

GRADUS

数学 I

循迹而上 · 拾级登顶

寻迹 · 梦叶子 编著

目录

第一章 集合与常用逻辑用语	1
1.1 集合的概念	1
1.2 集合间的基本关系	2
1.3 集合的基本运算	3
1.4 充分条件与必要条件	5
1.5 全称量词与存在量词	6
第二章 一元二次函数、方程和不等式	9
2.1 等式性质与不等式性质	9
2.2 基本不等式	10
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式	11
第三章 函数的概念与性质	15
3.1 函数的概念及其表示	15
3.2 函数的基本性质	16
3.3 幂函数	18
3.4 函数的应用（一）	19
第四章 指数函数与对数函数	21
4.1 指数与指数幂的运算	21
4.2 指数函数	22
4.3 对数与对数运算	23
4.4 对数函数	24
4.5 函数的应用（二）：零点、二分法与增长模型	25
第五章 三角函数	27
5.1 任意角与弧度制	27

5.2	三角函数的概念与同角关系	28
5.3	诱导公式	29
5.4	三角函数的图象与性质	29
5.5	三角恒等变换	31
5.6	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	32
5.7	三角函数的应用	33
第六章	数列	35
6.1	数列的概念、递推公式与前 n 项和	35
6.2	等差数列	36
6.3	等比数列与求和工具	38
6.4	数学归纳法	40
第七章	一元函数的导数及其应用	43
7.1	导数的概念及其几何意义	43
7.2	导数的运算	44
7.3	函数的单调性与极值	45
7.4	函数的最大（小）值与导数	47
第八章	卷末综合检测	51

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念

考点精要

Q1 集合与元素是什么？集合的三特性是哪三条？

A 研究对象统称元素，由元素组成的总体叫集合。三特性：**确定性**（任一对象属不属于集合一问便知）、**互异性**（同一集合内元素不重复）、**无序性**（ $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 1\}$ 是同一集合）。

Q2 判断一组对象能否组成集合，关键看什么？

A 看“检验标准”是否明确：给定任一对象，能否明确回答它属不属于。标准模糊（如“成绩优秀”“个子高”“接近 0”）就不能组成集合；标准清楚，哪怕元素无限也能组成集合。

Q3 元素与集合的关系用什么符号表示？“属于”与“包含于”有何区别？

A $a \in A$ （属于，元素对集合）与 $a \notin A$ （不属于）；集合与集合之间用 $\subseteq$ （包含于）。 $1 \in \{1, 2\}$ 对， $1 \subseteq \{1, 2\}$ 就错了。

Q4 列举法与描述法各适合什么情况？

A 元素有限且不多——列举法，把元素一一列出；元素无限或很多但有共同特征——描述法，写成 $\{x \mid p(x)\}$ 。

Q5 常见数集的记号有哪些？

A $\mathbb{N}$ 自然数集（含 0）、 $\mathbb{N}^*$ 正整数集、 $\mathbb{Z}$ 整数集、 $\mathbb{Q}$ 有理数集、 $\mathbb{R}$ 实数集。

例题精讲

例题 1.1

（集合的概念与表示）判断下列对象能否组成集合；若能，用适当方法表示。（1）方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实数解；（2）本班“成绩优秀”的同学；（3）大于 1 且小于 10 的偶数。

知识点 (1) 集合的概念与表示

A1. 下列对象能组成集合的是（ ）

A. 某班“个子高”的同学 B. 接近 0 的数 C. 方程 $x^2 = 9$ 的实数解 D. 比较大的数

A2. 用列举法表示集合 $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 < 20\}$ ，正确的是（ ）

A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ C. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

A3. 集合 $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$ 用列举法表示为 ()

A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

A4. 下列关系正确的是 ()

A. $0 \in \mathbb{N}^*$ B. $\pi \in \mathbb{Q}$ C. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ D. $-1 \in \mathbb{N}$

1.2 集合间的基本关系

考点精要

Q1 子集与真子集的定义是什么?

A 若 A 中任意一个元素都属于 B , 则 $A \subseteq B$; 若 $A \subseteq B$ 且 B 中存在不属于 A 的元素, 则 $A \subsetneq B$ (真子集)。

Q2 空集与任何集合的关系是什么?

A 规定: 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$ 对任意 A 成立。做含参子集题, 第一刀永远是“ $B = \emptyset$ 行不行”。

Q3 如何判断两个集合相等?

A 不靠“长得像”, 靠互相包含: $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时, $A = B$ 。

Q4 含 n 个元素的集合的子集、真子集、非空真子集个数分别是多少?

