再判断对称轴是否在区间 $[1, 4]$ 内。

规范解： $f(x) = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ ，对称轴 $x = 2 \in [1, 4]$ 。最大值：顶点处 $f(2) = 4$ 。

最小值：比较两 endpoint $f(1) = 3$ ， $f(4) = 0$ ，取 0。故最大值为 4，最小值为 0。

易错点：最小值是 endpoint $f(4) = 0$ 不是 $f(1) = 3$ ——抛物线开口向下，离对称轴越远值越小。别只看 endpoint，也别默认 endpoint 就是最值：先找对称轴，判断它在不在区间内。

例题 3.6 解析

思考路径：先查定义域对称性，再算 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。

规范解：（1）定义域 $\mathbb{R}$ 对称； $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$ ，偶函数。（2）定义域 $\mathbb{R}$ 对称； $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ，奇函数。（3）定义域 $\mathbb{R}$ 对称； $f(-x) = x^2 - x$ ，与 $f(x) = x^2 + x$ 既不相等也不相反，非奇非偶。（4）定义域 $[0, +\infty)$ 不关于原点对称，直接判非奇非偶。

易错点：(4) 先查定义域—— $f(-x)$ 对负数根本无定义，别硬算；奇偶性判定的**第一步永远是定义域对称性**。

3.5 知识点 (1) 单调性详解

A8. B。

思路：一次函数斜率 $k = -1 < 0$ ，单调递减。

A9. B。

思路：配方看对称轴。

解析： $f(x) = (x-1)^2 - 1$ ，对称轴 $x = 1$ ，开口向上，增区间 $[1, +\infty)$ 。

A10. B。

思路：反比例函数在正半支单调递减。

解析：任取 $0 < x_1 < x_2$ ， $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ，故在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。

A11. A。

思路：增函数保号——自变量同序不等式成立。

解析： $f(2a) < f(a+1)$ 且 f 递增 $\Rightarrow 2a < a+1 \Rightarrow a < 1$ 。

B2. (2023 · 新课标 I 卷) D。

思路：复合函数单调性——外层 2^u 递增，内层 $u = x(x-a)$ 在 $(0, 1)$ 上须递减，故对称轴在 1 右侧。

解析： $f(x) = 2^{x(x-a)}$ ， 2^u 在 $\mathbb{R}$ 上递增，要使 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减，须 $g(x) = x(x-a)$ 在 $(0, 1)$ 上递减。 $g(x)$ 对称轴 $x = \frac{a}{2}$ ，开口向上，递减区间 $(-\infty, \frac{a}{2}]$ ，故 $\frac{a}{2} \geq 1$ ，即 $a \geq 2$ ，答案 D。**易错点：**外层递增时，复合函数单调性与内层同向——别把“内层递减”想成“外层也要递减”。

M3. C。

思路：逐项辨析，专打“单调区间写并集”和“最值只看端点”两个坑。

解析：B 正确——在 $[a, b]$ 递增，子区间自然继承。A 错： $[0, 2] \cup [3, 5]$ 上可构造 $f(0) = 5$ 、 $f(1) = 6$ 、 $f(3) = 0$ 、 $f(4) = 1$ ：各段内递增但 $x_1 = 0 < x_2 = 3$ 时 $f(0) = 5 > f(3) = 0$ ，破坏任意性。C 错： $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 2]$ 上最小值是 $f(0) = 0$ （对称轴在区间内），不是 $f(-1) = 1$ 。D 错：奇函数图象过原点需定义域含 0（如 $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数但不过原点）。

为什么错：A 是“单调区间写并集”的经典陷阱——“各段递增”不保证“并集递增”，差的就是 $\forall x_1 < x_2$ 的跨段任意性；C 是“最值只看端点”的典型错误——对称轴 $x = 0$ 在 $[-1, 2]$ 内，最小值在顶点。

3.6 知识点 (2) 奇偶性详解

A12. B。

思路：逐个验证 $f(-x) = f(x)$ 。

解析：B 中 $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ ，偶函数。A 奇、C 奇 ($f(-x) = -2x = -f(x)$)、D 非奇非偶。

A13. A。

思路：奇函数定义域含 0 时 $f(0) = 0$ 。

解析： $f(-0) = -f(0)$ 即 $f(0) = -f(0)$ ，故 $f(0) = 0$ 。

A14. B。

思路：对称轴在区间内，顶点参与比较。

解析： $f(x) = (x-2)^2 - 4$ ，对称轴 $x = 2 \in [0, 3]$ ，最小值 $f(2) = -4$ 。

B3. (2023 · 全国乙卷) D。

思路：偶函数 $f(-x) = f(x)$ ，代入后交叉相乘，整理成“恒等式”形式解 a 。

解析： $f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-ax} - 1}$ 。令 $f(-x) = f(x)$ ($x \neq 0$):

$$\frac{-e^{-x}}{e^{-ax} - 1} = \frac{e^x}{e^{ax} - 1}$$

交叉相乘： $-e^{-x}(e^{ax} - 1) = e^x(e^{-ax} - 1)$ ，即

$$-e^{(a-1)x} + e^{-x} = e^{(1-a)x} - e^x$$

移项得 $e^x + e^{-x} = e^{(a-1)x} + e^{(1-a)x}$ 。令 $c = a - 1$ ，则 $e^x + e^{-x} = e^{cx} + e^{-cx}$ 对任意 x 成立，须 $c = \pm 1$ 。 $c = 1 \Rightarrow a = 2$ (选项 D)； $c = -1 \Rightarrow a = 0$ (不在选项)。故 $a = 2$ ，答案 D。

易错点：直接硬解指数方程容易漏“ c 与 $-c$ 等价”的对称性；取特殊值 $f(-1) = f(1)$ 先猜后验也是省力路径。

B4. (2023 · 新课标 II 卷) B。

思路：偶函数 $f(-x) = f(x)$ ，取特殊值 $x = 1$ 快速求解再验证。

解析：定义域由 $\frac{2x-1}{2x+1} > 0$ 得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{1}{2}$ ，关于原点对称 ✓。取 $x = 1$ ： $f(1) = (1+a)\ln \frac{1}{3}$ ， $f(-1) = (-1+a)\ln 3$ 。 $f(-1) = f(1)$ 且 $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ ： $(a-1)\ln 3 = -(1+a)\ln 3 \Rightarrow a-1 = -1-a \Rightarrow a = 0$ ，答案 B。

易错点：含对数偶函数题先验定义域对称 (否则 $f(-x)$ 无意义)，再用特殊值——比硬展开 $(x+a)\ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 快得多。

M4. C。

思路：先查定义域。

解析： $\sqrt{x}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 不关于原点对称，非奇非偶。

为什么错：选 A/B 的同学直接算了 $f(-x) = \sqrt{-x}$ 就开始比——但 $\sqrt{-x}$ 对 $x > 0$ 根本没定义，比较无从谈起。奇偶性判定的**第一步永远是定义域对称性**。

M5. B。

思路：偶函数先对称化，再比大小。

解析： $f(-3) = f(3)$, $f(-4) = f(4)$ 。在 $[0, +\infty)$ 递增： $f(2) < f(3) < f(4)$ ，即 $f(2) < f(-3) < f(-4)$ 。

为什么错：选 A/D 的同学直接拿 $-3, 2, -4$ 当自变量比（负数在增区间外没法比）——偶函数要先“翻到同一边”再比， $f(-3)$ 和 $f(3)$ 是一家。

3.7 知识点 (3) 周期性与抽象函数（新高考趋势）详解

B5. (2022 · 新高考 II 卷) A。

思路：抽象函数——赋值法找周期。令 $y = 0$ 得 $f(x)$ 与 $f(0)$ 关系，令 $x = y$ 得 $f(2x)$ 与 $f(x)$ 关系，推出周期 6，再求和。

解析：令 $y = 0$: $f(x) + f(x) = f(x)f(0)$ ，即 $2f(x) = f(x)f(0)$ 。取非零 $f(x)$ 得 $f(0) = 2$ 。令 $x = 1, y = 1$: $f(2) + f(0) = f(1)^2 = 1$ ，故 $f(2) = -1$ 。令 $x = 1, y = 2$: $f(3) + f(-1) = f(1)f(2) = -1$ 。令 $x = 0, y = 1$: $f(1) + f(-1) = f(0)f(1) = 2$ ，得 $f(-1) = 1$ 。代回： $f(3) + 1 = -1$, $f(3) = -2$ 。同理递推得一个周期内 $f(1), f(2), \dots, f(6) = 1, -1, -2, -1, 1, 2$ ，和为 0。22 = 3 × 6 + 4，前 18 项和为 3 × 0 = 0，剩余 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3$ 。答案 A。

易错点：赋值法的“取点”顺序有讲究——先 $y = 0$ 定 $f(0)$ ，再 $x = y$ 递推；数周期时别数错剩余项。

B6. (2023 · 新高考 I 卷 · 多选) ABC。

思路：多选抽象函数先从特殊点 (0、1、-1) 入手确定函数值，再推奇偶性；D 选项需要“极值”信息，条件不足以推出。

解析：A: 取 $x = y = 0$: $f(0) = 0 \cdot f(0) + 0 \cdot f(0) = 0$ ，正确。B: 取 $x = y = 1$: $f(1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) = 2f(1)$ ，故 $f(1) = 0$ ，正确。C: 先取 $x = y = -1$: $f(1) = 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(-1) = 2f(-1)$ ，由 B 知 $f(1) = 0$ ，故 $f(-1) = 0$ 。再令 $y = -1$: $f(-x) = (-1)^2 f(x) + x^2 f(-1) = f(x) + 0 = f(x)$ 对任意 x 成立，故 $f(x)$ 是偶函数，正确。D: 由条件只能得到 $f(0) = 0$ 与偶函数性，推不出 $x = 0$ 处取极小值——例如 $f(x) \equiv 0$ 满足条件但 $x = 0$ 不是极小值点，错误。故答案 ABC。

易错点：(1) 赋值要“有目的地取点”：0 定常数项、1 定非零值、-1 联偶性；(2) D 项“不确定”就不要选——多选宁缺毋滥，条件不足的选项一律排除。

B7. (2024 · 新高考 I 卷) B。

思路：由 $x < 3$ 时 $f(x) = x$ 得 $f(1) = 1$ 、 $f(2) = 2$ ，反复用递推 $f(n) > f(n-1) + f(n-2)$

逐项放大下界，把 $f(20)$ 的界推到超过 1000。

解析： $f(1) = 1, f(2) = 2$ 。递推 $f(n) > f(n-1) + f(n-2) \ (n \geq 3)$ ：

$$f(3) > f(2) + f(1) = 3, \quad f(4) > f(3) + f(2) > 5, \quad f(5) > f(4) + f(3) > 8$$

逐项继续： $f(6) > 13, f(7) > 21, f(8) > 34, f(9) > 55, f(10) > 89, f(11) > 144, f(12) > 233, f(13) > 377, f(14) > 610, f(15) > 987, f(16) > 1597 > 1000$ 。由于每一项都大于前两项之和（当然大于前一项）， $f(n)$ 在 $n \geq 3$ 时严格递增，故 $f(20) > f(19) > \cdots > f(16) > 1000$ 。B 正确。A：只能推出 $f(10) > 89$ ，无法保证 $f(10) > 100$ ，错误。C：条件只给下界，不给上界， $f(10) < 1000$ 不是“一定正确”，错误。D：同理， $f(20)$ 只有下界保证， $f(20) < 10^4$ 无法由条件推出，错误。答案 B。

易错点：(1) 逐项递推时每行下界都是严格大于 ($>$ 不是 $\geq$)；(2) 斐波那契式增长快，算到 $f(16)$ 已超 1000，不必真算 $f(20)$ 的具体值，用“严格递增”传递即可；(3) “一定正确”只信能由条件推出的下界，别选“可能成立”的选项。

M6. B.

思路：周期函数的“平移不变性”配奇函数转化——先把 $f(2)$ 经周期搬到可用的点，再靠奇函数建立与 $f(1)$ 的联系。

解析： f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 3 的奇函数。 $f(2) = f(2-3) = f(-1)$ （周期 3，可平移一个周期）。又 f 奇， $f(-1) = -f(1)$ 。由 $f(1) > 1$ 得 $f(2) = f(-1) = -f(1) < -1$ ，即 $a < -1$ 。答案 B。

为什么错：选 A 的同学直接把 $f(1) > 1$ 当成 $f(2) > 1$ —— $f(2)$ 与 $f(1)$ 不在同一周期段，必须先用周期搬 ($f(2) = f(-1)$)，再靠奇函数“转号”。这条链（周期平移 $\rightarrow$ 奇函数取负）缺一环就错。

A15. B.

思路：周期函数在相差整数倍周期的点上取值相同——把 2023 朝 3 方向“差整周期地”搬。

解析：周期为 2， $2023 - 3 = 2020 = 2 \times 1010$ ，故 $f(2023) = f(3 + 2 \times 1010) = f(3) = 5$ 。答案 B。

易错点：先判 $2023 - 3 = 2020$ 是否为周期 2 的整数倍——是，则直接等于 $f(3)$ ；别把“搬到 $f(1)$ ”或“ $f(0)$ ”之类的值搞混。

3.8 例题详解

例题 3.7 解析

思考路径：幂函数定义——系数为 1、底数是变量、指数是常数。

规范解：(1) $y = 2x$ ：系数是 2 不是 1，**不是**幂函数。(2) $y = x^2$ ：系数 1、底数 x 、指数常数 2，**是**幂函数。(3) $y = 2^x$ ：底数是常数、指数是变量，**是指数函数**，不是幂函数。(4) $y = x^0$ ：**是**幂函数（定义域 $x \neq 0$ ）。(5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ：底数是常数，**是指数函数**，不是幂函数。

易错点：“幂函数”看底数变不变，“指数函数”看指数变不变，别被“指数”两个字带跑。

例题 3.8 解析

思考路径：指数相同、底数不同 $\rightarrow$ 构造幂函数 $y = x^{\text{指数}}$ ，用它在 $(0, +\infty)$ 的单调性比较。

规范解：(1) $y = x^{0.3}$, $\alpha = 0.3 > 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上递增; $0.2 < 0.3$, 故 $0.2^{0.3} < 0.3^{0.3}$ 。(2) $y = x^{-1}$, $\alpha = -1 < 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上递减; $2.1 < 2.3$, 故 $2.1^{-1} > 2.3^{-1}$ 。

易错点：指数为负时单调性反转（递减），别拿“增函数”的直觉硬套。

3.9 知识点 (1) 幂函数概念与图象详解

A16. B。

思路：幂函数定义直接验证。

解析： $y = x^{1/2}$ 系数 1、底数变量、指数常数，是幂函数。A 系数 3、C 指数函数、D 多一项。

A17. B。

思路：代入点解 α 。

解析： $2^\alpha = 8 = 2^3$, 故 $\alpha = 3$ 。

A18. C。

思路：幂函数 $\alpha < 0$ 时在 $(0, +\infty)$ 递减。

解析： $y = x^{-1}$, $\alpha = -1 < 0$, 递减。

A19. “ $<$ ”。

思路： $y = x^{0.5}$ 递增。

解析： $1.5 < 1.6$, 故 $1.5^{0.5} < 1.6^{0.5}$ 。

M7. C。

思路：逐项辨析，专打幂函数定义与 x^0 两个易混点。

解析：C 正确。A 错： $y = x^0$ 定义域 $x \neq 0$ ，与 $y = 1$ （定义域 $\mathbb{R}$ ）不是同一函数。B 错： $y = 2^x$ 是指数函数。D 错： $y = x^{-1}$ 不过原点。

为什么错：A 是“ x^0 恒等于 1”的误解—— x^0 和常数 1 差一个“ 0^0 无意义”的点；D 是常见直觉错误——“幂函数过原点”只对 $\alpha > 0$ 成立， $\alpha < 0$ 的图象是双曲线。

C1. (1) $k = 8$; (2) 约 3.5 kW。

思路：幂函数模型 $P = kd^{-2}$ ——先代已知点定 k ，再代新 d 求 P 。

解析：(1) $d = 1$ 时 $P = 8$, 代入 $8 = k \cdot 1^{-2} = k$, 故 $k = 8$ 。(2) $d = 1.52$ 时 $P = 8 \times 1.52^{-2} = \frac{8}{1.52^2} = \frac{8}{2.3104} \approx 3.46 \approx 3.5$ kW。

易错点： d^{-2} 是“反平方”——距离变 1.52 倍，功率约缩为 $\frac{1}{2.31}$ ，别把指数当正数；单位 kW 保留 1 位小数。

3.10 例题详解

例题 3.9 解析

思考路径：利润 = 单件利润 × 销量。设降价 x 元，单件利润 = $60 - x - 40 = 20 - x$ ，销量 = $100 + 10x$ ，建二次函数求最值。

规范解：设降价 x 元 ($0 \leq x \leq 20$)，日利润

$$y = (20 - x)(100 + 10x) = -10x^2 + 100x + 2000 = -10(x - 5)^2 + 2250$$

对称轴 $x = 5 \in [0, 20]$ ，故降价 5 元时， $y_{\max} = 2250$ 元。此时定价 55 元，日销 150 件。

易错点：定义域 $x \leq 20$ （不能降到进价以下）；最大值在顶点不在端点——直接代 $x = 0$ （定价 60 不降价）得 $2000 < 2250$ 。

例题 3.10 解析

思考路径：分段函数建模——按“是否超过首重”分两段，续重“不足 1 kg 按 1 kg”用向上取整。

规范解：(1) $0 < x \leq 1$ 时 $y = 8$ ； $x > 1$ 时 $y = 8 + 3[x - 1]$ ($[\cdot]$ 为向上取整)。(2) $x = 3.5$ kg，续重 2.5 kg 按 3 kg 计： $y = 8 + 3 \times 3 = 17$ 元。

易错点：3.5 kg 不是 $8 + 3 \times 2.5 = 15.5$ ——续重按整 kg 向上取整，这是实际计费规则，也是分段函数“现实约束”的典型。

3.11 知识点 (1) 函数建模详解

A20. B。

思路：面积 = 长 × 宽，设一边建二次函数。

解析：设长为 x ，宽 $12 - x$ ，面积 $S = x(12 - x) = -(x - 6)^2 + 36$ ， $x = 6$ 时最大（此时是正方形）。**易错点：**周长 24 → 半周长 12，别把 24 当和。

A21. A。

思路：二次函数顶点求最值，验证对称轴在定义域内。

解析： $y = -(x - 5)^2 + 9$ ，对称轴 $x = 5 \in [0, 8]$ ， $y_{\max} = 9$ 万元。

M8. B。

思路：加了约束“宽不小于 6 m”后，对称轴被排除——最值要看可行域端点。

解析： $S = x(10 - x) = -(x - 5)^2 + 25$ ，对称轴 $x = 5$ ，但约束 $x \geq 6$ （且 $x \leq 10$ ），对称轴不在可行域内。 S 在 $[6, 10]$ 上单调递减（开口向下、对称轴左侧），故 $x = 6$ 时 $S_{\max} = 6 \times 4 = 24$ 。答案 B。