A 2^n 个、 $2^n - 1$ 个、 $2^n - 2$ 个。把每个元素想成一个“选 / 不选”的开关, n 个开关共 2^n 种状态。

Q5 已知“ $B \subseteq A$ ”求参数, 标准流程是什么?

A 先解出能列举的集合 A , 把“子集”翻译成“元素必在”, 先检 $B = \emptyset$, 再检 B 非空时元素是否逐个落在 A 内, 端点开闭逐一检验。

例题精讲

例题 1.2

(含参子集) 已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值集合。

知识点 (1) 子集与真子集

A5. 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, 下列关系正确的是 ()

A. $1 \subseteq A$ B. $\{1\} \in A$ C. $\emptyset \subseteq A$ D. $\{1, 2\} \in A$

A6. 集合 $A = \{0, 1\}$ 的真子集的个数为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

A7. 集合 $\{a, b, c\}$ 中含元素 a 的子集的个数为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

A8. 已知 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a \geq 3$ B. $a \leq -2$ C. $a \geq -2$ D. $a \leq 3$

B1. (2023 · 新课标 II 卷 · T2) 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()

A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

M1. 已知 $A = \{1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a > 0$ B. $-1 < a \leq 1$ C. $a \geq 1$ D. $a = 1$

M2. 已知集合 A 有 n 个元素, 关于子集个数下列说法正确的是 ()

- A. 若 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 A 有 6 个真子集
- B. 若 A 有 16 个子集, 则 A 有 5 个元素
- C. 若 A 有 15 个真子集, 则 A 有 4 个元素
- D. A 的非空真子集个数比真子集个数多 1

1.3 集合的基本运算

考点精要

Q1 交集与并集的定义是什么?

A $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ (两个集合都有的元素); $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ (至少属于一个, 重复只写一次)。

Q2 求补集最关键的一步是什么?

A 先圈出全集 U 。 $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ ——全集换了, 补集立刻变脸。

Q3 德摩根律怎么表述?

A $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$, $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$ 。“两个条件同时不满足”就是“两个补集满足其一”。

Q4 容斥原理 (两集合) 是什么?

A $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。求并集人数时, 两堆相加要减去重复计算的重叠部分。

例题精讲

例题 1.3

(交、并、补运算) 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 。(1) 求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$; (2) 求 $\complement_U A$ 与 $\complement_U(A \cup B)$ 。

知识点 (1) 交集与并集

A9. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B$ 与 $A \cup B$ 分别是 ()

- A. $\{2, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ B. $\{1, 3\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4\}$
C. $\{2, 4\}$ 与 $\{2, 4\}$ D. $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

A10. 已知 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid x \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ B. $\{x \mid -1 < x \leq 0\}$ C. $\{x \mid 0 < x < 3\}$ D. $\{x \mid x > -1\}$

A11. 某班 45 人, 爱好数学的 30 人, 爱好物理的 25 人, 两样都爱好的 18 人, 则至少爱好一科的人数为 ()

- A. 37 B. 40 C. 42 D. 55

B2. (2024 · 新高考 I 卷 · T1) 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

知识点 (2) 补集与德摩根律

A12. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{1, 3, 5\}$ B. $\{1, 3, 5, 7\}$ C. $\emptyset$ D. $\{2, 4, 6\}$

A13. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{1, 3, 5, 6\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{3, 5, 6\}$ D. $\{2, 4\}$

A14. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{6\}$ B. $\{1, 3, 4, 5\}$ C. $\emptyset$ D. $\{1, 3, 4, 5, 6\}$

A15. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) =$ ()

- A. $\{6\}$ B. $\{1, 2, 4, 6\}$ C. $\{2, 4, 6\}$ D. $\emptyset$

A16. 某班 40 人, 参加体育社团 22 人, 参加文艺社团 18 人, 两个社团都参加的有 10 人, 则两个社团都没参加的有 () 人

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

B3. (2022 · 全国乙卷理 · T1) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则 ()

- A. $2 \in M$ B. $3 \in M$ C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$

B4. (2022 · 全国甲卷理 · T3) 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) =$ ()

- A. $\{1, 3\}$ B. $\{0, 3\}$ C. $\{-2, 1\}$ D. $\{-2, 0\}$

M3. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{2, 4, 6\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

C1. (图书馆查书系统) 某校图书馆检索系统按关键词筛书。设全集 U 为馆藏全部图书, A 为“书名含『函数』的图书”, B 为“书名含『不等式』的图书”, C 为“数学类图书”。已知

$|U|=5000$, $|A|=120$, $|B|=80$, $|A \cap B|=15$, $|C|=2000$, 且 $A \cup B \subseteq C$ 。(1) 用集合语言表示“书名既含『函数』又含『不等式』的图书”; (2) 求“书名含『函数』或含『不等式』”的图书数量; (3) 求“数学类图书中书名既不含『函数』也不含『不等式』”的图书数量。

C2. (选科组合) 某高中高一共有 600 名学生。设全集 U 为全体高一学生, A 为“选物理”, B 为“选化学”, C 为“选生物”。已知 $|A|=320$, $|B|=280$, $|C|=180$, $|A \cap B|=160$, $|A \cap C|=80$, $|B \cap C|=60$, $|A \cap B \cap C|=30$ 。(1) 求至少选了物理、化学、生物中一门的学生数; (2) 求三门都没选的学生数。

1.4 充分条件与必要条件

考点精要

Q1 什么是命题?

A 可以判断真假的陈述句。祈使句、疑问句不是命题。

Q2 若 $p \Rightarrow q$, p 与 q 各是什么条件?

A p 是 q 的**充分条件**(有 p 就足够推出 q); q 是 p 的**必要条件**(没 q 就没 p)。一句话: **箭头从 p 出发, p 在前为充分, q 在后为必要**。

Q3 用集合判断充分必要, 关键是什么?

A 设 p 、 q 对应的解集为 P 、 Q : $P \subseteq Q \iff p \Rightarrow q$, 即**小集合对应的条件是充分条件**。画数轴标好两个集合, 箭头永远从小集合指向大集合。

Q4 证明“ p 是 q 的充要条件”要几步?

A 两步, 一步不能省: **充分性** ($p \Rightarrow q$) 与**必要性** ($q \Rightarrow p$) 都证完, 才可下结论。

Q5 “求使 p 是 q 的必要不充分条件的参数范围”怎么翻译?

A p 对应 A , q 对应 B , 则该条件等价于 $B \subsetneq A$ ——逻辑问题翻译成集合包含问题, 用数轴解决。

例题精讲

例题 1.4

(判断充分条件与必要条件) 判断下列各题中 p 是 q 的什么条件: (1) $p: x > 2$, $q: x > 1$; (2) $p: x^2 = 4$, $q: x = 2$; (3) p : 四边形是菱形, q : 四边形是平行四边形。

知识点 (1) 充分条件、必要条件与充要条件

A17. 已知 $p: x > 3$, $q: x > 1$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

A18. 已知 $p: x^2 = 9$, $q: x = 3$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

A19. 已知 $p: ab = 0$, $q: a = 0$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

A20. 设 $P = \{x | x < 3\}$, $Q = \{x | x < 5\}$, 则 “ $x \in P$ ” 是 “ $x \in Q$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

B5. (2023 · 天津卷 · T2) “ $a^2 = b^2$ ” 是 “ $a^2 + b^2 = 2ab$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

M4. 依次回答三个空, 正确的是 () (1) “ $x > 2$ ” 是 “ $x > 1$ ” 的____条件; (2) “ $x > 1$ ” 是 “ $x > 2$ ” 的____条件; (3) 若集合 $P \subseteq Q$, 则 “ $x \in P$ ” 是 “ $x \in Q$ ” 的____条件。

A. 充分不必要; 必要不充分; 充分不必要 B. 必要不充分; 充分不必要; 必要不充分

C. 充分不必要; 必要不充分; 必要不充分 D. 必要不充分; 充分不必要; 充分不必要

1.5 全称量词与存在量词

考点精要

Q1 全称量词与存在量词用什么符号表示?

A 全称量词 “所有、任意” 用 $\forall$; 存在量词 “存在、至少有一个” 用 $\exists$ 。

Q2 判断全称量词命题真假的方法?

A 要检查每一个元素都满足——只要找到一个反例, 全称命题就是假的。

Q3 判断存在量词命题真假的方法?

A 只需找出一个满足条件的元素即可成立; 一个都找不到才假。本质是在解方程或不等式。

Q4 命题的否定规则是什么?

A 量词与结论同时变化: $\forall$ 变 $\exists$, $\exists$ 变 $\forall$, 且结论 $p(x)$ 改成 $\neg p(x)$ (“ $>$ ” 改 “ $\leq$ ”、“ $=$ ” 改 “ $\neq$ ”)。原命题与否定一真一假。

例题精讲

例题 1.5

(命题的否定) 写出下列命题的否定, 并判断其真假: (1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$; (2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ 。

知识点 (1) 全称量词与存在量词

A21. 下列命题是真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ C. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ D. $\exists x \in \mathbb{N}, x < 0$

A22. 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ” 的否定是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ D.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$$

B6. (2024 · 新课标 II 卷 · T2) 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$ 。则 ()

A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题 C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

M5. 命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$ ” 的否定是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 1$

本章综合

S1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, $B = \{x \mid a \leq x \leq 2a - 1\}$ 。(1) 求集合 A ; (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围; (3) 求集合 A 的子集个数与真子集个数。