为什么错：选 A 的同学背下“矩形面积最大是正方形 ($x = 5$)”就套——忘了对称轴必须在可行域内。**最值的判断顺序：**先找对称轴，再查它是否在定义域内；不在就转端点。

$$\text{C2. (1) } y = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq 30 \\ 1.5 \lceil \frac{t-30}{30} \rceil, & 30 < t \leq 570 \\ 15, & 570 < t \leq 1440 \end{cases} \quad ; (2) \text{ 3 元。}$$

思路：分段建模——先免费段，再按 30 分钟计费（不足 30 分钟向上取整），最后封顶 15 元。
 封顶起点： $1.5 \lceil \frac{t-30}{30} \rceil = 15$ ，即 $\lceil \frac{t-30}{30} \rceil = 10$ ，对应 $t > 570$ 。

解析：(1) $0 < t \leq 30$ 免费 $y = 0$ ； $30 < t \leq 570$ ， $y = 1.5 \lceil \frac{t-30}{30} \rceil$ ； $t > 570$ 时 $y = 15$ 。(2) 1 小时 20 分钟 = 80 分钟： $t = 80 > 30$ ， $\frac{t-30}{30} = \frac{50}{30} \approx 1.67$ ，向上取整为 2，故 $y = 1.5 \times 2 = 3$ 元。

易错点：(1) 不足 30 分钟按 30 分钟计—— $\frac{50}{30}$ 向上取整成 2 个单位，别四舍五入成 1；(2) 免费段从 $t = 0$ 到 $t = 30$ （含 30 分钟整免费）；(3) 封顶 15 元对应 $t > 570$ 分钟（9.5 小时），别漏写上限 $t \leq 1440$ 。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：二次函数含参——(1) 单调递减条件 $\rightarrow$ 对称轴位置；(2) 最值按对称轴与区间 $[0, 2]$ 的位置关系分三种情况讨论。

规范解：(1) $f(x) = (x-a)^2 + 3 - a^2$ ，对称轴 $x = a$ 。 f 在 $(-\infty, 2]$ 上递减 $\Leftrightarrow$ 对称轴在 $x = 2$ 右侧，即 $a \geq 2$ 。

(2) 分三种情况：

- 若 $a < 0$ ：对称轴在区间左侧， f 在 $[0, 2]$ 递增， $g(a) = f(0) = 3$ ；
- 若 $0 \leq a \leq 2$ ：对称轴在区间内， $g(a) = f(a) = 3 - a^2$ ；
- 若 $a > 2$ ：对称轴在区间右侧， f 在 $[0, 2]$ 递减， $g(a) = f(2) = 7 - 4a$ 。

即

$$g(a) = \begin{cases} 3, & a < 0 \\ 3 - a^2, & 0 \leq a \leq 2 \\ 7 - 4a, & a > 2 \end{cases}$$

易错点：含参讨论要“对称轴 vs 区间端点”三种位置全覆盖，且端点 $a = 0$ 、 $a = 2$ 取哪边要一致（这里取闭）。

S2 解析

思考路径：奇函数 $\Rightarrow f(0) = 0$ 求 b ；单调性用定义法四步；解不等式先移项成 $f(t-1) < -f(t) = f(-t)$ （奇函数），再用单调性“脱壳”。

规范解：(1) $f(x)$ 定义在 $(-1, 1)$ 上且为奇函数， $f(0) = \frac{b}{1} = 0$ ，故 $b = 0$ 。由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2a}{5} = \frac{2}{5}$ ，得 $a = 1$ 。

(2) 任取 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

因 $x_1 < x_2$, $x_1 - x_2 < 0$; 又 $|x_1x_2| < 1$, 故 $1 - x_1x_2 > 0$; 分母恒正。所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增。■

(3) $f(t-1) + f(t) < 0 \Rightarrow f(t-1) < -f(t) = f(-t)$ 。 f 递增, 得 $t-1 < -t \Rightarrow t < \frac{1}{2}$ 。
再套定义域: $-1 < t-1 < 1$ 且 $-1 < t < 1$, 即 $0 < t < 2$ 且 $-1 < t < 1$, 交集 $0 < t < 1$ 。综合: $0 < t < \frac{1}{2}$ 。

易错点: 解不等式三步缺一不可——奇函数转化、单调性脱壳、定义域约束 (t 和 $t-1$ 都要落在 $(-1, 1)$ 内)。漏定义域是本题最常见丢分点。

第四章 指数函数与对数函数

4.1 例题详解

例题 4.1 解析

思考路径：五个小题各考一个“防错点”。奇次根下负数出负数、偶次根只取正的、分数指数先开方再乘方、负分数指数先取倒数、偶次根号吞次方加绝对值。逐项处理即可。

规范解：(1) $(-4)^3 = -64$, 故 $\sqrt[3]{-64} = -4$ 。(2) $3^4 = 81$, 偶次根取正的, $\sqrt[4]{81} = 3$ 。(3) $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$ 。(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ 。(5) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$ 。

易错点：第(3)题“先开方再乘方”比“先乘方再开方”好算；第(5)题偶次根号吞掉平方必须加绝对值，写 -7 是常见错误。

4.2 知识点(1) 根式与分数指数幂详解

A1. -3 、 2 、 5 。

思路：逐项求值，注意奇偶次根的差异与偶次根绝对值。

解析： $(-3)^3 = -27$, 故 $\sqrt[3]{-27} = -3$; $2^4 = 16$, 故 $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ 。

A2. $x^{\frac{1}{4}}$ 、 $a^{\frac{1}{3}}$ 、 a^2b^3 。

思路：根式先写成分数指数幂，再用指数运算性质——同底数幂相乘指数相加、相除指数相减、乘方指数相乘。

解析： $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$; $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$; $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^6 = a^{\frac{1}{3} \times 6}b^{\frac{1}{2} \times 6} = a^2b^3$ 。

M1. 4 、 -4 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。

思路：分两步看——先看负号在不在括号内（决定“被不被平方”），再看指数是不是负的（决定“取不取倒数”）。两件事独立，先各算各的。

解析： $(-2)^2 = 4$ ：负号在括号内，被平方，结果为正； $-2^2 = -4$ ：负号在括号外，只给 2^2 的结果加负号； $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ ：负指数取倒数，底数仍是 -2 ，倒数后负号仍被平方； $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ ：负指数取倒数，底数是 2 。

为什么错：只背“负指数等于倒数”、不展开写，就会把“位置”当“数值符号”—— $(-2)^{-2}$ 和 2^{-2} 结果相同纯属“负号被平方”的巧合，换 $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ 与 $2^{-3} = \frac{1}{8}$ 就不同了。凡是带负号与负指数的，先写成分式再展开，别跳步。

4.3 知识点 (2) 实数指数幂的运算性质详解

A3. $4, \frac{4}{3}$ 。

思路：分数指数幂“先开方再乘方”；负分数指数先取倒数。

解析： $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ ； $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ 。

A4. $10^{x-y} = \frac{3}{4}$ ， $10^{2x+y} = 36$ 。

思路：指数幂相除指数相减、相乘指数相加——反用运算性质把目标拆成 10^x 、 10^y 的幂。

解析： $10^{x-y} = \frac{10^x}{10^y} = \frac{3}{4}$ ； $10^{2x+y} = (10^x)^2 \cdot 10^y = 3^2 \times 4 = 36$ 。

易错点： 10^{2x+y} 是 $(10^x)^2$ 乘 10^y ，不是 10^x 乘 10^y 再乘2——指数上的系数2要落到幂上。

4.4 例题详解

例题 4.2 解析

思考路径：(1) 对照定义 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，逐个检查底数、指数位置与系数。(2) 先看底数定单调方向，再比指数；底数不同就找中间量1。

规范解：(1) $y = 3^x$ ：底数 $3 > 0$ 、指数是自变量、系数为1，是指数函数。 $y = x^3$ ：底数是自变量，是幂函数。 $y = (-2)^x$ ：底数 $-2 < 0$ ，不满足底数为正。 $y = 2^{x+1} = 2 \times 2^x$ ：系数是2不是1，不是标准指数函数。(2) 底数 $0.7 \in (0, 1)$ ， $y = 0.7^x$ 递减， $0.8 < 1.2$ ，故 $0.7^{0.8} > 0.7^{1.2}$ 。 $1.5^{0.3} > 1.5^0 = 1$ ， $0.8^{0.3} < 0.8^0 = 1$ ，故 $1.5^{0.3} > 0.8^{0.3}$ 。

易错点：(1) 中 $y = 2^{x+1}$ 最容易被误判——它能化成 2×2^x ，系数不为1，不是标准指数函数。(2) 中底数小于1时指数越大值越小，别用“增函数”的直觉。

4.5 知识点 (1) 指数函数的概念与图象详解

A5. $f(x) = 2^x$ ， $f(0) = 1$ ， $f(-1) = \frac{1}{2}$ 。

思路：把点代入定底数，注意 $a > 0$ 的约束。

解析： $a^2 = 4$ ， $a > 0$ ，故 $a = 2$ ， $f(x) = 2^x$ 。 $f(0) = 2^0 = 1$ ； $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ 。

A6. $2^{0.3} < 2^{1.7}$ ； $0.5^{-0.3} > 0.5^{0.2}$ ； $1.2^{0.5} > 0.8^{0.5}$ 。

思路：同底比指数，异底找中间量1。

解析：底 $2 > 1$ 递增， $0.3 < 1.7$ ，故 $2^{0.3} < 2^{1.7}$ ；底 $0.5 \in (0, 1)$ 递减， $-0.3 < 0.2$ ，故 $0.5^{-0.3} > 0.5^{0.2}$ ； $1.2^{0.5} > 1$ 而 $0.8^{0.5} < 1$ ，故 $1.2^{0.5} > 0.8^{0.5}$ 。

B1. (2022 · 全国甲卷 · 理) A。

思路：图象选择题经典两步——先看奇偶性排除一半，再用特殊区间函数值的正负排除。

解析：令 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 。由 $3^x - 3^{-x}$ 为奇函数、 $\cos x$ 为偶函数，乘积为奇函数；直接验证： $f(-x) = (3^{-x} - 3^x) \cos(-x) = -(3^x - 3^{-x}) \cos x = -f(x)$ ，故图象关于原点对称，排除 B、D。又 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $3^x - 3^{-x} > 0$ 且 $\cos x > 0$ ，故 $f(x) > 0$ ，排除 C。答案 A。

为什么错：若只盯着“指数增长快”而忽略奇偶性，容易被图象左右分布带偏。关键结论要一眼看出： $3^x - 3^{-x}$ 是奇函数（两奇函数之差仍为奇），与偶函数 $\cos x$ 相乘为奇——奇偶性先行，符号判定随后。

M2. C。

思路：逐项辨析，专打“幂函数指数函数认错”与“图象底数比较记反”。

解析：C 正确—— $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ ，把 x 换成 $-x$ 就是关于 y 轴对称。A 错： $y = x^2$ 是幂函数（底变指数定）， $y = 2^x$ 才是指数函数。B 错： $x < 0$ 一侧 $2^x > 3^x$ （如 $2^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = 3^{-1}$ ），底越大反而越靠下。D 错： $y = x^{-1}$ 不过原点，只有 $\alpha > 0$ 的幂函数才过原点。

为什么错：A 是“见指数字样就归指数函数”——区分标准是“谁在变”： x 扛在肩上的的是指数函数， x 坐在底下当底座的是幂函数。B 是“底越大越陡”的直觉在 $x < 0$ 一侧失灵—— $x < 0$ 时底大的一方其实在下方，代入 $x = -1$ 验证最稳。

4.6 知识点 (2) 指数函数的单调性与值域详解

A7. $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ 。

思路： $y = 2^x$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增，值域由两端点决定。

解析： $y_{\min} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ， $y_{\max} = 2^2 = 4$ ，值域 $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ 。

A8. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 。

思路：底数 $\frac{1}{3} \in (0, 1)$ ，函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，值域由两端点决定。

解析：递减， $x = -1$ 处取最大 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ ， $x = 1$ 处取最小 $y = \frac{1}{3}$ ，值域 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 。

易错点：底数小于 1 时函数递减，最大值在区间左端点——别按“增函数”默认左小右大。

A9. $(-\infty, 4]$ 。

思路：右边 8 写成 2^3 化成同底，再用单调性“去底”。

解析： $2^{x-1} \leq 8 = 2^3$ ，底 $2 > 1$ 递增，故 $x - 1 \leq 3$ ， $x \leq 4$ 。解集 $(-\infty, 4]$ 。

4.7 例题详解

例题 4.3 解析

思考路径：(1) 指对互化看“底、幂、指数”三件套：底不变，幂变真数，指数变对数值。(2) 用“乘变加、除变减、幂变系数”合并，换底公式处理不同底相乘。

规范解：(1) $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3 \Rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$ 。(2) $\lg 25 + \lg 4 = \lg(25 \times 4) = \lg 100 = 2$; $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$; $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} = \frac{\lg 4}{\lg 2} = \frac{2 \lg 2}{\lg 2} = 2$ 。

易错点：第(2)第3小题用的是换底公式，“头尾颠倒的两个对数相乘等于1”这一推论($\log_a b \cdot \log_b a = 1$)要熟记。

4.8 知识点(1) 对数的概念与指对互化详解

A10. 4、-3、2、3。

思路：把“问几次方”翻译成幂，再算；恒等式直接代。

解析： $3^4 = 81$, $\log_3 81 = 4$; $10^{-3} = 0.001$, $\lg 0.001 = -3$; $\ln e^2 = 2$; 由 $a^{\log_a N} = N$, $5^{\log_5 3} = 3$ 。

4.9 知识点(2) 对数运算性质与换底公式详解

A11. $\log_2 15 = a + b$; $\log_2 \frac{3}{5} = a - b$ 。

思路：积的对数拆和，商的对数拆差。

解析： $15 = 3 \times 5$, $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5 = a + b$; $\frac{3}{5} = 3 \div 5$, $\log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5 = a - b$ 。

A12. 1、2、1。

思路：“除变减”合并同类底，换底公式把连乘约掉。

解析： $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1$; $\lg 5 + \lg 20 = \lg 100 = 2$; $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} = 1$ 。

B2. (2022 · 浙江卷) C。

思路：指对互化把 b 翻译成 $2^{3b} = 3$ ，再统一写成以 2 为底的幂。

解析：由 $\log_8 3 = b$ 得 $8^b = 3$ ，即 $2^{3b} = 3$ ，两边平方得 $2^{6b} = 9$ 。由 $2^a = 5$ 得 $2^{2a} = 25$ 。故

$$4^{a-3b} = 2^{2a-6b} = \frac{2^{2a}}{2^{6b}} = \frac{25}{9}$$

选 C。

易错点： $\log_8 3 = \frac{\log_2 3}{3}$ ，即 $8^b = 3 \Leftrightarrow 2^{3b} = 3$ 是核心一步；别把 4^{a-3b} 直接拆成 $4^a \div 4^{3b}$ 后不会处理 $4^{3b} = 2^{6b}$ 。

M3. D。

思路：逐项套运算性质核对“结构是否符合公式左边”。

解析：D 正确—— $\log_2 8 + \log_2 2 = \log_2(8 \times 2) = \log_2 16 = 4$ 。A 错： $\log_2(3+5) = \log_2 8 = 3$ ，而 $\log_2 3 + \log_2 5 \approx 1.585 + 2.322 = 3.907 \neq 3$ ——加法真数没有分配律。B 错： $\frac{\log_2 8}{\log_2 2} = \frac{3}{1} = 3$ ，而 $\log_2 \frac{8}{2} = \log_2 4 = 2$ ——“除变减”对真数的商生效，不是对两个对数值相除。C 错： $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 6$ ，而 $(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ ——幂的指数降为系数，不能对整个对数式再乘方。

为什么错：A 是经典——口诀“乘法变加法”只对**积的真数**生效， $\log_a(M+N)$ 没有拆法，见到加法只能整体看；B、C 是“减号、幂号不等于可分配”——每次用性质前先问“我拆的是乘、除还是幂”。

4.10 例题详解

例题 4.4 解析

思考路径：(1) 真数必须大于 0，解一次不等式。(2) 看底数定单调方向，真数同序比较。

规范解：(1) $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ，定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。(2) 底数 $2 > 1$ ， $y = \log_2 x$ 递增， $1.5 < 2.5$ ，故 $\log_2 1.5 < \log_2 2.5$ 。底数 $0.5 \in (0, 1)$ ， $y = \log_{0.5} x$ 递减， $2 < 3$ ，故 $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 3$ 。

易错点：第 (2) 问两小题底数一增一减，恰好提醒“底数大于 1 和小于 1 要分开想”，别统一套增函数。

4.11 知识点 (1) 对数函数的概念与求值详解

A13. $(-1, 4)$ 。

思路：每个对数的真数都大于 0，取交集。

解析： $4 - x > 0$ 且 $x + 1 > 0$ ，即 $x < 4$ 且 $x > -1$ ，定义域 $(-1, 4)$ 。

B3. (2023 · 北京卷) 1。

思路：直接代入，分项用分数指数幂与对数恒等式。

解析： $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{1}{2} = \sqrt{4} + (-1) = 2 - 1 = 1$ 。

易错点： $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ (因 $2^{-1} = \frac{1}{2}$)，别把 $\log_2 \frac{1}{2}$ 当正数——这是求值题最常见的符号坑。

4.12 知识点 (2) 对数函数的单调性 (比较大小与解不等式) 详解

A14. (1, 5)。

思路：右边 -2 化成同底对数，用单调性去 $\log$ ，底数小于 1 时变号，还要保证真数大于 0。

解析： $-2 = \log_{0.5} 4$ ，原不等式化为 $\log_{0.5}(x-1) > \log_{0.5} 4$ 。底数 $0.5 < 1$ 递减，得 $x-1 < 4$ ；又真数 $x-1 > 0$ 。故 $1 < x < 5$ ，解集 (1, 5)。

易错点：底数小于 1 时去 $\log$ 不等号要反向；同时真数约束 $x-1 > 0$ 不能丢——两个条件取交集。

A15. $\log_2 1.5 < \log_2 2.5$ ； $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 3$ 。

思路：底数定单调方向，同底真数比大小。

解析：底 $2 > 1$ 递增， $1.5 < 2.5$ ，故 $\log_2 1.5 < \log_2 2.5$ ；底 $0.5 \in (0, 1)$ 递减， $2 < 3$ ，故 $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 3$ 。

B4. (2022 · 新高考 I 卷) C。

思路：三数比较——先用不等式 $\ln x < x-1$ 比 b 与 c ，再构造 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ 用单调性比 a 与 c ，最后取对数比 a 与 b 。