S2. 设 $p: 1 \leq x \leq 3$, $q: m < x < m + 4$ 。若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围。

S3. 已知命题 $p: \forall x \in [1, 2], x^2 - a \geq 0$; 命题 $q: \exists x \in [1, 2], x^2 - a \leq 0$ 。(1) 写出命题 p 的否定 $\neg p$; (2) 若 p 为真命题, 求 a 的取值范围; (3) 若 p 与 q 一真一假, 求 a 的取值范围。

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质

考点精要

Q1 比较两个数（式）大小最通用的方法是什么？

A 作差法：作差 $a - b$ ，配方、因式分解或通分变形到能判断符号，再由“ $a - b > 0 \iff a > b$ ”下结论。

Q2 不等式性质 (3)（加法性质）说什么？

A $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ ——两边同加同一个数，不等号方向不变。

Q3 性质 (4)（乘法性质）最关键的一句话是什么？

A 乘或除以**正数**方向不变，乘或除以**负数**方向必须反向； $c = 0$ 时严格不等式还可能变成等式。下笔前先问：“这个 c 是正还是负？”

Q4 “同向可乘”的适用前提是什么？

A $a > b > 0$ 且 $c > d > 0$ 时才有 $ac > bd$ ——**两个正数**且同向。两个负数相乘，方向未必保持。

Q5 判断“由 $a > b$ 能否推出某不等式”的通用策略？

A 看每一步用了哪条性质、前提是否满足；前提不满足就**举反例**推翻它（如 $a = 1, b = -2$ 可同时推翻 $a^2 > b^2$ 、 $|a| > |b|$ 等“需要正数前提”的结论）。

例题精讲

例题 2.1

（作差法比较大小）比较下列各组式子的大小，并指出等号何时成立：(1) $x^2 + 4$ 与 $4x$ ；(2) $(x + 1)(x + 3)$ 与 $(x + 2)^2$ 。

知识点 (1) 不等式的性质与比较大小

A1. 已知 $a > b, c > 0$ ，则下列不等式成立的是（ ）

A. $ac < bc$ B. $a + c > b + c$ C. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ D. $-ac > -bc$

A2. 用作差法比较 $x^2 + 3$ 与 $2x + 2$ 的大小，并指出等号成立的条件。

A3. 已知 $a < b < 0$, 下列不等式一定成立的是 ()

- A. $a^2 < b^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $|a| < |b|$ D. $a^3 < b^3$

A4. 已知 $a > b$, $c < 0$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $ac > bc$ B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ C. $a + c > b + c$ D. $-ac > -bc$

A5. 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $ac > bd$ B. $ac < bd$ C. $ad > bc$ D. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

B1. (2022 · 新高考 II 卷 · T12, 多选) 若 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

- A. $x + y \leq 1$ B. $x + y \geq -2$ C. $x^2 + y^2 \leq 2$ D. $x^2 + y^2 \geq 1$

M1. 已知 $a > b$, 则下列命题中为真的是 ()

- A. $a^2 > b^2$ B. $|a| > |b|$ C. $a^3 > b^3$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

2.2 基本不等式

考点精要

Q1 基本不等式的代数形式与取等条件?

A 对 $a > 0, b > 0$: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号。两个正数的算术平均数不小于几何平均数。

Q2 “一正二定三相等” 分别指什么?

A 一正: 两式必须都是正数; 二定: 和为定值时积有最大值、积为定值时和有最小值; 三相等: 等号条件 $a = b$ 在允许的取值范围内确实取得到。三条缺一不可。

Q3 “和定积最大” 怎么用?

A 若 $x + y$ 为定值 S , 则 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{4}$, 等号当 $x = y$ 时成立。如周长一定的矩形中正方形面积最大。

Q4 “积定和最小” 怎么用?

A 若 xy 为定值 P , 则 $x + y \geq 2\sqrt{P}$, 等号当 $x = y$ 时成立。如 $x + \frac{k}{x} \geq 2\sqrt{k}$ ($x > 0$)。

Q5 直接套不上定值时怎么办?

A 配凑: 把“不定的和”拆成“定积的和”。如 $x + \frac{k}{x-1} = (x-1) + \frac{k}{x-1} + 1$, 凑出互为倒数的两项。

例题精讲

例题 2.2

(基本不等式求最值) 已知 $x > 1$, 求 $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值。

知识点 (1) 基本不等式及其应用

A6. 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为 ()

A. 3 B. 6 C. 9 D. 18

A7. 已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 10$, 则 xy 的最大值为 ()

A. $\frac{25}{2}$ B. 12 C. 25 D. 50

A8. 已知 $x > 0$, 则 $2x + \frac{8}{x}$ 的最小值为 ()

A. 4 B. 6 C. 8 D. 16

A9. 已知 $x > 0, y > 0, x + y = 4$, 则 xy 的最大值为 ()

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

B2. (2020 · 新高考 I 卷 · T11, 多选) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

M2. 已知 $x < 0$, 则 $x + \frac{1}{x}$ ()

A. 有最小值 2 B. 有最小值 -2 C. 有最大值 -2 D. 有最大值 2

M3. 已知 $x \in [3, 5]$, 则 $y = x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 ()

A. 4 B. $\frac{13}{3}$ C. $\frac{29}{5}$ D. $\frac{17}{4}$

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

考点精要

Q1 “三个二次”的关系是什么?

A 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标 = 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根 = 不等式解集的端点。一根抛物线，三个答案全齐。

Q2 口诀“大于取两边，小于取中间”的适用前提是什么?

A 前提是 $a > 0$ (开口向上)。见到 $-x^2$ 开头，先两边同乘 -1 化正，**注意不等号反向**，再套口诀。

Q3 判别式 Δ 与根的关系?

A $\Delta > 0$ 两个不等实根； $\Delta = 0$ 两个相等实根； $\Delta < 0$ 无实根。计算 Δ 时 b^2 是 b 整体平方 (含符号)，如 $b = -4$ 时 $b^2 = 16$ 。

Q4 $ax^2 + bx + c > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立的条件?

A 分两类： $a = 0$ 时退化一次 (单独讨论)； $a \neq 0$ 时需 $a > 0$ 且 $\Delta < 0$ 。**不要丢掉 $a = 0$ 那一刀。**

Q5 解含参数的一元二次不等式，讨论的分界点怎么找?

A 先因式分解出两根，再比较两根大小找参数的分界点（如 $(x-1)(x-a) > 0$ 的分界点是 $a=1$ ），分区间讨论。

例题精讲

例题 2.3

（三个二次）已知二次函数 $y = 3x^2 - 8x + 4$ 。(1) 求该函数图象与 x 轴的交点；(2) 解不等式 $3x^2 - 8x + 4 < 0$ ；(3) 解不等式 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ 。

知识点 (1) 三个二次与一元二次不等式

A10. 不等式 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid 2 < x < 3\}$ B. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$ C. $\{x \mid -3 < x < -2\}$ D. $\emptyset$

A11. 不等式 $3x^2 - 4x + 1 > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x \mid \frac{1}{3} < x < 1\}$ C. $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\mathbb{R}$

A12. 若关于 x 的不等式 $x^2 - 2x + a > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ()

A. $a > 1$ B. $a \geq 1$ C. $a < 1$ D. $a \leq 1$

A13. 若一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围为 ()

A. $m > 4$ B. $m < 4$ C. $m \geq 4$ D. $m \leq 4$

A14. 不等式 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$ B. $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ C. $\{x \mid x \leq -4 \text{ 或 } x \geq 1\}$ D. $\{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$

A15. 不等式 $-x^2 + 5x - 6 > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid 2 < x < 3\}$ B. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$ C. $\{x \mid -3 < x < -2\}$ D. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$

A16. 不等式 $x^2 + 2x + 3 > 0$ 的解集为 ()

A. $\mathbb{R}$ B. $\emptyset$ C. $\{x \mid x \neq -1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

A17. 若不等式 $x^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x \mid -1 < x < 2\}$ ，则 $b+c =$ ()

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

A18. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 ()

A. $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ B. $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ C. $(-1, 0)$ 、 $(1, 0)$ D. $(1, 0)$ 、 $(-3, 0)$

A19. 不等式 $2x^2 - x - 1 > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\}$ C. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ D. $\{x \mid -1 < x < \frac{1}{2}\}$

A20. 若不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $\{x \mid -2 < x < 1\}$ ，则 $a+b =$ ()

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

A21. 若不等式 $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $-2 \leq a \leq 2$ B. $-2 < a < 2$ C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ D. $a < -2$ 或 $a > 2$

B3. (2023 · 新课标 I 卷 · T1) 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

B4. (2022 · 新高考 I 卷 · T1) 若集合 $M = \{x \mid \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x \mid 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 2\}$ C. $\{x \mid 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

B5. (2022 · 新高考 II 卷 · T1) 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid |x - 1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$

M4. 不等式 $-x^2 + 2x + 3 > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 3\}$ C. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\{x \mid -3 < x < 1\}$

M5. 若关于 x 的不等式 $kx^2 + kx + 2 > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $0 < k < 8$ B. $0 \leq k < 8$ C. $k > 8$ D. $0 < k \leq 8$

M6. 已知一元二次方程 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 。(1) 写出判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的完整计算过程, 并判断根的情况;(2) 若某同学把 Δ 算成 $b^2 - 4ac = -4^2 - 4 \times 3 \times 1 = -28$, 指出错在哪里。

C1. (围栏面积) 学校后勤要用 48 m 长的围栏在操场边围一块矩形运动区, 其中一边利用已有的围墙(围墙长 30 m)。(1) 设垂直于围墙的边长为 x m, 写出运动区面积 S (m^2) 关于 x 的函数表达式及定义域;(2) 怎样围面积最大? 最大面积是多少?