解析：(1) b 与 c ： $c = -\ln 0.9 = \ln \frac{10}{9}$ 。由 $\ln x < x-1$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$)，取 $x = \frac{10}{9}$ 得 $c < \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9} = b$ 。(2) a 与 c ：设 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ ($0 < x < 1$)。 $g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{1-x}$ ，在 $(0, 0.1]$ 上 $g'(x) > 0$ ($g'(0) = 0$ 且递增)，故 $g(x)$ 递增， $g(0.1) > g(0) = 0$ ，即 $0.1e^{0.1} + \ln 0.9 > 0$ ，所以 $a > c$ 。(3) a 与 b ：取自然对数， $\ln a - \ln b = (-\ln 10 + 0.1) - (-\ln 9) = 0.1 - \ln \frac{10}{9} = 0.1 - c$ 。又由 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 1$) 取 $x = \frac{10}{9}$ 得 $c > \frac{1}{10}$ ，故 $\ln a < \ln b$ ， $a < b$ 。综上 $c < a < b$ ，答案 C。

为什么错：三数比大小最忌讳“凭感觉估”—— $a \approx 0.1105$ 、 $b \approx 0.1111$ 、 $c \approx 0.1054$ ， a 与 b 只差约 0.0006，只有精确的不等式 ($\ln x$ 与 $x-1$ 的关系) 能分出胜负。学生常见错误：只比较 a 与 b 忘了 c ，或对 $c = \ln \frac{10}{9}$ 与 $\frac{1}{9}$ 的大小想当然。构造差函数用单调性是最稳妥的路径。

4.13 知识点 (3) 对数型复合函数与情境应用详解

A16. 定义域 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ；单调递增区间为 $(-\infty, 1)$ 。

思路：先解内层二次函数大于 0 求定义域，再用“同增异减”逐层判单调。

解析： $x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) > 0$ ，定义域 $x < 1$ 或 $x > 3$ 。内层 $t = x^2 - 4x + 3$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减、在 $(3, +\infty)$ 上单调递增；外层 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 单调递减。复合函数“同增异减”： $(-\infty, 1)$ 上“内减外减”复合为增。故单调递增区间为 $(-\infty, 1)$ 。

易错点： $x \in (1, 3)$ 不在定义域内，绝不能写进答案——这是复合函数单调性问题最典型的丢

分点。

B5. (2023 · 新高考 I 卷) ACD。

思路：由 $L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}$ 反解 $p = p_0 \cdot 10^{\frac{L_p}{20}}$ ，把各声源声压级范围换算成 p 的范围再比较。

解析： $p_1: 60 \leq 20 \lg \frac{p_1}{p_0} \leq 90 \Rightarrow 10^3 \leq \frac{p_1}{p_0} \leq 10^{4.5}$ ，即 $p_1 \in [10^3 p_0, 10^{4.5} p_0]$ 。 $p_2: 50 \leq 20 \lg \frac{p_2}{p_0} \leq 60 \Rightarrow p_2 \in [10^{2.5} p_0, 10^3 p_0]$ 。 $p_3: 20 \lg \frac{p_3}{p_0} = 40 \Rightarrow \lg \frac{p_3}{p_0} = 2 \Rightarrow p_3 = 100 p_0$ ，C 正确。A: $p_1 \geq 10^3 p_0 \geq p_2$ ，A 正确。B: $p_2 \leq 10^3 p_0 = 10 p_3$ ，故 $p_2 > 10 p_3$ 不一定成立，B 错误。D: $p_1 \leq 10^{4.5} p_0$ ，而 $100 p_2 \geq 100 \times 10^{2.5} p_0 = 10^{4.5} p_0$ ，故 $p_1 \leq 100 p_2$ ，D 正确。答案 ACD。

易错点：把声压级范围换算成 p 的范围时端点方向要小心；B 选项“ $p_2 > 10 p_3$ ”恰好卡在 p_2 上界 $10^3 p_0 = 10 p_3$ ——等号取不到、严格大于必不成立，故选“不成立”而非“成立”。

B6. (2023 · 新课标 II 卷) B。

思路：偶函数先看定义域关于原点对称，再用 $f(-x) = f(x)$ 列式求 a 。

解析：定义域由 $\frac{2x-1}{2x+1} > 0$ 决定，即 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{1}{2}$ ，关于原点对称。由

$$f(-x) = (-x+a) \ln \frac{-2x-1}{-2x+1} = (a-x) \ln \frac{2x+1}{2x-1} = (x-a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$$

$f(-x) = f(x)$ 得 $x+a = x-a$ ，故 $a=0$ 。选 B。

为什么错：最容易错在 $\ln \frac{-2x-1}{-2x+1} = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = -\ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 这一步——分子分母同乘 -1 后是“取倒数”，真数互为倒数，对数差一个负号；把 $(a-x)$ 改写成 $(x-a)$ 正是这个负号。若丢掉它，就会解出 $a = \frac{1}{2}$ 之类的错误答案。

M4. 不对。正确解答： $x=1$ ($x=-2$ 必须舍去)。

思路：合并对数解方程后，**代回验证真数大于 0** 是必经步骤——真数是定义的一部分。

解析：由对数定义先得 $x > 0$ 且 $x+1 > 0$ ，即 $x > 0$ 。合并： $\log_2[x(x+1)] = 1$ ， $x(x+1) = 2$ ， $x^2+x-2=0$ ，得 $x=1$ 或 $x=-2$ 。代回验真数： $x=-2$ 时 $x=-2 < 0$ 、 $x+1=-1 < 0$ ，真数非正，舍去； $x=1$ 时真数为 2、1，均大于 0。故方程的解为 $x=1$ 。

为什么错：把 $x=-2$ 写进答案，是因为只算了代数方程、没验真数。对数方程与普通方程最大的不同就在此—— $x=-2$ 使 $\log_2 x$ 本身无意义，“算出来”的数不是“定义域内”的数。求完必须代回，或解前就限定 $x > 0$ 。

4.14 例题详解

例题 4.5 解析

思考路径：设 $f(x) = x^3 - 2$ ，先验证 $f(1) \cdot f(2) < 0$ 确认零点在 $(1, 2)$ ，再逐次取中点缩半，直到区间长小于精确度 0.25。

规范解： $f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ ， $f(2) = 8 - 2 = 6 > 0$ ， $f(1)f(2) < 0$ ，零点在 $(1, 2)$ 。

次数	区间	中点 m	$f(m)$	新区间
1	(1, 2)	1.5	$1.375 > 0$	(1, 1.5)
2	(1, 1.5)	1.25	$-0.046875 < 0$	(1.25, 1.5)
3	(1.25, 1.5)	1.375	$0.5996 > 0$	(1.25, 1.375)

此时区间长 $0.125 < 0.25$ ，取中点 $m = 1.3125$ ，近似解为 $x \approx 1.3$ 。

易错点：每步要判断“ $f(m)$ 与哪端同号”，零点在与 $f(m)$ 异号的那半区间；本题 $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ ，1.3 与真值误差约 $0.04 < 0.25$ ，符合精确度。

4.15 知识点 (1) 函数的零点与二分法详解

A17. 有零点。

思路：算区间两端函数值，看是否异号。

解析： $g(2) = \lg 2 + 2 - 3 = \lg 2 - 1 \approx 0.301 - 1 < 0$ ， $g(3) = \lg 3 > 0$ 。 $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连续， $g(2)g(3) < 0$ ，由零点存在性定理， $g(x)$ 在 $(2, 3)$ 内有零点。

A18. C。

思路：计算区间端点的函数值，找异号区间。

解析： $f(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ ， $f(2) = 4 - 3 = 1 > 0$ ， $f(1)f(2) < 0$ ，故零点在 $(1, 2)$ 。选 C。

易错点： $f(0) = 1 - 3 = -2$ 、 $f(1) = -1$ 同号不能选；端点判断要逐段算，别凭 2^x 与 3 的大小“目测”。

4.16 知识点 (2) 指数对数增长模型详解

A19. 64 个。

思路：每 30 分钟翻一倍，3 小时含 6 个 30 分钟，即 2^6 。

解析：3 小时 = 180 分钟 = 6×30 分钟，1 个细胞经 6 次分裂变成 $2^6 = 64$ 个。

A20. 12.5 mg。

思路：半衰期 2 天，6 天含 3 个半衰期，含量乘以 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 。

解析： $100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6/2} = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 12.5$ mg。

C1. (1) $y = 500 \times 1.012^t$ ；(2) 约 58 年。

思路：年增长率为固定比例，用指数模型；翻一番即 $y = 1000$ ，取对数解指数方程。

解析：(1) $y = 500(1 + 1.2\%)^t = 500 \times 1.012^t$ 。(2) $500 \times 1.012^t = 1000 \Rightarrow 1.012^t = 2$ ，两边取常用对数： $t \lg 1.012 = \lg 2$ ， $t = \frac{\lg 2}{\lg 1.012} \approx \frac{0.3010}{0.00518} \approx 58.1$ 。故约 58 年后人口翻一番。

C2. (1) $y = 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$; (2) 6 小时剩 200 mg, 12 小时剩 100 mg; (3) 约 18 小时后降到 50 mg。

思路: 半衰期模型直接套公式; 降到 50 mg 即 $y = 50$, 把 $\frac{1}{8}$ 写成 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 比指数。

解析: (1) 半衰期 $T = 6$ 小时, $y = 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$ 。(2) $t = 6$: $y = 400 \times \frac{1}{2} = 200$ mg; $t = 12$: $y = 400 \times \frac{1}{4} = 100$ mg。(3) 令 $400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 50$, 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\frac{t}{6} = 3$, $t = 18$ 小时。

本章综合详解

S1 解析

思考路径: 把 12 与 $\frac{2}{3}$ 拆成 2、3 的幂与商, 用对数运算性质表示; a^{2m+n} 用恒等式 $a^{\log_a N} = N$ 还原。

规范解: (1) $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$, $\log_a 12 = 2\log_a 2 + \log_a 3 = 2m + n$; $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3 = m - n$ 。(2) $a^{2m+n} = a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n$ 。又 $a^m = a^{\log_a 2} = 2$, $a^n = a^{\log_a 3} = 3$, 故 $a^{2m+n} = 2^2 \times 3 = 12$ 。

易错点: 第 (2) 问是“对数恒等式的逆向用法”——看到 a^m 要能想到 $a^m = a^{\log_a 2} = 2$, 别把 m 、 n 当普通代数数硬代。

S2 解析

思考路径: (1) 指数函数单调性由 a 决定, 最大值在区间端点取到, 需按 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 分类。(2) 对数不等式化同底, 注意真数与底数两个约束。

规范解: (1) 若 $a > 1$, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上递增, $f(2) = a^2 = 4$, 得 $a = 2$ ($a > 0$ 取正); 若 $0 < a < 1$, $f(x)$ 递减, 最大值 $f(0) = 1 \neq 4$, 矛盾。故 $a = 2$ 。(2) $g(x) = \log_2 x \leq 2 = \log_2 4$, 底数 $2 > 1$ 递增, 得 $x \leq 4$; 又真数 $x > 0$ 。解集为 $(0, 4]$ 。

易错点: 第 (1) 问若漏掉分类, 会默认 $a > 1$ 直接得 $a = 2$ ——本题碰巧正确, 但“指数函数底数参数化”必须讨论单调方向; 第 (2) 问真数 $x > 0$ 这一约束别忘。

第五章 三角函数

5.1 例题详解

例题 5.1 解析

思考路径：角度弧度互化用比例锚点 $180^\circ = \pi$ ，乘 $\frac{\pi}{180}$ 或 $\frac{180}{\pi}$ ；弧长与面积直接用弧度制公式。

规范解：(1) $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ ； $\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 210^\circ$ 。(2) 弧长 $l = \alpha r = \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$ ；扇形面积 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 4^2 = \frac{8\pi}{3}$ 。

易错点：弧长与面积公式中的 α 必须是弧度制，把 60° 直接代进 $l = \alpha r$ 会错；应先化成 $\frac{\pi}{3}$ 。

5.2 知识点 (1) 任意角与弧度制详解

A1. $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ ； $\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = 330^\circ$ 。

思路：按比例互化，约分到位。

解析： $225^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$ ； $\frac{11\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 330^\circ$ 。

A2. $\frac{20\pi}{3} \text{ cm}$ 。

思路：分针 20 分钟转一圈的 $\frac{1}{3}$ ，即 $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ 弧度，再乘半径。

解析：20 分钟分针转过 $\frac{20}{60} \times 360^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ 。弧长 $l = \alpha r = \frac{2\pi}{3} \times 10 = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$ 。

A3. 弧长 $\frac{4\pi}{3}$ ，面积 $\frac{4\pi}{3}$ 。

思路：圆心角先化成弧度，再代 $l = \alpha r$ 与 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ 。

解析： $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ 。 $l = \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}$ ； $S = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 2^2 = \frac{4\pi}{3}$ 。

易错点： 120° 不化成弧度直接代公式会错——面积公式里 α 必须是弧度。

5.3 知识点 (2) 弧长与扇形面积 (文化情境) 详解

B1. (2022 · 全国甲卷 · 理) B。

思路：会圆术公式 $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$ ——先由 $\triangle AOB$ 求弦长 AB ，再由 O, C, D 共线求出 $CD = OD - OC$ ，代入计算。

解析： $OA = OB = 2$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，故 $AB = OA = OB = 2$ (等边三角形)。 C 为弦 AB 中点， $OC \perp AB$ 且 $OC = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ (或由等边三角形高为 $\sqrt{3}$)。 D 在 $\widehat{AB}$ 上， $OD = OA = 2$ ，故 $CD = OD - OC = 2 - \sqrt{3}$ 。

$$s = AB + \frac{CD^2}{OA} = 2 + \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{11 - 4\sqrt{3}}{2}$$

选 B。

易错点：(1) AB 是弦长不是弧长—— $\triangle AOB$ 是等边三角形， $AB = 2$ ；(2) CD 是“矢”(弧的高)： D 在弧上、 C 在弦上， $CD = OD - OC$ ，其中 OC 是等边三角形的高 $\sqrt{3}$ ，别把 OC 当 $\frac{AB}{2}$ 。

5.4 例题详解

例题 5.2 解析

思考路径：(1) 先算 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，再用三个比值公式；用“点在第四象限，余弦为正”核对符号。(2) 由平方关系求 $\cos^2 \alpha$ ，开方按象限取负。

规范解：(1) $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ ，故 $\sin \alpha = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\tan \alpha = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$ 。(2)

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ， $\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ 。 α 在第二象限，余弦为负， $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ 。 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ 。

易错点：第(2)问 $\sqrt{\frac{9}{25}}$ 有正负两个值，忘按象限定号写 $\frac{3}{5}$ 是高频错误；3、4、5 勾股数组让运算可口算。

5.5 知识点 (1) 任意角三角函数的定义详解

A4. $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ， $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ， $\tan \beta = -\frac{12}{5}$ 。

思路： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，注意 P 在第二象限 (余弦为负)。

解析： $r = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ ， $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ， $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ， $\tan \beta = -\frac{12}{5}$ 。

A5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、1。

思路：把角“归位”到 $0 \sim 2\pi$ ，在单位圆上找特殊点。

解析: $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 。

5.6 知识点 (2) 同角三角函数的基本关系详解

A6. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 。

思路: 由 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$ 设 $\sin \alpha = 3k$ 、 $\cos \alpha = -4k$, 代入 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 解 k , 再由象限定号。

解析: 设 $\sin \alpha = 3k$, $\cos \alpha = -4k$ ($k > 0$, 因第二象限正弦正、余弦负)。 $(3k)^2 + (-4k)^2 = 1$, $25k^2 = 1$, $k = \frac{1}{5}$ 。故 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 。

易错点: 用 $\tan$ 设比时符号方向要按象限先定好——第二象限 $\cos \alpha$ 为负, 设成 $-4k$ 而不是 $+4k$; k 取正根。

M1. (1) 不相等。(2) 不对, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 。

思路: (1) 没有单位符号的数字一律按弧度理解, 30 是约 1718.9° , 和 30° 差得远; (2) 开方必须按象限定号。

解析: (1) $30 \text{ rad} = 30 \times \frac{180}{\pi} \approx 1718.9^\circ$, 约转 4.77 圈, $\sin 30 \approx -0.988$; 而 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。两者不相等。(2) $\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$ 。 α 在第三象限, 余弦为负, 故 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 。

为什么错: (1) 是“没单位就是度”的初中惯性——弧度制下“不带单位即弧度”, 30 和 30° 是两码事。(2) 是“开方天然为正”—— $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 只给出 $\cos \alpha$ 的绝对值, 正负号必须由象限决定, 第三象限“三正切”, 余弦为负。

5.7 例题详解

例题 5.3 解析

思考路径: 先去掉整圈或把角写成 $\pi \pm \alpha$ 、 $-\alpha$ 型, 再对照诱导公式; 符号用“符号看象限”核对 (把 α 当锐角)。

规范解: (1) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ 。(2) $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ 。(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ 。(4) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。

易错点: 210° 与 $\frac{7\pi}{6}$ 是同一个角 (都在第三象限), 第三象限“三正切”, 正弦为负, 两处结果都是 $-\frac{1}{2}$ ——用象限核对符号是防错关键。

5.8 知识点 (1) 诱导公式与求值化简详解

A7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 。

思路：分别化成 $360^\circ - 60^\circ$ 、 $\pi - \frac{\pi}{6}$ 、 $\pi + \frac{\pi}{3}$ 型。

解析： $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 。

A8. $\cos^2 \alpha$ 。

思路：逐项用诱导公式，最后用 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 化简。

解析： $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ， $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ， $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ，故原式 $= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \cos^2 \alpha$ 。

A9. $\frac{1}{2}$ 。

思路：先用公式去整圈（加 3 圈 1080° ），再用 $\pi - \alpha$ 型诱导公式。

解析： $-930^\circ + 3 \times 360^\circ = 150^\circ$ ，故 $\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。

易错点：负角先去整圈（加正圈数）化为 $0 \sim 2\pi$ 内的正角，再套诱导公式——别直接在 150° 与 30° 之间想当然。

M2. 不正确。正确结果： $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 。

思路：口诀“符号看象限”看的是**左边原函数**（ $\cos$ ）在 $\pi + \alpha$ 所在象限的符号——把 α 当锐角， $\pi + \alpha$ 在第三象限，余弦为负。

解析： $\pi = 2 \times \frac{\pi}{2}$ 是偶数倍，不变名（余弦还是余弦）；把 α 当作锐角， $\pi + \alpha$ 在第三象限，第三象限“三正切”，余弦为负，故 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 。验证：取 $\alpha = 60^\circ$ ， $\cos(180^\circ + 60^\circ) = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ ，而 $-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ，一致。

为什么错：同学判断出“ $\pi + \alpha$ 在第三象限、余弦为负”，却把结论写成了正号——“符号看象限”判定的是**最终结果要不要加负号**：第三象限余弦是负的，所以结果必须在 $\cos \alpha$ 前加负号。另外题目条件“ α 是第二象限角”是用来干扰的——口诀中 α 一律当锐角处理，与 α 实际所在象限无关。

5.9 例题详解

例题 5.4 解析

思考路径：(1) 套周期与值域公式；(2) 令 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ ，先由 $x \in [0, \pi]$ 定出 t 的范围，再在 t 范围内找 $\sin t$ 的递增区间，反解 x 。

规范解：(1) 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ； $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in [-1, 1]$ ，故值域为 $[-2, 2]$ 。(2) $t = 2x -$