C2. (定价利润) 某商店以 50 元/件购入一批商品, 定价 90 元/件时每天可售出 60 件。市场调研显示: 每降价 1 元, 日销量增加 5 件。(1) 设降价 x 元, 写出日利润 y (元) 关于 x 的函数表达式及定义域;(2) 要使日利润不低于 2400 元, 应降价多少元(写出降价范围)? (3) 降价多少元时日利润最大? 最大日利润是多少?

本章综合

S1. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ 。(1) 若 $f(x) > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围;(2) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的正实数根, 求 a 的取值范围;(3) 当 $a = 3$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 2$ 。

S2. 用长 L m 的篱笆围一块矩形菜地, 其中一边靠墙(墙长为 m m)。(1) 设垂直于墙的边长为 x m, 证明当 $m \geq \frac{L}{2}$ 时, 面积最大值为 $\frac{L^2}{8}$;(2) 当 $L = 40$ 、墙长 $m = 15$ 时, 实际可围成的最大面积是多少? 与理论最大值 $\frac{L^2}{8}$ 比较, 说明差异的原因。

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

考点精要

Q1 函数的三要素是什么？

A 定义域、对应关系、值域——定义域和对应关系定了，值域就唯一确定。

Q2 判断“是不是函数”只看什么？

A 定义域中每一个元素都能找到唯一 y （一对一/多对一都行，一对多不行）。

Q3 三种表示法各自什么时候好用？

A 列表法：离散取值；图象法：看趋势（单调/最值）；解析法：精确计算。

Q4 分段函数是一个函数还是几个？

A 一个函数，只是分段表达。值域是各段值域的并集。

Q5 定义域的“三个禁区”？

A 分母 $\neq 0$ 、偶次根号下 ≥ 0 、实际问题满足现实约束。

例题精讲

例题 3.1

（判断函数）下列对应哪些是函数？(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $f: x \mapsto 2x$; (2) $y^2 = x$; (3) 学生 $\mapsto$ 学号。

例题 3.2

（求定义域）求 $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 的定义域。

例题 3.3

（分段求值）已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(f(-1))$ 。

知识点 (1) 函数的概念

A1. 下列图象能表示 y 是 x 的函数的是 ()

A. 竖直直线 B. 圆 C. 斜率为正的直线 D. 开口向右的抛物线

A2. 函数 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 的定义域是 ()

A. $(-2, +\infty)$ B. $[-2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2]$ D. $\mathbb{R}$

A3. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 则 $f(2) =$ ()

A. -1 B. 1 C. 3 D. 5

A4. 下列各组函数表示同一函数的是 ()

A. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2}{x}$
C. $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x$ D. $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

M1. 已知 $f(x) = x^2$, 则 $f(x+1) - f(x) =$ ()

A. 1 B. $2x+1$ C. $2x-1$ D. x^2+1

知识点 (2) 函数的表示法与分段函数

A5. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(-1) + f(0) + f(1) =$ ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

A6. 某公园门票成人 30 元儿童 15 元, 家庭 2 成人 x 儿童, 总价 $y =$ ()

A. $30x+15$ B. $60+15x$ C. $60x+15$ D. $45x$

A7. 已知 $f(x) = 2x+1$, 则 $f(x+1) =$ ()

A. $2x+2$ B. $2x+3$ C. $2x+1$ D. $x+2$

M2. 函数 $f(x) = x^0$ 的定义域是 ()

A. $\mathbb{R}$ B. $\{0\}$ C. $x \neq 0$ D. $x > 0$

3.2 函数的基本性质

考点精要

Q1 定义法证单调性四步?

A 取值 $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 定号。

Q2 单调区间为何不能写并集?

A 递增要求任意 $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 并集破坏跨段任意性。

Q3 闭区间二次函数最值关键?

A 先看对称轴是否在区间内：在内看顶点，不在只看端点。

Q4 判断奇偶性第一步？

A 先查定义域关于原点对称，不对称直接非奇非偶。

Q5 偶函数 + 单调比大小怎么办？

A 先对称化 ($f(-a) = f(a)$) 再比。

例题精讲

例题 3.4

(定义法证单调) 证明 $f(x) = 2x + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。

例题 3.5

(闭区间最值) 求 $f(x) = -x^2 + 4x$ 在 $[1, 4]$ 上的最大最小值。

例题 3.6

(奇偶性判定) 判断 $f(x) = x^4 + x^2$ 、 x^3 、 $x^2 + x$ 、 $\sqrt{x}$ 的奇偶性。

知识点 (1) 单调性

A8. 函数 $f(x) = 3 - x$ 在 $\mathbb{R}$ 上 ()

A. 单调递增 B. 单调递减 C. 不增不减 D. 先增后减

A9. $f(x) = x^2 - 2x$ 的单调递增区间是 ()

A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $[0, +\infty)$

A10. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是 ()

A. 增函数 B. 减函数 C. 先增后减 D. 非单调

A11. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增且 $f(2a) < f(a+1)$, 则 a 的范围是 ()

A. $a < 1$ B. $a > 1$ C. $a < -1$ D. $a > -1$

B2. (2023 · 新课标 I 卷) 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

M3. 下列说法正确的是 ()

A. 若 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 和 $[3, 5]$ 上都递增, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2] \cup [3, 5]$ 上递增

B. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增, 则在任意子区间上也递增

C. $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 2]$ 上最小值是 $f(-1) = 1$

D. 奇函数图象一定过原点

知识点 (2) 奇偶性

A12. 下列函数中偶函数的是 ()

A. $f(x) = x^3$ B. $f(x) = x^2 + 1$ C. $f(x) = 2x$ D. $f(x) = x + 1$

A13. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上奇函数, 则 $f(0) = (\quad)$

A. 0 B. 1 C. -1 D. 不确定

A14. 求 $f(x) = x^2 - 4x$ 在 $[0, 3]$ 上的最小值: ____。

B3. (2023 · 全国乙卷) 已知 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 则 $a = (\quad)$

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

B4. (2023 · 新课标 II 卷) 若 $f(x) = (x + a) \ln \frac{2x - 1}{2x + 1}$ 为偶函数, 则 $a = (\quad)$

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

M4. 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的奇偶性是 $(\quad)$

A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶 D. 既奇又偶

M5. 已知 $f(x)$ 是偶函数且在 $[0, +\infty)$ 上递增, 则 $f(-3)$ 、 $f(2)$ 、 $f(-4)$ 大小关系是 $(\quad)$

A. $f(-3) < f(2) < f(-4)$ B. $f(2) < f(-3) < f(-4)$

C. $f(-4) < f(-3) < f(2)$ D. $f(2) < f(-4) < f(-3)$

知识点 (3) 周期性与抽象函数 (新高考趋势)

B5. (2022 · 新高考 II 卷) 已知 $f(x)$ 定义域 $\mathbb{R}$, 且 $f(x + y) + f(x - y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$

A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

B6. (2023 · 新高考 I 卷 · 多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 $(\quad)$

A. $f(0) = 0$ B. $f(1) = 0$ C. $f(x)$ 是偶函数 D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

B7. (2024 · 新高考 I 卷) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x) > f(x - 1) + f(x - 2)$, 且当 $x < 3$ 时 $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是 $(\quad)$

A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1000$ C. $f(10) < 1000$ D. $f(20) < 10^4$

M6. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 3 的奇函数, 且 $f(1) > 1$, $f(2) = a$, 则 a 的取值范围是 $(\quad)$

A. $a > 1$ B. $a < -1$ C. $a < -1$ 或 $a > 1$ D. $a \neq \pm 1$

A15. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数, 且 $f(3) = 5$, 则 $f(2023) = (\quad)$

A. 3 B. 5 C. 2 D. 2023

3.3 幂函数

考点精要

Q1 什么是幂函数?

A $y = x^\alpha$ (底数是变量、指数是常数、系数为 1)。

Q2 幂函数与指数函数怎么区分?

A 幂函数底数变指数定 (x^2); 指数函数底数定指数变 (2^x)。

Q3 幂函数单调性怎么用?