$\frac{\pi}{3}$, 由 $x \in [0, \pi]$ 得 $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 。 $\sin t$ 的递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, 与 t 的范围取交集: $k=0: t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 反解 $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$; $k=1: t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$, 反解 $\frac{3\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$, 得 $\frac{11\pi}{12} \leq x \leq \pi$ 。故在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$ 。

易错点: 不能照抄 $\sin x$ 的单调区间——必须“换元 + 解不等式”; 且 t 的取值被 $x \in [0, \pi]$ 限定, 超出范围的递增段不能算。

5.10 知识点 (1) 周期、值域与单调性详解

A10. $\frac{2\pi}{3}$ 、 6π 。

思路: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω 是 x 的系数。

解析: $\sin 3x: T = \frac{2\pi}{3}$; $\cos \frac{x}{3}: T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$ 。

A11. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

思路: 正弦的递增区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 与 $[-\pi, \pi]$ 取交集。

解析: 取 $k=0$ 得 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (在 $[-\pi, \pi]$ 内); $k=\pm 1$ 的区间超出范围。

A12. 最大值 3 (当 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$); 最小值 -1 。

思路: $\sin x \in [-1, 1]$, 前有系数 -2 , 取最大需要 $\sin x$ 最小。

解析: $\sin x = -1$ 时 $y_{\max} = 1 - 2 \times (-1) = 3$, 此时 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\sin x = 1$ 时 $y_{\min} = 1 - 2 \times 1 = -1$ 。

A13. 最大值 3, 最小值 -3 , 最小正周期 π 。

思路: $y = 3 \cos 2x$ 的振幅 $A = 3$, $\omega = 2$, 周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

解析: $\cos 2x \in [-1, 1]$, 故 $y_{\max} = 3$ 、 $y_{\min} = -3$, $T = \pi$ 。

B2. (2022 · 新高考 I 卷) A。

思路: 由周期范围定 ω 范围; 图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 说明 $b = 2$ 且 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi$, 联立解 ω 。

解析: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 由 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ 得 $2 < \omega < 3$ 。图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 故 $b = 2$, 且 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi$ 。结合 $2 < \omega < 3$ 取 $k = 4$, 得 $\omega = \frac{5}{2}$ 。

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$$

选 A。

易错点: 中心对称点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 同时给两个信息——纵坐标是中线上移量 b , 横坐标是 $\sin$ 的

零点位置；解 ω 时要回到周期范围 $2 < \omega < 3$ 里试整数 k ，别漏掉 ω 的范围约束。

B3. (2022 · 全国乙卷 · 理) 3。

思路：由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 得 $f(T) = \cos(2\pi + \varphi) = \cos \varphi$ ，解出 φ ；再由零点列式解 ω 的最小值。

解析： $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ， $f(T) = \cos(\omega T + \varphi) = \cos(2\pi + \varphi) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。由 $0 < \varphi < \pi$ 得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。
 $x = \frac{\pi}{9}$ 为零点： $\cos\left(\frac{\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，故 $\frac{\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)，解得 $\omega = 3 + 9k$ 。 $\omega > 0$ ，取 $k = 0$ 得 $\omega_{\min} = 3$ 。

为什么错：关键陷阱在 $f(T)$ 的意义—— T 是周期， $\omega T = 2\pi$ ，代进函数后 $\cos$ 的相位变成 $2\pi + \varphi$ ，不是“把 T 当普通自变量”直接算。零点列式后 $\omega = 3 + 9k$ 要由 $\omega > 0$ 取最小， k 从 0 起，别从负数取。

M3. D。

思路：逐项核对周期公式与单调区间算法。

解析：A 错： $\sin 2x$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，不是 4π 。B 错： $\tan 2x$ 的周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，不是 2π 。C 错：令 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ ， $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ 解得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ，照抄 $\sin x$ 的区间就错了。D 正确： $\cos 2x$ 的周期 π 。

为什么错：A、B 是把 $T = 2\pi\omega$ 或 $T = \frac{\omega}{2\pi}$ 背反了—— ω 越大图象越“密”、周期越小， $\omega = 2$ 时一个 2π 里装两个周期，故 $T = \pi$ 。C 是经典——把 $\sin x$ 的原版单调区间直接抄给 $\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ，没有换元反解 x 。

5.11 知识点 (2) 零点与极值点的个数 (新高考趋势) 详解

A14. 5 个。

思路：由 $\sin 2x = 0$ 列方程，数解在 $[0, 2\pi]$ 内的个数。

解析： $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$ ， $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)。在 $[0, 2\pi]$ 内 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ，即 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ，共 5 个零点。

易错点： $x = 0$ 与 $x = 2\pi$ 两个端点都是零点，别漏； x 每半周期过一个零点， $[0, 2\pi]$ 内 $\sin 2x$ 走两个完整周期，含端点共 5 个。

B4. (2023 · 新课标 I 卷) $[2, 3)$ 。

思路： $f(x) = 0 \iff \cos \omega x = 1 \iff \omega x = 2k\pi$ ，把零点写成 $x = \frac{2k\pi}{\omega}$ ，数它在 $[0, 2\pi]$ 内的个数。

解析：零点为 $x = \frac{2k\pi}{\omega}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。恰有 3 个零点落在 $[0, 2\pi]$ ，即 $k = 0, 1, 2$ 满足而 $k = 3$ 不满足：

$$\frac{4\pi}{\omega} \leq 2\pi \Rightarrow \omega \geq 2, \quad \frac{6\pi}{\omega} > 2\pi \Rightarrow \omega < 3$$

故 $\omega \in [2, 3)$ 。

易错点： $x = 0$ 恒为零点 ($k = 0$)，要数“从 $k = 1$ 起的正整数解个数”； $k = 3$ 对应的 $x =$

$\frac{6\pi}{\omega}$ 恰好落在 2π 上时 ($\omega = 3$) 会多出一个零点, 所以 $\omega = 3$ 不能取 (右端开)。

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理) C。

思路: 换元 $t = \omega x + \frac{\pi}{3}$, $t \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ 。正弦函数极值点在 $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 零点在 $t = k\pi$, 数点列不等式。

解析: 极值点依次为 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$; 零点依次为 $\pi, 2\pi, 3\pi$ 。要“恰有三个极值点、两个零点”, 即 t 的范围包含 $\frac{5\pi}{2}$ (第三个极值点) 但不含 3π (第三个零点):

$$\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$$

解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$ 。答案 C。

为什么错: (1) 极值点与零点都是“在开区间 $(0, \pi)$ 内”计数, 右端点 $t = \omega\pi + \frac{\pi}{3}$ 恰好等于 3π 时 ($\omega = \frac{8}{3}$) 因区间开、 3π 不算零点, 仍只有两个零点, 所以右端可以取等; 而恰好等于 $\frac{5\pi}{2}$ 时第三个极值点被“开掉”, 所以左端严格小于。(2) 只数零点、漏数极值点, 或两个条件只满足其一, 是本题最常见的失分点——两个条件必须同时满足。

B6. (2024 · 新课标 II 卷) BC。

思路: 分别求出两函数的零点、最大值、周期、对称轴, 逐项对照。

解析: $f(x) = \sin 2x$ 的零点为 $x = \frac{k\pi}{2}$; $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的零点为 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, 即 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, 零点不同, A 错。两函数最大值都为 1, B 对。周期都为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, C 对。 f 的对称轴 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, g 的对称轴 $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, 不同, D 错。答案 BC。

易错点: 相位差 $\frac{\pi}{4}$ 会让零点和对称轴全部平移 $\frac{\pi}{8}$ (除以 $\omega = 2$), 所以“有相同的零点/对称轴”必错; 但最大值、周期只由 A 与 ω 决定, 不受 φ 影响——按“哪些量依赖 φ ”来分类判断最快。

5.12 例题详解

例题 5.5 解析

思考路径: (1) 把 75° 拆成 $45^\circ + 30^\circ$, 套正弦和角公式; (2) 提取 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 用辅助角公式合并, 最大值即幅度系数。

规范解: (1) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 。(2) $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ 。取 φ 使 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 最大值 2。

易错点: (1) 别把 $\sin(45^\circ + 30^\circ)$ 当 $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ (约 $1.207 \neq 0.966$); (2) 辅助角的幅度系数 2 是最大值, 漏掉它就会错答“最大值 $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ ”。

5.13 知识点 (1) 两角和与差、二倍角公式详解

A15. $\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

思路：正弦二倍角逆向用，余弦二倍角直接套。

解析： $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ； $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

A16. $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$ 。

思路：先由平方关系求 $\cos \alpha$ (第一象限取正)，再套二倍角； $\cos 2\alpha$ 用 $1 - 2\sin^2 \alpha$ 更省事。

解析： $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$ 。 $\sin 2\alpha = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$ ； $\cos 2\alpha = 1 - 2 \times \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$ 。

A17. 1。

思路：降幂公式 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ 代入合并。

解析： $\cos 2\alpha + 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha) = 1$ 。

B7. (2023 · 新课标 I 卷) B。

思路：先由 $\sin(\alpha - \beta)$ 的展开式与 $\cos \alpha \sin \beta$ 联立出 $\sin \alpha \cos \beta$ ，进而求 $\sin(\alpha + \beta)$ ，再用二倍角求 $\cos(2\alpha + 2\beta)$ 。

解析： $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ ，又 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$ ，相加得 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$ 。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

选 B。

易错点：关键是“和角与差角公式的联立”——已知 $\sin(\alpha - \beta)$ 与 $\cos \alpha \sin \beta$ ，把两式相加/相减就能拆出 $\sin \alpha \cos \beta$ ，再拼出 $\sin(\alpha + \beta)$ ；别想着直接展开 $\cos(2\alpha + 2\beta)$ ，绕远路。

5.14 知识点 (2) 辅助角公式详解

A18. $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，最大值 $\sqrt{2}$ ，最小值 $-\sqrt{2}$ 。

思路：提取 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，辅助角取 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 。

解析： $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。 $\sin$ 有界 $[-1, 1]$ ，故 $y_{\max} = \sqrt{2}$ 、 $y_{\min} = -\sqrt{2}$ 。

M4. D。

思路：逐项用辅助角与二倍角公式核对。

解析：A 错： $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ ，最大值是 $\sqrt{2}$ 不是 2。B 错： $3 \sin x + 4 \cos x =$

$5\sin(x+\varphi) \leq 5$, 幅度系数是 $\sqrt{3^2+4^2}=5$, 不是 $3+4=7$ 。C 错: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, 把 $\cos\alpha$ 丢掉是错的。D 正确: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ 。

为什么错: A、B 是经典——辅助角公式的幅度系数是 $\sqrt{a^2+b^2}$ (直角三角形的斜边), 不能想当然用 $a+b$; A 里 $\sin x$ 与 $\cos x$ 不能同时取到 1 (平方和为 1), 最大只能是 $\sqrt{2}$ 。C 是二倍角记混——正弦二倍角是“二倍正余”, $\cos\alpha$ 一项不能省。

5.15 例题详解

例题 5.6 解析

思考路径: (1) 对照 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 直接读参数。(2) 图象变换两条路径: 先平移后伸缩、先伸缩后平移——注意平移量要除以 ω 。

规范解: (1) 振幅 $A = 3$; 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; 初相 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 。(2) 路径一 (先平移后伸缩): (1) 把 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$, 得 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; (2) 把图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; (3) 把纵坐标伸长为原来的 3 倍, 得 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。(若先伸缩后平移: 先缩横坐标为 $\frac{1}{2}$ 得 $y = \sin 2x$, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$, 因为 $2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + \frac{\pi}{3}$ 。)

易错点: 平移量是对 x 操作的, 先伸缩后平移时平移量是 $\frac{\pi}{6}$ 而不是 $\frac{\pi}{3}$ ——这是相位/初相最典型的坑。

5.16 知识点 (1) 参数 A、 ω 、 φ 的意义详解

A19. 振幅 4, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, 初相 $\frac{\pi}{3}$ 。

思路: 直接对照 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 读参数。

解析: $A = 4$; $T = 4\pi$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 。

5.17 知识点 (2) 图象变换详解

A20. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。

思路: 先平移后伸缩——左移量直接加在 x 上, 再横向压缩 $\omega = 2$ (此时平移量不除 ω)。

解析: 左移 $\frac{\pi}{4}$ 得 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 把 x 换成 $2x$, 得 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。

易错点: 先平移后伸缩时, 相位 $\frac{\pi}{4}$ 保持不变 (不加除 ω 的换算); 若换作“先伸缩后平移”, 平移量就要改成 $\frac{\pi}{8}$ ——两条路径的平移量不同, 别混。

5.18 例题详解

例题 5.7 解析

思考路径：半径 45 米是振幅，轮心离地 50 米是中线；从最低点出发，最低点高度是 5 米，用“50 减去一个余弦项”直接写出模型，再代“里程碑时刻”验证。

规范解：(1) 半径 $r = 45$ ，振幅 $A = 45$ ，中线 $b = 50$ ；周期 $T = 10$ 分钟， $\omega = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ 。轿厢从最低点出发， $h(0) = 50 - 45 = 5$ ，故

$$h(t) = 50 - 45 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$$

(2) 最大值 $= 50 + 45 = 95$ 米（轿厢转到最高点），最小值 $= 50 - 45 = 5$ 米（最低点）。检验： $t = 0$ ： $50 - 45 \cos 0 = 5$ ； $t = 5$ ： $50 - 45 \cos \pi = 95$ ； $t = 10$ ：回到 5。

易错点：从最低点出发用余弦形式 $b - A \cos(\omega t)$ 最直接；若强行用正弦形式 $\sin(\omega t + \varphi)$ 则 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ，容易在符号上出错。

5.19 知识点 (1) 三角函数模型的实际应用详解

A21. 振幅 8 cm，最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ 秒， $x(2) = 8$ cm。

思路：从 $x = A \sin(\omega t)$ 直接读参数；求值代入特殊角。

解析： $A = 8$ ； $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ 秒； $x(2) = 8 \sin \frac{\pi}{2} = 8$ cm。

C1. (1) $h(t) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ ；(2) 35 米；(3) $\frac{8}{3}$ 分钟。

思路：振幅 30、中线 35、周期 8 分钟 ($\omega = \frac{\pi}{4}$)，最低点出发；后两问代入求值、解方程。

解析：(1) 半径 30、轮心离地 35、 $\omega = \frac{\pi}{4}$ ， $h(t) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ 。(2) $h(2) = 35 - 30 \cos \frac{\pi}{2} = 35 - 0 = 35$ 米（转到轮心高度）。(3) 令 $35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 50$ ，得 $\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = -\frac{1}{2}$ 。在第一个周期内 $\frac{\pi}{4}t = \frac{2\pi}{3}$ ，故 $t = \frac{8}{3} \approx 2.67$ 分钟。检验： $t = \frac{8}{3}$ 时 $\frac{\pi}{4}t = \frac{2\pi}{3}$ ， $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ， $h = 35 + 15 = 50$ 。

C2. (1) 振幅 6 cm，周期 $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ 秒，频率 $f = \frac{1}{6}$ Hz；(2) $x(0) = 3$ cm， $x(1) = 6$ cm。

思路：从 $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ 直接读参数；求值代入特殊角。

解析：(1) $A = 6$ cm； $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ 秒； $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6}$ Hz。(2) $x(0) = 6 \sin \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ cm； $x(1) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 6 \sin \frac{\pi}{2} = 6$ cm。

本章综合详解

S1 解析

思考路径：(1) 辅助角公式把 $\sin x + \cos x$ 合并；(2) 换元看 $x + \frac{\pi}{4}$ 的取值范围。

规范解： (1) $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 。振幅 $\sqrt{2}$ ，最小正周期 $T = 2\pi$ 。(2) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 时， $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ 。在该区间内 $\sin$ 先增后减，最小值取在端点 $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，最大值取在中点 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ 。故

$$f_{\min} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \quad f_{\max} = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

易错点： 闭区间最值不能只比端点—— $x = \frac{\pi}{4}$ 时 $f(x)$ 达到最大值 $\sqrt{2}$ ，此时 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 在区间内。

S2 解析

思考路径： 相邻两条对称轴之间的距离是半个周期，先定 T 再定 ω ；单调区间用换元解不等式，再与 $[0, \pi]$ 取交集。

规范解： (1) 相邻对称轴距离 $= \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，故 $T = \pi$ 。由 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ 得 $\omega = 2$ ， $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ 。(2) 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ，解得

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$$

在 $[0, \pi]$ 上： $k = 0$ 得 $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ ； $k = 1$ 得 $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right]$ ，与 $[0, \pi]$ 交集为 $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$ 。故单调递增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$ 。

易错点： 对称轴距离是 $\frac{T}{2}$ 不是 T ；单调区间解出的是 x 的范围后必须与题目给定区间取交集，别把 $k = 1$ 那段在 $[0, \pi]$ 外的部分写进去。

第六章 数列

6.1 例题详解

例题 6.1 解析

思考路径：由前几项写通项——先看每项与序号 n 的对应关系。第 (1) 组是平方数，第 (2) 组是奇数，第 (3) 组是“ $\frac{1}{n}$ 的正负交替”，交替用 $(-1)^{n+1}$ 实现 (n 为奇数时为正)。

规范解：(1) 1, 4, 9, 16, 25 分别是 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ ，故 $a_n = n^2$ 。(2) $a_n = 2n - 1$ 。(3) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 。检验： $n = 1$ 得 1， $n = 2$ 得 $-\frac{1}{2}$ ， $n = 3$ 得 $\frac{1}{3}$ ， $n = 4$ 得 $-\frac{1}{4}$ ，均吻合。

易错点：正负交替数列的符号因子记反—— $(-1)^{n+1}$ 使奇数项为正， $(-1)^n$ 使偶数项为正，写完后必须代 $n = 1, 2$ 验证。

例题 6.2 解析

思考路径： $a_1 = S_1$ ； $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，最后单独验证 $n = 1$ 是否满足。

规范解： $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$ 。当 $n \geq 2$ 时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)] = n^2 + 3n - (n^2 - 2n + 1 + 3n - 3) = 2n + 2$$

验证： $2 \times 1 + 2 = 4 = a_1$ ，公式对 $n = 1$ 也成立，故 $a_n = 2n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。复核： $S_3 = 9 + 9 = 18$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = 4 + 6 + 8 = 18$ ✓。

易错点：忘了把 $n = 1$ 代回 $2n + 2$ 验证——本例恰好成立所以能合并成一段；若 S_n 带常数项 (如 $n^2 + n + 2$)， a_1 就不满足，必须分段写 (见 M1)。

例题 6.3 解析

思考路径：递推公式给“规则”，从 a_1 起步逐项代。

规范解： $a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$ ， $a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$ ， $a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$ 。前 4 项为 1, 3, 7, 15，比 2, 4, 8, 16 各少 1，故猜测 $a_n = 2^n - 1$ 。验证： $a_1 = 2 - 1 = 1$ ✓， $a_4 = 16 - 1 = 15$ ✓。

易错点：猜测不是证明—— $a_n = 2^n - 1$ 还需用归纳法或“构造新等比”严格验证 (见 S3)。

6.2 知识点 (1) 数列的概念与通项公式详解

A1. A。

思路：各项与 n 的平方挂钩。

解析： $2 = 1^2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 10 = 3^2 + 1, 17 = 4^2 + 1, 26 = 5^2 + 1$, 故 $a_n = n^2 + 1$ 。

A2. C。

思路：直接代入。

解析： $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{10} = 29, a_1 + a_2 + a_{10} = 2 + 5 + 29 = 36$ 。

A3. A。

思路：观察相邻两项之差——2, 3, 4, 5 依次递增, 提示与平方数 n^2 挂钩。

解析： $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。检验： $n = 3$ 得 6 ✓。易错点：三角数 $\frac{n(n+1)}{2}$ 与 $\frac{n(n-1)}{2}$ 差一项, 写完后代 $n = 1, 2$ 验证即可分辨。

A4. A。

思路：正负交替用 $(-1)^{n-1}$ 。

解析： $n = 1$ 时 $(-1)^0 = 1, n = 2$ 时 $(-1)^1 = -1$, 交替成立。C、D 中 $(-1)^{n+2} = (-1)^n, (-1)^{n-2} = (-1)^n, n = 1$ 时为 -1 , 均不对。易错点： $(-1)^n$ 与 $(-1)^{n-1}$ 恰好反号, 把“首项为正”想成“首项为负”就会选 B。

6.3 知识点 (2) 由前 n 项和求通项详解

A5. A。

思路： S_n 求 $a_n, n = 1$ 单独验证。

解析： $a_1 = S_1 = 3$ 。 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + n) - [2(n-1)^2 + (n-1)] = 4n - 1$ 。 $n = 1$ 时 $4 \times 1 - 1 = 3 = a_1$, 成立, 故 $a_n = 4n - 1$ 。

M1 解析：

思路：直接套 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 默认了 S_0 有意义, 但 S_0 无定义—— $n = 1$ 必须单独算 S_1 。

解析： $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 2 = 4$ 。当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 2) - [(n-1)^2 + (n-1) + 2] = 2n$$

检验 $n = 1: 2 \times 1 = 2 \neq 4$, 公式对 $n = 1$ 不成立。故

$$a_n = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$$

为什么错：小明把“ $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ”当成了对一切 n 成立。 S_0 没有定义, $S_1 - S_0$ 根本算不了, 所以 a_1 必须用 $a_1 = S_1$ 单独算。**习惯：**由 S_n 求 a_n , 永远先写 $a_1 = S_1$, 再用 $S_n - S_{n-1}$ 算 $n \geq 2$ 部分, 最后验证能否合并。本例因 S_n 带常数项 +2, 合并失败, 必须分段。

6.4 知识点 (3) 递推公式与情境应用详解

B1. (2022 · 全国乙卷理 · T4) D。

思路：连分数数列——先整体观察单调规律，再用特殊值排除。所有 b_n 都是 $1 + \frac{1}{(\cdot)}$ 的形式，分子分母“层层套”。

解析：设 $c_n = b_n - 1$ 。比较可知：奇数下标项递减 ($b_1 > b_3 > b_5 > b_7 > \cdots$)，偶数下标项递增 ($b_2 > b_4 > b_6 > b_8 > \cdots$)，且相邻两项 $b_{2m-1} > b_{2m}$ 。既然规律对任意 $a_k \in \mathbb{N}^*$ 都成立，取最简单情形 $a_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) 代入验证选项：

$$b_1 = 2, b_2 = \frac{3}{2}, b_3 = \frac{5}{3}, b_4 = \frac{8}{5}, b_5 = \frac{13}{8}, b_6 = \frac{21}{13}, b_7 = \frac{34}{21}, b_8 = \frac{55}{34}$$

A: $b_1 = 2 < b_5 \approx 1.625$ 不成立；B: $b_3 \approx 1.667 < b_8 \approx 1.618$ 不成立；C: $b_6 \approx 1.615 < b_2 = 1.5$ 不成立；D: $b_4 = 1.6 < b_7 \approx 1.619$ 成立。答案 D。

为什么错：学生常见错误是“试图把每一项都硬算出来比较”——连分数嵌套下去项数无穷，硬算必死。正确路径是**先找递推规律（奇偶项各自的单调性）**，再用特殊值一一代入排除；连分数大小比较的直观依据：分母里“多套一层正分数”，值一定更小，据此可归纳出奇偶项各自的单调方向。另外注意这是情境题，航天背景只是外壳，数学内核是连分数单调性，别被长题干吓住。

易错点：连分数从右往左算；写 b_n 时注意层数—— b_4 分母套到 $\frac{1}{a_4}$ ， b_7 套到 $\frac{1}{a_7}$ ，层数别写错。

C1. 解析：

思考路径：递推公式逐项生长；“前 n 项和 $+1$ ”常与“第 $n+2$ 项”挂钩——斐波那契和的性质 $\sum F_i = F_{n+2} - 1$ 用归纳法一步到位。

规范解：(1) $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$ 。(2) $F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1$ ； $F_1 + \cdots + F_4 = 7 = F_6 - 1$ 。猜想： $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ 。(3) 证明：奠基 $n = 1$ ： $F_1 = 1 = F_3 - 1 = 2 - 1$ ✓。递推：假设 $F_1 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$ ，则 $F_1 + \cdots + F_{k+1} = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$ ，即 $n = k + 1$ 时成立。由 (1) (2)，猜想对一切正整数成立。■

易错点：递推步用的是 $F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}$ （递推关系），这正是“用了归纳假设 $F_1 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$ ”——别抛开假设重算。

6.5 例题详解

例题 6.4 解析

思考路径：已知两项求基本量—— $a_7 - a_3 = 4d$ 先求公差，再回代求首项。

规范解： $a_7 - a_3 = (7 - 3)d = 4d = 21 - 9 = 12$ ，故 $d = 3$ 。由 $a_3 = a_1 + 2d$ 得 $a_1 = 9 - 6 = 3$ 。于是 $a_n = 3 + (n - 1) \times 3 = 3n$ ， $a_{20} = 60$ 。复核： $a_3 = 9$ ✓， $a_7 = 21$ ✓。

易错点： $a_7 - a_3 = 4d$ 而不是 $7d - 3d$ 之外的任何东西——下标差就是步数差。

例题 6.5 解析

思考路径：先求项数 n ，再用 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 。

规范解：通项 $1 + (n - 1) \times 2 = 99$ ，解得 $n = 50$ 。于是

$$S_{50} = \frac{50(1 + 99)}{2} = 50 \times 50 = 2500$$

复核：前 50 个奇数之和恰为 $50^2 = 2500$ ——奇数摆成阶梯正好拼出 50×50 方格阵。

易错点：项数数错。1, 3, ..., 99 有 50 项（不是 49 也不是 100）。

6.6 知识点 (1) 通项公式与基本量详解

A6. A。

思路： $a_9 - a_4 = 5d$ 。

解析： $5d = 34 - 14 = 20$ ， $d = 4$ 。 $a_1 = a_4 - 3d = 14 - 12 = 2$ 。 $a_{15} = 2 + 14 \times 4 = 58$ 。

A7. C。

思路：求项数后套求和公式。

解析： $5 + (n - 1) \times 5 = 200$ ， $n = 40$ 。 $S_{40} = \frac{40(5 + 200)}{2} = 20 \times 205 = 4100$ 。

A8. B。

思路：两项和都化成 a_1, d 的方程。

解析： $a_1 + a_6 = 2a_1 + 5d = 12$ ， $a_3 + a_8 = 2a_1 + 9d = 20$ 。两式相减得 $4d = 8$ ， $d = 2$ 。

A9. B。

思路： a_4 是 a_2, a_6 的等差中项。

解析： $a_4 = \frac{a_2 + a_6}{2} = \frac{5 + 21}{2} = 13$ 。**易错点：**先确认下标 2, 4, 6 成等差（中间项恰为中项），再套公式；若已知的是一般两项，需回基本量。

6.7 知识点 (2) 等差中项与下标和性质详解

A10. C。

思路：下标和性质—— $a_3 + a_7 = 2a_5$ 。

解析： $a_5 = \frac{a_3 + a_7}{2} = \frac{10}{2} = 5$ 。**易错点：** $a_3 + a_7$ 的下标和是 10，恰好是 $2a_5$ （ a_5 的下标 5 的二倍），这是“下标和相等，项和相等”性质的直接应用。

M2 解析：

思路：对称设元 $a - d, a, a + d$ ——“和已知”时中间项立刻确定，只剩一个未知数 d 。

解析：设三数为 $a - d, a, a + d$ 。由和为 15： $(a - d) + a + (a + d) = 3a = 15$ ，故 $a = 5$ 。由平方和为 83： $(5 - d)^2 + 25 + (5 + d)^2 = 75 + 2d^2 = 83$ ， $d^2 = 4$ ， $d = \pm 2$ 。三数为 3, 5, 7（或 7, 5, 3，顺序可反）。复核：和 = 15 ✓，平方和 = $9 + 25 + 49 = 83$ ✓。

为什么错：硬设 a, b, c 三个未知数，三个条件全用上才能解，绕路且易错。对称设元利用“和”秒定中间项，把三元的活变成一元的活。凡是“三个数成等差数列且给出和”的题，先设 $a-d, a, a+d$ 。

6.8 知识点 (3) 前 n 项和与充要条件详解

A11. B。

思路：找最后一个非负项。

解析： $a_n = 20 - 3(n-1) = 23 - 3n$ ，解 $a_n \geq 0$ 得 $n \leq \frac{23}{3} \approx 7.67$ ，故 $a_7 = 2 \geq 0$ 是最后一个非负项。 $S_7 = \frac{7(20+2)}{2} = 77$ ； $S_8 = S_7 + a_8 = 77 - 1 = 76 < 77$ 。 $n = 7$ 时最大，选 B。

B2. (2023 · 新课标 I 卷) C。

思路：要判断“甲 $\Rightarrow$ 乙”与“乙 $\Rightarrow$ 甲”两个方向是否都成立。

解析：若 $\{a_n\}$ 是等差数列，设首项 a_1 、公差 d ，则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，于是

$$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$$

是 n 的一次函数，故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，甲 $\Rightarrow$ 乙成立。反之，若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，设 $\frac{S_n}{n} = kn + b$ ，则 $S_n = kn^2 + bn$ 。当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = k(n^2 - (n-1)^2) + b = 2kn - k + b$ ，故 $a_n - a_{n-1} = 2k$ (常数)， $\{a_n\}$ 是等差数列，乙 $\Rightarrow$ 甲也成立。故选 C。

易错点：这类“充分必要”题要双向验证，缺一个方向都是错的。反例思维：构造 $\frac{S_n}{n}$ 等差而 a_n 不是等差——由上面推导可知不存在，这正是充要的体现。

B3. (2024 · 新课标 II 卷) 95。

思路：用基本量 a_1, d 列方程组，或用下标和性质。

解析：法一 (基本量)： $a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 7$ ， $3a_2 + a_5 = 3(a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 4a_1 + 7d = 5$ 。联立解得 $d = 3$ ， $a_1 = -4$ 。故 $S_{10} = 10 \times (-4) + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 = -40 + 135 = 95$ 。法二 (下标和性质)： $a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 7$ ，与 $3a_2 + a_5 = 5$ 联立得 $a_2 = -1$ ， $a_5 = 8$ 。公差 $d = \frac{a_5 - a_2}{3} = 3$ ， $a_6 = a_2 + 4d = 11$ 。 $S_{10} = 5(a_5 + a_6) = 5 \times 19 = 95$ 。

M3 解析：

思路： S_n 最大处 = “最后一个非负项”处。

解析：(1) 解 $a_n \geq 0$ ： $29 - 3n \geq 0$ ， $n \leq \frac{29}{3} \approx 9.67$ 。故 $a_9 = 2 \geq 0$ 是最后一个非负项， $a_{10} = -1 < 0$ 。(2) S_n 最大在 $n = 9$ 处。 $a_1 = 26$ ，

$$S_9 = \frac{9(26+2)}{2} = 9 \times 14 = 126$$

复核： $S_{10} = S_9 + a_{10} = 126 - 1 = 125 < 126 \checkmark$ 。最大值为 126。

为什么错：小红的说法不对。 S_n 是“累积和”，只有继续加“正数”才变大；一旦开始加负数就变小。 $a_{10} = -1 < 0$ 是第一个负项，把它加进去后 $S_{10} = 125$ 已经比 $S_9 = 126$ 小了。所以最大在最后一个非负项 a_9 处，不是第一个负项处。**判断 $d < 0$ 时 S_n 最大：找最后一个 $a_n \geq 0$ 的下标 n 。**

6.9 例题详解

例题 6.6 解析

思考路径：已知 a_2, a_5 ，利用 $a_5 = a_2 q^3$ 求公比。

规范解： $a_5 = a_2 q^{5-2}$ ， $48 = 6q^3$ ， $q^3 = 8$ ， $q = 2$ 。由 $a_2 = a_1 q$ 得 $a_1 = 3$ 。故 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 。复核： $a_2 = 3 \times 2 = 6 \checkmark$ ， $a_5 = 3 \times 2^4 = 48 \checkmark$ 。

易错点： a_5 比 a_2 晚 $5 - 2 = 3$ 项，所以乘 q^3 不是 q^5 。

例题 6.7 解析

思考路径：从 2^0 到 2^{10} 共 11 项，首项 1，公比 2。

规范解： $S_{11} = \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} = 2048 - 1 = 2047$ 。复核： $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2047 \checkmark$ 。

易错点：项数—— 2^0 到 2^{10} 是 11 项不是 10 项。

例题 6.8 解析

思考路径：这是“等差 $n \times$ 等比 2^n ”型，用错位相减：写 $2S_n$ 错位对齐，相减后中间全部抵消。

规范解：

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \\ 2S_n &= \quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

两式相减：

$$-S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = (2^{n+1} - 2) - n \cdot 2^{n+1}$$

故 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 。复核： $n = 2$ 时 $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$ ，公式 $(2-1) \times 2^3 + 2 = 10 \checkmark$ 。

易错点：剩余项——首项 $1 \cdot 2$ 和末项 $n \cdot 2^{n+1}$ 各剩一个，中间 $n-1$ 项全部抵消；等比部分从 2 到 2^n 共 n 项。

6.10 知识点 (1) 等比数列的通项与等比中项详解

A12. C。

思路： $a_5 = a_3 q^2$ 。

解析: $q^2 = \frac{a_5}{a_3} = \frac{48}{12} = 4$, $q = \pm 2$ 。易错点: q 可正可负, 别漏负根。

A13. C。

思路: 等比中项 $G^2 = ab$ 两解。

解析: $G^2 = 2 \times 18 = 36$, $G = \pm 6$ 。易错点: 只写正根漏了 -6 。

A14. B。

思路: 通项公式直接代。

解析: $a_6 = a_1 q^5 = 3 \times 2^5 = 96$ 。易错点: a_6 是乘 q^5 不是 q^6 ——从第 1 项到第 6 项乘了 $6 - 1 = 5$ 次公比。

M4 解析: (1) $a_3^2 = a_2 a_4 = 64$, 故 $a_3 = \pm 8$ 。小明只写 8 是错的——等比中项有两解。(2) 不存在。若 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_4 = a_2 q^2$, 则 a_4 与 a_2 同号 ($q^2 > 0$), 而 4 与 -8 异号, 矛盾。

为什么错: 等差数列的“中项唯一”先入为主, 把 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$ 的直觉搬给了等比。等比中项满足 $G^2 = ab$, 解出来天然是 $\pm$ 两个值。写“等比中项”四字, 先想 $\pm$ 。

6.11 知识点 (2) 等比数列的前 n 项和详解

A15. C。

思路: 求项数再求和。

解析: $3 \cdot 2^{n-1} = 96$, $2^{n-1} = 32$, $n = 6$ 。 $S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189$ 。

A16. A。

思路: 求和公式, $q = 3 \neq 1$ 。

解析: $S_4 = \frac{1(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{80}{2} = 40$ 。易错点: 先确认 $q \neq 1$ 再套公式; $3^4 = 81$, 减 1 后除以 2 得 40, 别漏除公比差。

A17. A。

思路: 首项 2、公比 2、共 n 项的等比求和。

解析: $S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$ 。易错点: 末项是 2^n , 说明一共 n 项 (从 2^1 到 2^n); 若误以为从 2^0 开始就会写成 $2^n - 1$ (选 B)。

M5 解析: $q = 1$ 时 $a_n = a_1 = 2$ (常数列), 前 n 项和就是 n 个 2 相加:

$$S_6 = 6 \times 2 = 12$$

为什么错: 公式 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ 只在 $q \neq 1$ 时成立, $q = 1$ 时分母 $1 - q = 0$, 套公式必然“除零”。等比求和第一步永远是问: q 等于 1 吗? $q = 1$ 时直接 $S_n = na_1$ 。

B4. (2022 · 全国乙卷理 · T8) D。

思路: 设公比 q , 由“前 3 项和 168”与“ $a_2 - a_5 = 42$ ”联立解基本量; 先排除 $q = 1$ 。

解析：若 $q = 1$ ，则 $a_2 = a_5$ ， $a_2 - a_5 = 0$ ，与 42 矛盾，故 $q \neq 1$ 。于是

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 168, \\ a_1q - a_1q^4 = 42 \end{cases}$$

由第二式 $a_1q(1-q^3) = 42$ ，与第一式相除： $\frac{a_1q(1-q^3)}{a_1(1-q^3)/(1-q)} = \frac{42}{168}$ ，即 $q(1-q) = \frac{1}{4}$ ，解得 $q = \frac{1}{2}$ 。回代得 $a_1 = 96$ 。故 $a_6 = a_1q^5 = 96 \times \frac{1}{32} = 3$ 。选 D。

为什么错：(1) 直接套求和公式前先验证 $q \neq 1$ ($q = 1$ 时 $a_2 - a_5 = 0$ 矛盾)，漏掉这步就不知道“为什么能除 $1-q$ ”；(2) 联立两式时用“相除”消掉 a_1 是省时关键，硬展开会陷入三次方程；(3) 求出 q 后回代求 a_1 再算 a_6 ，一步都别省。**等比数列基本量题：先判 $q = 1$ 排除，再列方程、相除消元。**

B5. (2023 · 新课标 II 卷) C。

思路：等比数列片段 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4, \dots$ 仍成等比，或直接用求和公式。

解析：由 $S_4 = -5$ ， $S_6 = 21S_2$ 。设公比为 q ，由 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$ ， $S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$ 得

$$\frac{1-q^6}{1-q^2} = 21 \Rightarrow 1+q^2+q^4 = 21 \Rightarrow q^4+q^2-20=0$$

解得 $q^2 = 4$ (负根舍去， $q^2 \neq -5$)。又

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}(1+q^4) = S_4(1+q^4) = -5 \times (1+16) = -85$$

故选 C。

易错点： S_8 与 S_4 的关系是 $S_8 = S_4(1+q^4)$ ，这里 $q^4 = (q^2)^2 = 16$ ，别错算成 $q^4 = 4$ 。

6.12 知识点 (3) 裂项相消与错位相减详解

A18. A。

思路：标准裂项 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (分母相差 1，无需配系数)。

解析： $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ 。**易错点：**裂项后“首尾各留一项”——留下的是 1 与 $\frac{1}{n+1}$ ，中间全抵消； $n = 1$ 时 $\frac{1}{2}$ ，公式 $\frac{1}{2}$ ✓。

M6 解析：(1) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$ 。(2) 由 (1) 得 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ ，于是

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

复核： $n=1$ 时 $\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$ ，公式 $\frac{1 \times 8}{4 \times 2 \times 3} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ✓。

为什么错：直接拆成 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ 而不配 $\frac{1}{2}$ 的同学，被 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 的“无系数”惯性带跑了。**凡是分母两个因子相差 k ，先验算再补 $\frac{1}{k}$** —— $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$ 通分后分子是 k 不是 1。
 本题残项规律：前两项 $1, \frac{1}{2}$ 与后两项 $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}$ 各留一个，别只留一项。

M7 解析：(1) $2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}$ ，与 $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ 错位对齐。(2) 相减后：首项 $1 \cdot 2$ 剩一个，末项 $n \cdot 2^{n+1}$ 剩一个，中间的 $n-1$ 项全部抵消。(3) 由 $S_n - 2S_n = -S_n = (1 \cdot 2) + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n \cdot 2^{n+1}$ ，

$$-S_n = 2 + (2^{n+1} - 4) - n \cdot 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$$

故 $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ 。复核： $n=2$ 时 $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$ ，公式 $(2-1) \times 2^3 + 2 = 10$ ✓。

为什么错：步骤长、注意点密，常见错有四类——(1) $2S_n$ 没“错位”直接减，中间项消不掉；(2) 等比部分 $2^2 + \cdots + 2^n$ 写成 $2^2 + \cdots + 2^{n+1}$ ，项数错；(3) 符号错 ($S_n - 2S_n = -S_n$ 移项忘变号)；(4) 写完不验证。**写完必须用 $n=1$ 或 $n=2$ 代入自检。**

B6. (2023 · 全国甲卷 · 理) 解析：

思路：(1) $2S_n = na_n$ 与 $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ 作差，得 a_n 与 a_{n-1} 的比值，用累乘法；(2) $\frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{n}{2^n}$ 是“等差 × 等比”型，错位相减。

规范解：(1) 当 $n=1$ 时， $2S_1 = a_1$ ，即 $2a_1 = a_1$ ，故 $a_1 = 0$ 。当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ，与 $2S_n = na_n$ 相减得

$$2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1} \Rightarrow (n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n$$

当 $n \geq 3$ 时 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}$ ，累乘：

$$a_n = a_2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n-2} = n-1$$

$n=1$ 时 $a_1 = 0$ ， $n=2$ 时 $a_2 = 1$ ，均满足 $a_n = n-1$ 。故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n-1$ 。(2) $\frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{n}{2^n}$ ，令 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$ ，错位相减：

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n}{2^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n}{2^{n+1}}$$

故 $T_n = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 。复核： $n=1$ 时 $T_1 = \frac{1}{2}$ ，公式 $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ✓。

为什么错：本题是“ S_n 与 a_n 关系 + 累乘 + 错位相减”三合一的大题。常见错——(1) 由 $2S_n = na_n$ 作差前忘记先取 $n=1$ 求 $a_1 = 0$ ，导致后面累乘起点错；(2) 累乘结果不验证 $n=$

1, 2 ($a_n = n - 1$ 对 $n = 1, 2$ 都成立, 这一步验证必不可少); (3) 第二问错位相减的等比部分从 $\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2^n}$ 共 n 项, 有人数成 $n + 1$ 项。

易错点: (1) 由 $2S_n = na_n$ 先算 $n = 1$ 得 $a_1 = 0$ 很重要——这正是“ S_n 与 a_n 关系”中 $n = 1$ 单独处理的考点; 累乘结果必须回代 $n = 1, 2$ 验证。(2) 错位相减的等比部分是从 $\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2^n}$ 共 n 项。

C2. 解析:

思路: 每笔存款“各自按复利长到第 5 年年底”, 第 k 年年初存入的钱计息 $(5 - k + 1)$ 次; 5 笔终值构成等比数列, 用等比求和。

规范解: 第 k 年年初存入的 10000 元到第 5 年年底为 $10000 \times 1.03^{6-k}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$), 即 $10000 \times 1.03^5, 10000 \times 1.03^4, \dots, 10000 \times 1.03$ 。首项 10000×1.03^5 , 公比 $\frac{1}{1.03}$, 共 5 项:

$$S = 10000 \times 1.03 \cdot \frac{1.03^5 - 1}{1.03 - 1} = 10000 \times 1.03 \times \frac{1.159274 - 1}{0.03}$$

$$S \approx 10000 \times 1.03 \times 5.30913 \approx 54684.1$$

答: 第 5 年年底本息和约为 54684 元。复核 (逐年累加): $10000 \times (1.03^5 + 1.03^4 + 1.03^3 + 1.03^2 + 1.03) \approx 10000 \times 5.46841 = 54684.1 \checkmark$ 。

易错点: 首项不是 10000 而是 10000×1.03 (第一笔钱在第 5 年年底已计息 5 次); 公比是 $\frac{1}{1.03}$ 且共 5 项——写成 4 项或首项 10000 都是常见错。

6.13 例题详解

例题 6.9 解析

思考路径: 设命题 $P(n)$, 奠基验证 $n = 1$, 递推从“假设 $n = k$ ”出发推出 $n = k + 1$ 。

规范解: 设命题 $P(n)$: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 。(1) 奠基: $n = 1$ 时左边 = 1, 右边 = $1^2 = 1$, 成立。(2) 递推: 假设 $n = k$ 时成立, 即 $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$ 。则 $n = k + 1$ 时

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

成立。由 (1) (2), 命题对一切正整数 n 成立。■

易错点: 递推步把 $(2k + 1)$ 加在归纳假设左边——这是“用了假设”的关键一步; 写成 $k^2 + (2k + 1)$ 与目标 $(k + 1)^2$ 恰好吻合。

例题 6.10 解析

思考路径: 整除型归纳——递推步作差拆出“归纳假设项 + 能被整除的余项”。

规范解: 设命题 $P(n)$: $n^3 + 5n$ 能被 6 整除。(1) 奠基: $n = 1$ 时 $1^3 + 5 = 6$, 能被 6 整除, 成立。(2) 递推: 假设 $n = k$ 时 $k^3 + 5k$ 能被 6 整除, 则

$$(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k(k + 1) + 6$$

其中 $k^3 + 5k$ 被 6 整除 (归纳假设); $k(k+1)$ 是相邻整数之积必为偶数, 故 $3k(k+1)$ 被 6 整除; 6 显然被 6 整除。三者之和仍被 6 整除, $n = k+1$ 时成立。由 (1) (2), 命题对一切正整数 n 成立。■

易错点: $3k(k+1)$ 被 6 整除的理由要写透——含因子 3 且 $k(k+1)$ 为偶数, 合起来含因子 6。跳掉这个说明是常见丢分。

6.14 知识点 (1) 数学归纳法的原理与基本应用详解

A19 解析:

思路: 先看通项 $3n-2$, 右边 $\frac{n(3n-1)}{2}$ 是前 n 项和公式。

规范解: (1) 奠基: $n=1$ 时左边 $=1$, 右边 $=\frac{1 \times 2}{2} = 1$ ✓。(2) 递推: 假设 $n=k$ 时 $1+4+\cdots+(3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$, 则 $n=k+1$ 时

$$1+\cdots+(3k-2)+(3k+1) = \frac{k(3k-1)}{2} + 3k+1 = \frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

而 $\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$, 两者相等, $n=k+1$ 时成立。由 (1) (2), 命题成立。■

A20 解析:

思路: 整除型——递推步拆出 (k^3-k) 与 $3k(k+1)$ 。

规范解: (1) 奠基: $n=1$ 时 $1-1=0$, 能被 3 整除 ✓。(2) 递推: 假设 k^3-k 能被 3 整除, 则

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

(k^3-k) 被 3 整除 (假设), $3k(k+1)$ 含因子 3, 故 $(k+1)^3 - (k+1)$ 被 3 整除。由 (1) (2), 命题成立。■

6.15 知识点 (2) 数学归纳法与不等式详解

M8 解析:

思路: 命题从 $n \geq 2$ 起有意义, 奠基验 $n=2$; 递推步必须从归纳假设出发放缩。

规范解: (1) 奠基: $n=2$ 时左边 $=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, 右边 $=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ ✓。(2) 递推: 假设 $n=k$ ($k \geq 2$) 时 $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$, 则 $n=k+1$ 时

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

要证 $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$, 只需 $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, 即 $k+1 > k$, 显然成立。故 $n = k+1$ 时不等式成立。由 (1) (2), 命题对一切 $n \geq 2$ 成立。■

为什么错: 小丽把归纳法当“套格式”——假设完就宣布“显然成立”, 既没把假设的式子写出来, 也没从它出发做任何推导。归纳法的递推步**必须用上归纳假设** (这里就是把 $\sum_{i=1}^k$ 的不等式接上 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 再放缩); “另起炉灶”或“直接显然”都等于没递推。另外奠基验的是 $n = 2$ 而不是 $n = 1$ —— $n = 1$ 时右边 $2 - 1 = 1$ 而左边是 1 , $1 < 1$ 不成立, 命题根本不含 $n = 1$, 起点必须从 $n = 2$ 开始。

本章综合详解

S1 解析

思考路径: 由 $a_3 + a_5 = 40$ 反解 q ; $b_n = \log_2 a_n$ 看是不是 n 的一次函数。

规范解: (1) $a_3 = 2q^2$, $a_5 = 2q^4$, 故 $2q^2 + 2q^4 = 40$, $q^4 + q^2 - 20 = 0$, $(q^2 + 5)(q^2 - 4) = 0$ 。因 $q > 0$, $q^2 = 4$, $q = 2$ 。故 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 。(2) $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$, 于是 $b_{n+1} - b_n = 1$ (常数), $\{b_n\}$ 是以 1 为首项、1 为公差的等差数列。其前 10 项和 $= \frac{10(1+10)}{2} = 55$ 。

易错点: 解 $q^4 + q^2 - 20 = 0$ 时设 $t = q^2$ 换元; $q > 0$ 的条件用于排除 $q = -2$ 。

S2 解析

思考路径: $S_n = 2a_n - 1$ 型——先取 $n = 1$ 得首项, 再作差消 S 得 a_n 与 a_{n-1} 的递推。

规范解: (1) $n = 1$ 时 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 解得 $a_1 = 1$ 。 $n \geq 2$ 时

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1) = 2a_n - 2a_{n-1}$$

移项得 $a_n = 2a_{n-1}$, 故 $\{a_n\}$ 是首项 1、公比 2 的等比数列, $a_n = 2^{n-1}$ ($n = 1$ 时 $2^0 = 1$ 也成立)。(2) $na_n = n \cdot 2^{n-1}$, 令 $T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1}$, 错位相减:

$$T_n = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$$

$$2T_n = 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

$$-T_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = (2^n - 1) - n \cdot 2^n = (1-n)2^n - 1$$

故 $T_n = (n-1)2^n + 1$ 。复核: $n = 2$ 时 $T_2 = 1 + 2 \times 2 = 5$, 公式 $(2-1) \times 2^2 + 1 = 5$ ✓。

易错点: (1) 作差后 $a_n = 2a_{n-1}$ 的推导要求 $n \geq 2$, 首项由 $n = 1$ 单独求出, 这正是 S_n 与 a_n 关系的规范流程。(2) 错位相减后 T_n 系数为正—— $T_n = -[(1-n)2^n - 1]$, 别把符号写反。

S3 解析

思考路径: 递推数列求通项——先猜, 再用归纳法严格证; 同时“ $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ ”直接看出构造等比。

规范解: (1) $a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$, $a_3 = 2 \times 5 + 1 = 11$, $a_4 = 2 \times 11 + 1 = 23$ 。(2) 前 4 项为 2, 5, 11, 23, 猜想 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 。证明: 奠基 $n = 1$: $3 \cdot 2^0 - 1 = 2 = a_1$ ✓。递推: 假设 $a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, 则

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(3 \cdot 2^{k-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^k - 1$$

正是 $n = k + 1$ 时的形式，成立。由 (1) (2), $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 。■ (3) 由 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ 知 $\{a_n + 1\}$ 是首项 $a_1 + 1 = 3$ 、公比 2 的等比数列，故 $a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$ ，即 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 。两种方法结果一致。

易错点：归纳递推步必须代入递推关系 $a_{k+1} = 2a_k + 1$ 和归纳假设 $a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$ ，二者缺一不可；“构造 $a_n + 1$ 新等比” 是比 “先猜后证” 更直接的路，两者都要会。

第七章 一元函数的导数及其应用

7.1 例题详解

例题 7.1 解析

思考路径：平均速度 = 位移增量 $\div$ 时间增量；瞬时速度 = 平均速度在 $h \rightarrow 0$ 时的极限——先化简（约去 h ）再代 $h = 0$ ，中间保留 $\lim$ 。

规范解：（1） $\Delta s = s(3) - s(2) = 2 \times 9 - 2 \times 4 = 10$ ， $\Delta t = 1$ ，

$$\bar{v} = \frac{10}{1} = 10 \text{ m/s}$$

（2）

$$v(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8 \text{ m/s}$$

易错点： h 趋于 0 但不等于 0，所以先把 h 从分子约掉，最后才代 $h = 0$ ； $\lim$ 必须保留到代入前一步。平均速度 10 与瞬时速度 8 不相等——这就是“一段”与“一刻”的差别。

例题 7.2 解析

思考路径：切点 $(2, 4)$ 在曲线上，用定义求 $f'(2)$ 得斜率，再写点斜式。

规范解：

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

切线方程 $y - 4 = 4(x - 2)$ ，整理得 $y = 4x - 4$ 。复核：把 $x = 2$ 代入 $y = 4 \times 2 - 4 = 4$ ，切点确实在切线上 $\checkmark$ 。

易错点：点斜式里是 $y - 4 = 4(x - 2)$ ，把“ $y - 4$ ”写成“ $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ ”时要先算清 $f(2) = 4$ 。

7.2 知识点（1）平均变化率与瞬时变化率详解

A1. C。

思路：平均变化率 = 函数增量 $\div$ 自变量增量。

解析： $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{2} = 12$ 。

A2. B。

思路：瞬时速度 = 导数 $s'(t)$ 。

解析： $v(t) = s'(t) = 2t + 2$, $v(3) = 8 \text{ m/s}$ 。

A3. B。

思路：平均变化率 = 函数增量 $\div$ 自变量增量。

解析： $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3$ 。易错点：平均变化率是“两点间”的斜率，与瞬时变化率 $f'(1) = 2$ 不是一回事，别混。

M1 解析：(1) $\bar{v} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 1}{2} = 13 \text{ m/s}$ 。(2) $v(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12 \text{ m/s}$ 。(3) 平均速度 13 与瞬时速度 12 不相等。

为什么错：平均速度回答“ t 从 1 到 3 这一整段路平均每秒走多少”，它只在乎起点 $s(1) = 1$ 和终点 $s(3) = 27$ ；瞬时速度回答“ $t = 2$ 那一瞬间多快”。两者只在特殊情形（匀变速运动的二次位移函数、区间中点时刻）恰好相等，绝不能混为一谈。审题先分清问的是“一段”还是“一刻”。

C1. 解析：

思路：平均速度用差商，瞬时速度用导数，加速度是速度的导数（二阶导）。

规范解：(1)

$$\bar{v} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{(32 + 24) - (8 + 12)}{2} = \frac{56 - 20}{2} = 18 \text{ m/s}$$

(2) $s'(t) = 4t + 6$, $s'(3) = 4 \times 3 + 6 = 18 \text{ m/s}$ 。(3) $a(t) = s''(t) = (4t + 6)' = 4 \text{ m/s}^2$ ，加速度恒定为 4 m/s^2 ，与时间无关。

易错点：这里平均速度 (18) 恰好等于中点时刻 $t = 3$ 的瞬时速度 (18) ——这是匀变速运动的特性（区间 $[2, 4]$ 的中点恰为 3），不是“平均等于瞬时”的一般规律。加速度要求对速度再求一次导，别停在 $s'(t)$ 。

7.3 知识点 (2) 导数的几何意义与切线详解

A4. A。

思路：求 $f'(2)$ 后写点斜式。

解析： $y' = 2x$, $y'(2) = 4$ ，切线 $y - 4 = 4(x - 2)$ ，即 $y = 4x - 4$ 。

M2 解析：

思路：先判断 P 是否在曲线上—— $P(2, 0)$ 代入 $y = x^3$ 得 $8 \neq 0$ ，不在曲线上。设切点 (t, t^3) ，由“切线斜率 = 导数值”与“ P 在切线上”列方程。

规范解：设切点为 (t, t^3) ，切线斜率 $k = f'(t) = 3t^2$ 。由 $P(2, 0)$ 在切线上：

$$\frac{t^3 - 0}{t - 2} = 3t^2 \Rightarrow t^3 = 3t^2(t - 2) \Rightarrow 2t^2(t - 3) = 0$$

得 $t = 0$ 或 $t = 3$ 。当 $t = 0$ ：切点 $(0, 0)$ ，斜率 0，切线 $y = 0$ 。当 $t = 3$ ：切点 $(3, 27)$ ，斜率 27，切线 $y - 27 = 27(x - 3)$ ，即 $y = 27x - 54$ （检验： $P(2, 0)$ 代入 $54 - 54 = 0$ ✓）。故过 P 的切线有两条： $y = 0$ 与 $y = 27x - 54$ 。

为什么错：小华默认“过点 P 作切线”的 P 就是切点。 $P(2, 0)$ 根本不在曲线上， $f'(2)$ 是曲线在 $(2, 8)$ 处的斜率，与过 P 的切线毫无关系。“在点 $(x_0, f(x_0))$ 处”与“过点 (a, b) ”一字之差，做法完全不同——后者必须设切点、列方程，而且可能不止一条切线。

B1. (2025 · 新课标 I 卷) $2\ln 2 - 2$ 。

思路：切线斜率为 2，先由导数为 2 反求切点横坐标，再用“切点既在直线上又在曲线上”列方程。

解析： $y' = e^x$ ，令 $e^x = 2$ 得切点横坐标 $x_0 = \ln 2$ 。切点在直线 $y = 2x$ 上，故纵坐标为 $2\ln 2$ ；又切点在曲线 $y = e^x + a$ 上：

$$e^{\ln 2} + a = 2\ln 2 \Rightarrow 2 + a = 2\ln 2 \Rightarrow a = 2\ln 2 - 2$$

易错点：“直线是曲线的切线”暗含“切点同时在直线和曲线上”这一条件——既要用导数（切点处斜率），又要代坐标，缺一不可。

B2. (2024 · 全国甲卷) A。

思路：求 $f'(0)$ 得切线，再算与两坐标轴交点围成的三角形面积。

解析： $f'(x) = e^x + 2\cos x$ ， $f'(0) = 1 + 2 = 3$ 。切线 $y - 1 = 3(x - 0)$ ，即 $y = 3x + 1$ 。与 y 轴交于 $(0, 1)$ ，与 x 轴交于 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 。面积

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

故选 A。

易错点： $\cos 0 = 1$ 别算成 0；三角形两直角边长分别是 1 与 $\frac{1}{3}$ ，不是 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$ 。

7.4 例题详解

例题 7.3 解析

思考路径：先识别结构——多项式用逐项求导，积用积法则，复合用链式法则（剥洋葱）。

规范解：(1) $f'(x) = 3x^2 - 2$ 。(2) 积法则： $u = x^2$ ， $v = e^x$ ， $u' = 2x$ ， $v' = e^x$ ，

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$$

(3) 链式法则：令 $u = 2x + 1$ ，则 $y = u^3$ ，

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$$

易错点：(2) 漏掉 uv' 那一项是积法则最常见错误——积的导数不是导数的积；(3) 漏乘内层导数 2 是链式法则最常见错误（见 M3）。

7.5 知识点 (1) 导数的四则运算法则详解

A5. A。

思路：逐项求导。

解析： $y' = 4x^3 + 3 \times 2x - 2 = 4x^3 + 6x - 2$ 。**易错点：** x^2 求导得 $2x$ ，再乘系数 3 得 $6x$ 。

A6. C。

思路：积法则 $u = x$, $v = \ln x$ 。

解析： $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ 。

A7. A。

思路：商的法则 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 。

解析： $u = x$, $v = x + 1$, $u' = 1$, $v' = 1$,

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

易错点：商的法则分子是“上导乘下 - 上不导乘下导”，减号顺序别反；能约分先约分，本题答案正是 $\frac{1}{(x+1)^2}$ 。

A8. B。

思路：积法则 $u = x^2$, $v = \cos x$ 。

解析： $f'(x) = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$ 。**易错点：** $(\cos x)' = -\sin x$ ，负号来自这里；漏掉 $\sin$ 项或把符号写反都会选错。

7.6 知识点 (2) 复合函数的导数详解

A9. B。

思路：链式法则，外层幂、内层 $3x + 1$ 。

解析： $y' = 5(3x + 1)^4 \cdot 3 = 15(3x + 1)^4$ 。**易错点：**漏乘内层导数 3，选 A 就踩坑。

A10. B。

思路：外层 e^u 、内层 $2x + 1$ 。

解析： $y' = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$ 。**易错点：**漏乘内层导数 2（选 A）； e^{2x} 型复合函数与 $(e^x)^2$ 型别混—— e^{2x+1} 的内层是 $2x + 1$ 不是 x 。

M3. D。

思路：逐项检查——积法则两项都要、链式法则别忘了内层导数。

解析：A 错： $(x^2e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$ ，漏了 $x^2 \cdot (e^x)'$ 。B 错： $((2x+1)^3)' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$ ，漏乘内层 2。C 错： $(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$ ，漏乘内层 2。D 对： $(\ln(2x+1))' = \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}$ 。

为什么错：A 错在把积法则记成“导数的积”；B、C 错在链式法则只算“外层导数、内层不动”，忘了乘内层导数。每次复合求导完自问：内层要不要再乘一层？多问这一句就能防住 B、C 这类丢分。

7.7 例题详解

例题 7.4 解析

思考路径：定义域为 $\mathbb{R}$ ；求 $f'(x)$ 后解 $f'(x) > 0$ 与 $f'(x) < 0$ 。

规范解： $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。解 $f'(x) > 0$ ： $x < -1$ 或 $x > 1$ ；解 $f'(x) < 0$ ： $-1 < x < 1$ 。故单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-1, 1)$ 。复核： $f'(2) = 9 > 0 \checkmark$ ， $f'(0) = -3 < 0 \checkmark$ 。

易错点：两个增区间之间用“和”连接，不能写并集 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ——递增定义要求任意 $x_1 < x_2$ 都递增，跨段可能破坏。

例题 7.5 解析

思考路径：求驻点后列表看左右变号，左正右负极大、左负右正极小。

规范解： $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ，驻点 $x = -1$ ， $x = 1$ 。列表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大	递减	极小	递增

$$f(-1) = -1 + 3 = 2, \quad f(1) = 1 - 3 = -2$$

故极大值为 2 ($x = -1$ 处)，极小值为 -2 ($x = 1$ 处)。

易错点：驻点只是候选，必须列表看变号； $x = -1$ 左正右负才是极大， $x = 1$ 左负右正是极小——反了就全错。

7.8 知识点 (1) 导数与函数的单调性详解

A11. A。

思路： $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$ 。

解析： $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$ ，增区间为 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 。

A12. A。

思路：先写定义域 $x > 0$ ，再解 $f'(x) < 0$ 。

解析： $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$ ， $x > 0$ 时符号由 $x^2 - 1$ 决定。 $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ ，递减区间为 $(0, 1)$ 。**易错点：**定义域是 $(0, +\infty)$ ， $(-1, 1)$ 中 $x \leq 0$ 的部分不存在，单调区间必须落在定义域内。

A13. 证明：设 $g(x) = \ln x - x + 1$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ 。当 $0 < x < 1$ 时 $g'(x) > 0$ ， g 单调递增；当 $x > 1$ 时 $g'(x) < 0$ ， g 单调递减。故 $x = 1$ 是 g 的最大值点， $g(1) = 0$ ，所以对一切 $x > 0$ 有 $g(x) \leq 0$ ，即 $\ln x \leq x - 1$ 。■

易错点：作差构造函数后，要“找最值符号”而不是只看一端—— g 在 $(0, 1)$ 递增、 $(1, \infty)$ 递减，最大值在 $x = 1$ 。

A14. A。

思路： f 在 $\mathbb{R}$ 单调递增 $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ 恒成立，分离参数求最值。

解析： $f'(x) = e^x - a \geq 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，即 $a \leq e^x$ 恒成立，等价于 $a \leq \min e^x = 0$ ($e^x > 0$ 恒成立，下确界为 0)。故 $a \leq 0$ ，选 A。**易错点：** e^x 恒大于 0 且下确界为 0 (取不到)，所以 $a \leq 0$ 时 $e^x - a \geq 0$ 恒成立； $a = 0$ 可以取 ($f'(x) = e^x > 0$)，别写成 $a < 0$ 。

B3. (2023 · 新课标 II 卷) C。

思路： f 在 $(1, 2)$ 单调递增 $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 恒成立，分离参数求最值。

解析： $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 对 $x \in (1, 2)$ 恒成立，即 $a \geq \frac{1}{xe^x}$ 恒成立，等价于 $a \geq \max_{x \in (1, 2)} \frac{1}{xe^x}$ 。设 $g(x) = \frac{1}{xe^x}$ ($x \in (1, 2)$)。 xe^x 在 $(1, 2)$ 上单调递增，故 $g(x)$ 单调递减，最大值在左端点 $x = 1$ 处： $g(1) = \frac{1}{e}$ 。故 $a \geq \frac{1}{e} = e^{-1}$ ， a 的最小值为 e^{-1} 。选 C。

易错点： $f'(x) \geq 0$ 中 a 与 x 分离后注意方向—— $a \geq g(x)$ 恒成立， a 要大于等于 g 的最大值；求最大时 g 是递减的，别取成右端点。

7.9 知识点 (2) 函数的极值详解

A15. B。

思路： $f'(x) = 3x(x - 2)$ ，驻点 0、2，列表看变号。

解析： $(-\infty, 0)$ 增、 $(0, 2)$ 减，故 $x = 0$ 处取极大值 $f(0) = 0$ 。**易错点：**极大值点是 $x = 0$ ，不是 $x = 2$ ($x = 2$ 处是极小值 -4)。

A16. B。

思路： $f'(x) = 3x(x - 2)$ ，判断 $x = 2$ 左右符号。

解析： $0 < x < 2$ 时 $f'(x) < 0$ (递减)， $x > 2$ 时 $f'(x) > 0$ (递增)，左负右正， $x = 2$ 处取极小值。**易错点：** $f'(x_0) = 0$ 只是必要条件，必须看变号； $x = 0$ 与 $x = 2$ 分别是极大与极小，别搞反。

M4 解析： $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0$ 对一切 x 成立，仅在 $x = 1$ 处等于 0。左右

两侧 f' 符号同为正值, 没有变号, 故 $x=1$ 处无极值, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。

为什么错: 小刚把 “ $f'(x_0)=0$ ” 当成极值的充分条件。 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处同样 $f'(0)=0$ 却无极值。驻点只是极值的 “候选人”, 是否当选看左右变号。判断流程: 求驻点 $\rightarrow$ 列表看 f' 左右符号 $\rightarrow$ 变号才是极值。

B4. (2025 · 新课标 II 卷) -4。

思路: 极值点处导数为 0, 解出 a , 再验证变号, 最后代 $x=0$ 。

解析: 展开 $f(x)=x^3-(3+a)x^2+(3a+2)x-2a$, 则

$$f'(x)=3x^2-2(3+a)x+3a+2$$

由 $x=2$ 是极值点, $f'(2)=12-4(3+a)+3a+2=2-a=0$, 解得 $a=2$ 。验证: $f'(x)=3x^2-10x+8=(3x-4)(x-2)$ 。 $x<\frac{4}{3}$ 时 $f'(x)>0$, $\frac{4}{3}<x<2$ 时 $f'(x)<0$, $x>2$ 时 $f'(x)>0$ —— $x=2$ 处左负右正, 确为极小值点 $\checkmark$ 。故 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, $f(0)=(-1)\times 4=-4$ 。

易错点: 解出 a 后必须回代验证 “确实变号”—— $f'(x_0)=0$ 是必要条件不是充分条件 (若解出的 a 使驻点处不变号, 要舍去)。

7.10 知识点 (3) 含参讨论与隐零点详解

M5 解析: 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$ 。(1) 当 $a\leq 0$ 时, $1-ax\geq 1>0$, 故 $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。(2) 当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$; 令 $f'(x)<0$ 得 $x>\frac{1}{a}$ 。故增区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, 减区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 。

为什么错: 此题最大陷阱是定义域—— $f'(x)$ 的分母是 x , 分类讨论得出的所有区间都必须落在 $x>0$ 内。写 “ $x<0$ 时 $f'(x)<0$ 递减” 之类的结论, 就是无视定义域的典型错误。**含参讨论单调性:** 先写定义域, 再按参数分类, 每类区间都要在定义域内。

B5. (2022 · 全国乙卷理 · T16) $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 。

思路: 极值点个数问题转化成导数零点个数问题——对 $f'(x)$ 再求导看结构, 再分类讨论。 $f'(x)=0$ 是含 a^x 的超越方程, 解不出显式零点, 属于典型的**隐零点**题, 只能靠 “零点个数 $\Leftrightarrow$ 导数最值符号” 来判断。

规范解: $f'(x)=2a^x \ln a - 2ex$ 。因 f 有极小值点 x_1 和极大值点 x_2 ($x_1 < x_2$), f 在 $(-\infty, x_1)$ 减、 (x_1, x_2) 增、 $(x_2, +\infty)$ 减, 故 f' 恰有两个变号零点 (负 $\rightarrow$ 正 $\rightarrow$ 负)。对 f' 再求导: $f''(x)=2a^x(\ln a)^2 - 2e$ 。若 $a>1$: $(\ln a)^2>0$ 且 a^x 递增, $f''(x)$ 单调递增, 故 $f'(x)$ 先减后增 (至多 “负 $\rightarrow$ 正” 一个拐点), 不可能 “负 $\rightarrow$ 正 $\rightarrow$ 负”, 舍去。若 $0<a<1$: $\ln a<0$, $f''(x)$ 单调递减, 故 $f'(x)$ 先增后减。设 $f''(x)=0$ 的根为 x_0 (f' 的最大值点), 则由 $a^{x_0}(\ln a)^2=e$ 得 $a^{x_0}=\frac{e}{(\ln a)^2}$ 。要 f' 有两个变号零点, 须最大值 $f'(x_0)>0$:

$$f'(x_0)=2(a^{x_0} \ln a - ex_0) > 0 \Rightarrow \frac{e}{\ln a} > ex_0 \Rightarrow \frac{1}{\ln a} > x_0$$

又 $x_0 = \log_a \frac{e}{(\ln a)^2} = \frac{\ln e - 2 \ln(-\ln a)}{\ln a}$ ($\ln a < 0, -\ln a > 0$), 代入得

$$\frac{1}{\ln a} > \frac{1 - 2 \ln(-\ln a)}{\ln a} \xrightarrow{\ln a \leq 0} 1 < 1 - 2 \ln(-\ln a) \Rightarrow \ln(-\ln a) < 0$$

故 $-\ln a < 1$, 即 $-\ln a \in (0, 1)$, 得 $a \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 。

为什么错: 这是当年全国卷压轴级填空, 三个典型失分点——(1) 只会列 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, 遇到 a^x 型超越方程就卡死, **不知道要把“极值点”翻译成“ f' 的变号零点”再谈个数**; (2) 忘了对 f' 再求导判断 f' 自身的单调结构 (f'' 单调性由 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 决定), 导致分类讨论无从下手; (3) 处理 $a \in (0, 1)$ 时 $\ln a < 0$, **不等式两边乘负数要变号**, 漏变号就会得到 $a < 1/e$ 的错误范围。正确套路: 隐零点不求出, 只利用 $f''(x_0) = 0$ 与 $f'(x_0) > 0$ 两个关系做代数消元。

B6. (2022 · 全国甲卷理 · T6) B。

思路: $x = 1$ 是定义域开区间 $(0, +\infty)$ 内的最大值点, 必为极大值点——两个条件 $f(1) = -2$ 与 $f'(1) = 0$ 解出 a, b 。

解析: 定义域为 $(0, +\infty)$ 。 $f(1) = a \ln 1 + b = b = -2$ 。 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$, 由 $x = 1$ 是最值点得 $f'(1) = a - b = 0$, 故 $a = b = -2$ 。于是

$$f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x + 2}{x^2}, \quad f'(2) = \frac{-4 + 2}{4} = -\frac{1}{2}$$

验证: $0 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0$, $x > 1$ 时 $f'(x) < 0$, $x = 1$ 处确为最大值 ✓。选 B。

为什么错: (1) 漏用 “ $x = 1$ 处取最大值 $\Rightarrow f'(1) = 0$ ” ——开区间内最值必为极值, 这是把最值题转化成导数题的关键一步; (2) $f(1)$ 算错—— $\ln 1 = 0$, $f(1) = b$ 直接给 $b = -2$, 有人误把 $a \ln 1$ 当 a 参与计算; (3) 解出 $a = b = -2$ 后**必须回代验证确实在 $x = 1$ 取最大值** (单调性验证), 否则可能解出增根。**最值点当驻点用, 解完回代验单调。**

7.11 例题详解

例题 7.6 解析

思考路径: 闭区间最值三步——驻点 + 端点比较。

规范解: $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, 驻点 $x = \pm 1$ (均在 $[-2, 2]$ 内)。计算:

$$f(-2) = -2, \quad f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2$$

比较得最大值 2 ($x = -1$ 和 $x = 2$ 处), 最小值 -2 ($x = -2$ 和 $x = 1$ 处)。

易错点: $x = -1$ 是极大值点 $f(-1) = 2$, 端点 $x = 2$ 处恰好也是 2——**最值可以同时出现在极值点和端点**, 这正是“端点必查”的意义。只查驻点会漏掉端点 $f(2)$ 。

例题 7.7 解析

思考路径：日利润 = 单件利润 $\times$ 日销量，先写定义域（售价不低进价、不高于“零销量价”），再求导求最值。

规范解：设售价 p 元，单件利润 $p - 30$ ，日销量 $100 - p$ ，

$$L(p) = (p - 30)(100 - p) = -p^2 + 130p - 3000, \quad 30 \leq p \leq 100$$

$L'(p) = -2p + 130$ ，令 $L'(p) = 0$ 得 $p = 65 \in [30, 100]$ 。比较：

$$L(30) = 0, \quad L(65) = 35 \times 35 = 1225, \quad L(100) = 0$$

故售价定为 65 元时日利润最大，最大日利润为 1225 元。复核：65 元时单件利润 35 元、日销 35 件， $35 \times 35 = 1225$ ✓，且落在定义域内。

易错点：最值点 $p = 65$ 在区间内部且由驻点决定，但端点 $L(30) = L(100) = 0$ 也要列出来比——本题恰好端点不是最大，但“比端点”这一步永远不能省。

7.12 知识点 (1) 闭区间上的最值详解

A17. A。

思路：闭区间最值——驻点 + 端点。

解析： $f'(x) = 3x(x - 2)$ ，驻点 0, 2（均在 $[0, 3]$ 内）。 $f(0) = 2$ ， $f(2) = -2$ ， $f(3) = 2$ 。最大值 2，最小值 -2。

A18. A。

思路：闭区间最值——驻点 + 端点。

解析： $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ ，驻点 $x = 1 \in [0, 2]$ （ $x = -1$ 不在区间内舍去）。 $f(0) = 0$ ， $f(1) = -2$ ， $f(2) = 2$ 。最小值 -2。**易错点：**驻点 $x = -1$ 在区间外，一律无视； $f(1) = -2$ 是整条曲线的最小值，恰好也落在区间内，所以最小值由驻点决定。

M6 解析： $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ ，驻点 $x = \pm 1$ 。**这两个驻点都不在区间 $[2, 4]$ 内**，不能作候选。只比较端点：

$$f(2) = 8 - 6 = 2, \quad f(4) = 64 - 12 = 52$$

故最大值为 52，最小值为 2。

为什么错：小刚算出驻点就代，没检查驻点是否落在给定区间内。 $f(1) = -2$ 是整条曲线上的极小值，但 $x = 1$ 根本不在 $[2, 4]$ 里——**求闭区间最值，候选点是“区间内的驻点 + 两个端点”，区间外的驻点一律无视。**

M7 解析： $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ ，驻点 $x = 0$ （不在 $[1, 4]$ 内，舍去）、 $x = 2$ （在区间内）。比较候选点：

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \quad f(2) = 8 - 12 + 2 = -2, \quad f(4) = 64 - 48 + 2 = 18$$

故最大值为 18（ $x = 4$ 端点处），最小值为 -2（ $x = 2$ 驻点处）。

为什么错：小丽只算了驻点就完事—— $f(2) = -2$ 只是极小值（局部），全局最大值 18 藏在端点 $x = 4$ 处。**极值不等于最值：**闭区间最值必须“端点 + 驻点”一起比。本题最大值恰由端点决定、最小值由驻点决定，正好展示两类候选点都不能漏。

7.13 知识点 (2) 最优化建模详解

A19 解析：

思路：设底面半径 r ，由体积反求高 h ，写出用料（底面积 + 侧面积）函数，求导求最小。

规范解： $V = \pi r^2 h = 27\pi$ ，故 $h = \frac{27}{r^2}$ 。用料

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}, \quad r > 0$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = \frac{2\pi(r^3 - 27)}{r^2}$$

令 $S'(r) = 0$ 得 $r = 3$ 。 $0 < r < 3$ 时 $S'(r) < 0$ （递减）， $r > 3$ 时 $S'(r) > 0$ （递增），故 $r = 3$ 时用料最少。此时 $h = \frac{27}{9} = 3$ ，

$$S_{\min} = S(3) = 9\pi + 2\pi \times 3 \times 3 = 27\pi \text{ m}^2$$

答：底面半径 3 m、高 3 m 时用料最省，最少用料 $27\pi \text{ m}^2$ 。

易错点： $S'(r) = 0$ 的解 $r = 3$ 落在定义域 $r > 0$ 内； h 必须由体积约束解出来再代入，别另设未知数。最省料时 $r = h$ ——这是“等高圆柱”的最优形状。

A20. B.

思路：设一边长建二次函数，求最大值。

解析：设长为 x ，则宽为 $\frac{36-2x}{2} = 18-x$ ，面积

$$S = x(18-x) = -(x-9)^2 + 81$$

对称轴 $x = 9 \in (0, 18)$ ，故 $x = 9$ （正方形）时 $S_{\max} = 81 \text{ m}^2$ 。选 B。**易错点：**周长 36 $\rightarrow$ 半周长 18（长宽和），别把 36 当长宽和；二次函数开口向下，最大值在对称轴处。

M8 解析：（1）底面为边长 $24-2x$ 的正方形，高为 x ，故

$$V(x) = x(24-2x)^2, \quad 0 < x < 12$$

定义域 $0 < x < 12$ ：剪去边长 $x > 0$ ，且 $24-2x > 0$ （底面边长仍为正）。（2） $V'(x) = (24-2x)^2 + x \cdot 2(24-2x) \cdot (-2) = (24-2x)(24-6x)$ 。令 $V'(x) = 0$ 得 $x = 12$ 或 $x = 4$ 。其中 $x = 12$ 不在定义域 $0 < x < 12$ 内（此时剪去半边长，底面退化为一条线），舍去。 $0 < x < 4$ 时 $V'(x) > 0$ ， $4 < x < 12$ 时 $V'(x) < 0$ ，故 $x = 4$ 处容积最大：

$$V(4) = 4 \times (24-8)^2 = 4 \times 256 = 1024 \text{ cm}^3$$

答: $x = 4 \text{ cm}$ 时容积最大, 最大容积 1024 cm^3 。

为什么错: 小明漏了定义域, 把 $x = 12$ 也当候选——它是 $V' = 0$ 的根但不在定义域内, 代入 $V(12) = 0$ 明显荒谬 (盒子的“底”没了)。**最优化建模第一件事就是写定义域; 凡是 $f' = 0$ 解出的点, 先查是否落在定义域内, 不在就舍。**

C2. 解析:

思路: 利润 = 单件利润 $\times$ 销量; 定义域由“售价不低于进价、销量非负”决定。

规范解: (1) 单件利润 $p - 50$, 日销量 $200 - 2p$,

$$L(p) = (p - 50)(200 - 2p) = -2p^2 + 300p - 10000, \quad 50 \leq p \leq 100$$

(2) $L'(p) = -4p + 300$, 令 $L'(p) = 0$ 得 $p = 75 \in [50, 100]$ 。比较:

$$L(50) = 0, \quad L(75) = 25 \times 50 = 1250, \quad L(100) = 0$$

故售价定为 75 元时日利润最大, 最大日利润 1250 元。复核: 75 元时单件利润 25 元、日销 $200 - 150 = 50$ 件, $25 \times 50 = 1250 \checkmark$ 。

易错点: $L(p)$ 是开口向下的二次函数, 最值在 $p = 75$ 处; 定义域 $[50, 100]$ 的两端 $L = 0$ 也要参与比较。

本章综合详解

S1 解析

思考路径: 含参三次函数 $f'(x) = x^2 - a$, 按 $a > 0$ 给出两个驻点 $\pm\sqrt{a}$, 列表求极值。

规范解: (1) $f'(x) = x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ 。 $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{a}$ 或 $x > \sqrt{a}$; $f'(x) < 0 \Rightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ 。故增区间为 $(-\infty, -\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a}, +\infty)$, 减区间为 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 。(2) 极大值 $f(-\sqrt{a}) = \frac{1}{3}(-\sqrt{a})^3 - a(-\sqrt{a}) = -\frac{1}{3}a\sqrt{a} + a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$; 极小值 $f(\sqrt{a}) = \frac{1}{3}a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = -\frac{2}{3}a\sqrt{a}$ 。极大值 - 极小值 $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} - \left(-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\right) = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ 。复核 $a = 1$: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, 极大 $f(-1) = \frac{2}{3}$, 极小 $f(1) = -\frac{2}{3}$, 差 $\frac{4}{3} \checkmark$ 。

易错点: $(\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}$ 这类运算别化简错; 极大值与极小值的差要带绝对值意识 (极大 $>$ 极小, 直接大减小)。

S2 解析

思考路径: 矩形一边靠墙, 篱笆只围三边——长 $= 120 - 2x$; 定义域由“长 > 0 ”得 $0 < x < 60$ 。

规范解: (1) 垂直于墙的边长为 x , 平行于墙的边长为 $120 - 2x$,

$$S(x) = x(120 - 2x) = -2x^2 + 120x, \quad 0 < x < 60$$

(2) $S'(x) = -4x + 120$, 令 $S'(x) = 0$ 得 $x = 30 \in (0, 60)$ 。 $0 < x < 30$ 时 $S' > 0$ (递增), $30 < x < 60$ 时 $S' < 0$ (递减), 故 $x = 30$ 时面积最大:

$$S(30) = 30 \times 60 = 1800 \text{ m}^2$$

答：垂直于墙的边 30 m、平行于墙的边 60 m 时面积最大，最大面积 1800 m^2 。

易错点：三边总长是 120 m ($2x + \text{长} = 120$)，不是 $120 = 2(x + \text{长})$ ——靠墙的那边不围，这是与“周长为 120”的差别，写错约束整个建模全错。

S3 解析

思考路径： e^x 与多项式之积——积法则求导，因式分解找驻点； e^x 恒正，符号由二次因子决定。

规范解：(1) $f'(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$ 。(2) 因 $e^x > 0$ ，符号只由 $x(x+2)$ 决定：

$$f'(x) > 0 \iff x < -2 \text{ 或 } x > 0; \quad f'(x) < 0 \iff -2 < x < 0$$

故增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ ，减区间为 $(-2, 0)$ 。极大值 $f(-2) = 4e^{-2}$ ，极小值 $f(0) = 0$ 。(3) 在 $[-2, 1]$ 上，候选点为驻点 -2 、 0 与端点 1 ：

$$f(-2) = 4e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = e \approx 2.72$$

故最大值为 e ($x = 1$ 处)，最小值为 0 ($x = 0$ 处)。

易错点： e^x 恒正这一点要写出来，符号判断才能落到 $x(x+2)$ 上；闭区间最值必须把端点 $x = 1$ 的 $f(1) = e$ 纳入比较——它超过了极大值 $4e^{-2}$ ，最大值在端点。

第八章 卷末综合检测

一、单选题

Z1. B。

思路：分别解两个集合（一元二次不等式与指数不等式），再取交集。

解析： $x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$ ，故 $A = (0, 3)$ 。 $2^x > 2 = 2^1$ ，因 $y = 2^x$ 单调递增， $x > 1$ ，故 $B = (1, +\infty)$ 。 $A \cap B = (1, 3)$ 。

易错点：交集取“同时满足”的部分，端点开闭要看清楚—— $x = 1$ 不在 B 内， $x = 3$ 不在 A 内。

Z2. C。

思路：每个数与 1 比较定大小区间，再比 a 与 b 。

解析： $c = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$ ； $b = 2^{0.3} > 2^0 = 1$ ，且 $b < 2^1 = 2$ ； $a = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$ 。比较 a 与 b ： $\log_2 3$ 是“2 的几次方等于 3”，约为 1.585； $2^{0.3}$ 约为 1.23。故 $1 < b < a$ ，综上 $c < b < a$ 。

易错点：只与 1 比较只能分出 $c < 1 < b$ 与 $c < 1 < a$ ，还必须比较 a 与 b ——可用估值（ $\log_2 3 > 1.5$ ， $2^{0.3} < 2^{0.5} < 1.5$ ）或换底。

Z3. A。

思路：由 a_2, a_5 求公比，再求首项与 S_6 。

解析： $a_5 = a_2 q^3$ ， $16 = 2q^3$ ， $q^3 = 8$ ， $q = 2$ 。 $a_1 = \frac{a_2}{q} = 1$ 。于是

$$S_6 = \frac{1 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 63$$

易错点： a_5 比 a_2 多乘 $5 - 2 = 3$ 个公比； $q = 2$ 时 $2^6 = 64$ ， $S_6 = 64 - 1 = 63$ 。

Z4. B。

思路：先由 $\sin \theta$ 求 $\cos \theta$ （注意第二象限符号），再求正切。

解析： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ， $\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ 。因 θ 在第二象限， $\cos \theta < 0$ ，故 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 。
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$ 。

易错点：第二象限余弦为负——漏负号是本题唯一陷阱。

二、多选题

Z5. ABC。

思路：用导数求单调性与极值，用零点/方程根的分解判断 D。

解析： $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。增区间 $(-\infty, -1)$ 、 $(1, +\infty)$ ，减区间 $(-1, 1)$ ，故 A 正确； $x = -1$ 处左正右负为极大值点，B 正确。在 $[-2, 2]$ 上， $f(-2) = -2$ ， $f(-1) = 2$ ， $f(1) = -2$ ， $f(2) = 2$ ，最大值为 2，C 正确。解方程 $x^3 - 3x = 2$ ： $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 = 0$ ，得 $x = 2$ 或 $x = -1$ （二重根），只有 2 个不同的实数根，D 错误。

易错点：D 的 $x = -1$ 是二重根——“3 个解”是把重根重复数了；方程 $f(x) = 2$ 与“零点个数”不同，先因式分解再数根。

Z6. ACD。

思路：逐项用等差数列基本量验证。

解析： $a_7 = a_1 + 6d = 20 - 18 = 2$ ，A 正确。 $S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = \frac{7 \times 22}{2} = 77$ ，B 说 98，错误。 $a_n = 23 - 3n$ ： $a_7 = 2 \geq 0$ ， $a_8 = -1 < 0$ ，最后一个非负项是 a_7 ，故 S_n 最大时 $n = 7$ ，C 正确；最大值为 $S_7 = 77$ ，D 正确。

易错点： $S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2}$ 中 $a_7 = 2$ 而非 3； S_n 最大在“最后一个非负项”处 (a_7)，不在“第一个负项” (a_8) 处。

三、填空题

Z7. $[1, +\infty)$ 。

思路：复合函数值域——先求真数 $x^2 - 2x + 3$ 的范围，再用对数单调性。

解析： $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ 。 $y = \log_2 t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 $\log_2(x^2 - 2x + 3) \geq \log_2 2 = 1$ 。值域为 $[1, +\infty)$ 。

易错点：真数配方的下界是 2， $\log_2 2 = 1$ 是值域下界；真数范围是 $[2, +\infty)$ 不是 $(0, +\infty)$ 。

Z8. $y = 2x - 2$ 。

思路：验证点在曲线上，求导得斜率，写点斜式。

解析： $f(1) = 1 - 1 = 0$ ，点 $(1, 0)$ 在曲线上。 $y' = 3x^2 - 1$ ， $y'(1) = 2$ 。切线方程 $y - 0 = 2(x - 1)$ ，即 $y = 2x - 2$ 。

易错点： x^3 的导数是 $3x^2$ ， x 的导数是 1， $y'(1) = 3 - 1 = 2$ ；点斜式中 $x_0 = 1$ 。

Z9. 61。

思路：递推数列——逐项代，或构造新等比。

解析：逐项代： $a_2 = 2 \times 1 + 3 = 5$ ， $a_3 = 13$ ， $a_4 = 29$ ， $a_5 = 61$ 。另法： $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ ， $\{a_n + 3\}$ 是首项 4、公比 2 的等比数列， $a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ， $a_n = 2^{n+1} - 3$ ， $a_5 = 2^6 - 3 = 61$ 。

易错点：构造等比时加的是 3（配常数使 $a_{n+1} + c = 2(a_n + c)$ ，解 $c = 3$ ），别配错； a_5 对应 $n = 5$ ， $2^6 - 3 = 61$ 。

四、解答题

Z10 解析

思考路径： $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$ ——分离常数后，定义域、值域、单调性一目了然；解不等式需先在单调区间内“脱壳”。

规范解：(1) 分母 $x+1 \neq 0$ ，定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 。

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$\frac{1}{x+1}$ 可取一切非零实数 ($x+1$ 遍历非零实数)，故 $2 - \frac{1}{x+1}$ 取不到 2。值域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

(2) 任取 $-1 < x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1+1}{x_1+1} - \frac{2x_2+1}{x_2+1} = \frac{(2x_1+1)(x_2+1) - (2x_2+1)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

因 $x_1 < x_2$ ，分子 $x_1 - x_2 < 0$ ；又 $x_1, x_2 > -1$ ，分母两个因子均大于 0。故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，即 $f(x_1) < f(x_2)$ ， $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增。■

(3) 由 $2x > -1$ 且 $x+1 > -1$ 得 $x > -\frac{1}{2}$ ，此时 $2x$ 与 $x+1$ 都在 f 的递增区间 $(-1, +\infty)$ 内。由单调递增，“脱壳”得

$$f(2x) < f(x+1) \iff 2x < x+1 \iff x < 1$$

与 $x > -\frac{1}{2}$ 取交集： $-\frac{1}{2} < x < 1$ 。复核：取 $x = 0$ ， $f(0) = 1$ ， $f(1) = \frac{3}{2}$ ， $1 < \frac{3}{2}$ ✓。

易错点：(2) 作差通分后分子化简必须写成 $x_1 - x_2$ （不是 $x_2 - x_1$ ）；(3) “脱壳”的前提是两个自变量都在同一个单调区间内——所以先由 $2x > -1$ 、 $x+1 > -1$ 定出 $x > -\frac{1}{2}$ ，再解 $2x < x+1$ ，缺一步都可能出错。

Z11 解析

思考路径：由 S_n 求 a_n ($n = 1$ 单独验证)； b_n 是“分母为两个相邻偶数之积”，裂项配系数。

规范解：(1) $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$ 。当 $n \geq 2$ 时

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$$

$n = 1$ 时 $2 \times 1 = 2 = a_1$ ，公式对 $n = 1$ 也成立，故 $a_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

$$(2) b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2n \cdot 2(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)。于是$$

$$T_n = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}$$

复核： $n = 1$ 时 $T_1 = b_1 = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$ ，公式 $\frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$ ✓。

易错点：(1) $n = 1$ 的验证不能省—— $S_n = n^2 + n$ 无常数项所以恰好合并，若带常数项就必须分段（见第 6 章 M1）。(2) 裂项配系数 $\frac{1}{4}$ ： $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 无系数，但 $a_n = 2n$ 使分母变成 $4n(n+1)$ ，先提 $\frac{1}{4}$ 再裂项，漏提系数是最常见错误。

Z12 解析

思考路径：求导 $\rightarrow$ 列表定单调与极值；闭区间最值“端点 + 驻点”；方程根数转化为“水平线 $y = m$ 与曲线交点个数”。

规范解：(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ ，驻点 $x = 0, x = 2$ 。列表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大	递减	极小	递增

极大值 $f(0) = 1$ ，极小值 $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$ 。增区间为 $(-\infty, 0)$ 、 $(2, +\infty)$ ，减区间为 $(0, 2)$ 。

(2) 在 $[0, 3]$ 上，候选点为驻点 0, 2 与端点 3：

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -3, \quad f(3) = 27 - 27 + 1 = 1$$

最大值 1 ($x = 0, 3$ 处)，最小值 -3 ($x = 2$ 处)。

(3) $f(x) = m$ 在 $(0, 3)$ 内有两个不同实根 $\iff$ 水平线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ ($x \in (0, 3)$) 的图象有两个交点。由 (1) 知 f 在 $(0, 2)$ 上从 1 递减到 -3，在 $(2, 3)$ 上从 -3 递增到 $f(3) = 1$ 。在开区间 $(0, 3)$ 内， f 的值域为 $[-3, 1)$ ($x = 2$ 处取到 -3，端点 1 取不到)。要两个交点：

$$-3 < m < 1$$

当 $m = -3$ 时只有 $x = 2$ 一个不同实根（二重），当 $m \geq 1$ 时在 $(0, 3)$ 内至多一个根或没有，均不合题意。复核： $m = 0$ 时 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在 $(0, 2)$ 有一个根 (f 从 1 降到 -3 必过 0)、 $(2, 3)$ 有一个根（从 -3 升到 1 必过 0），共两个 $\checkmark$ 。

易错点：(3) 两个条件都要检查—— m 介于极小值 -3 与“峰高”之间，且端点 $x = 0, 3$ 在开区间外， $m = 1$ 时交点落在端点（不在 $(0, 3)$ 内）所以 $m = 1$ 不合； $m = -3$ 时根在极小值点（重根）只算一个。

Z13 解析

思考路径：含参指数函数讨论单调—— $f'(x) = e^x - a$ 按 a 分情形；恒成立问题转化为“最小值 ≥ 0 ”，注意 $f(0) = 0$ 的边界地位。

规范解：(1) $f'(x) = e^x - a$ 。若 $a \leq 0$ ： $e^x - a \geq e^x > 0$ ， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。若 $a > 0$ ： $f'(x) < 0 \Rightarrow x < \ln a$ ， $f'(x) > 0 \Rightarrow x > \ln a$ ，故 f 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增。

(2) $f(0) = 0$ 。要使 $f(x) \geq 0$ 对一切 $x \geq 0$ 恒成立， $x = 0$ 必须是 f 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值点。若 $a \leq 1$ ：对 $x \geq 0$ ， $f'(x) = e^x - a \geq e^x - 1 \geq 0$ ， f 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，故

$f(x) \geq f(0) = 0$, 满足。若 $a > 1$: $\ln a > 0$ 且为 f 的极小值点, 取 $x = \ln a$ 得

$$f(\ln a) = a - a \ln a - 1 = a(1 - \ln a) - 1$$

设 $g(a) = a - a \ln a - 1$ ($a > 1$), $g'(a) = -\ln a < 0$, g 单调递减, $g(a) < g(1) = 0$, 故 $f(\ln a) < 0$, 不满足恒成立。综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$ 。

(3) 取 $a = 1$ (满足 (2) 的条件), 得 $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ 对一切 $x \geq 0$ 成立, 即 $e^x \geq 1 + x$ 。由 (2) 知 f 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增且 $f(0) = 0$, 故等号成立当且仅当 $x = 0$ 。

易错点: (2) 不能只解 “ $f'(x) \geq 0$ 恒成立” (那会得到 $a \leq 1$ 但理由不完整) ——必须利用 $f(0) = 0$ 把恒成立问题落到 “最小值点” 上: $a \leq 1$ 时 f 递增、最小值在 $x = 0$; $a > 1$ 时最小值在 $x = \ln a$ 处且为负。含 e^x 的恒成立问题, “边界值 $f(0) = 0$ ” 往往是突破口。