A 指数相同看 $y = x^\alpha$: $\alpha > 0$ 递增、 $\alpha < 0$ 递减。

例题精讲

例题 3.7

(幂函数辨析) 哪些是幂函数? $y = 2x$ 、 x^2 、 2^x 、 x^0 、 $(\frac{1}{2})^x$ 。

例题 3.8

(单调性比大小) 比较 $0.2^{0.3}$ 与 $0.3^{0.3}$; 2.1^{-1} 与 2.3^{-1} 。

知识点 (1) 幂函数概念与图象

A16. 下列函数中幂函数的是 ()

A. $y = 3x$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 3^x$ D. $y = x^2 + 1$

A17. 幂函数 $y = x^\alpha$ 过点 $(2, 8)$, 则 $\alpha =$ ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

A18. 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的幂函数是 ()

A. $y = x$ B. $y = x^2$ C. $y = x^{-1}$ D. $y = x^{\frac{1}{2}}$

A19. 比较大小: $1.5^{0.5}$ _____ $1.6^{0.5}$ (填 $>$ 或 $<$)。

M7. 下列说法正确的是 ()

A. $y = x^0$ 与 $y = 1$ 是同一函数 B. $y = 2^x$ 是幂函数

C. $y = x^2$ 是幂函数 D. 幂函数图象都过原点

C1. (幂函数建模) 天宫空间站太阳能帆板面积约 110 m^2 , 输出功率 $P = kd^{-2}$ (d 为日地距离倍数), 地球轨道 $d = 1$ 时输出 8 kW 。(1) 求 k ; (2) 火星轨道 $d = 1.52$ 处输出约多少 kW ?

3.4 函数的应用 (一)

考点精要

Q1 用函数解决实际问题的四步?

A 审题 $\rightarrow$ 建模 (写解析式 + 定义域) $\rightarrow$ 求解 $\rightarrow$ 检验。

Q2 分段函数建模最容易丢什么?

A 丢定义域的分段边界。

Q3 利润最大化一般用什么工具？

A 二次函数顶点/配方，注意对称轴在定义域内。

例题精讲

例题 3.9

(利润最值) 进价 40 元定价 60 元日销 100 件，每降价 1 元日增销 10 件，降价多少日利润最大？

例题 3.10

(分段应用) 快递首重 1 kg 内 8 元，续重每 1 kg 加 3 元 (不足 1 kg 按 1 kg)。 (1) 写函数； (2) 3.5 kg 邮费？

知识点 (1) 函数建模

A20. 用 24 m 篱笆围矩形菜园，面积最大时长应为 ()

A. 4 m B. 6 m C. 8 m D. 12 m

A21. 年利润 $y = -x^2 + 10x - 16$ ($0 \leq x \leq 8$)，最大利润为 ()

A. 9 万元 B. 16 万元 C. 25 万元 D. 34 万元

M8. 用 20 m 篱笆围矩形菜园，宽不小于 6 m，则 ()

A. $x = 5$ 时最大 25 B. $x = 6$ 时最大 24 C. 无最大值 D. $x = 7$ 时最大 21

C2. (分段建模) 共享充电宝：前 30 分钟免费，之后每 30 分钟 1.5 元 (不足 30 分钟按 30 分钟)，单日封顶 15 元。 (1) 写函数； (2) 借 1 小时 20 分钟付多少？

本章综合

S1. 已知 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ 。 (1) 若在 $(-\infty, 2]$ 上递减求 a 范围； (2) $[0, 2]$ 上最小值 $g(a)$ 表达式。

S2. 已知 $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2}$ 是 $(-1, 1)$ 上奇函数，且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$ 。 (1) 求 a, b ； (2) 证单调递增； (3) 解 $f(t-1) + f(t) < 0$ 。

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数与指数幂的运算

考点精要

Q1 什么叫 n 次方根? n 的奇偶如何决定根的情况?

A 若 $x^n = a$, 则 x 叫 a 的 n 次方根。 n 为奇数时唯一 (a 正得正、 a 负得负); n 为偶数时 $a > 0$ 有两个互为相反数的根, $a < 0$ 无实根。

Q2 分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 的定义是什么? 对底数有什么约定?

A $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$)。为规则统一, 约定底数 $a > 0$ 。

Q3 化简 $\sqrt[n]{a^n}$ 何时要加绝对值?

A n 为偶数时必须加绝对值: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; n 为奇数时 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 。

Q4 实数指数幂的运算性质有哪些?

A $a^r a^s = a^{r+s}$ 、 $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ 、 $(a^r)^s = a^{rs}$ 、 $(ab)^r = a^r b^r$ ($a, b > 0$)。

Q5 a^{-n} 与 a^0 的含义? $(-2)^2$ 与 -2^2 为什么不同?

A $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)。负号在括号内会被平方 ($(-2)^2 = 4$), 括号外只作用于幂的结果 ($-2^2 = -4$)。

例题精讲

例题 4.1

(根式与分数指数幂求值化简) 求下列各式的值: (1) $\sqrt[3]{-64}$; (2) $\sqrt[4]{81}$; (3) $16^{\frac{3}{4}}$; (4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; (5) $\sqrt{(-7)^2}$ 。

知识点 (1) 根式与分数指数幂

A1. 求值: $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt{(-5)^2}$ 。

A2. 化简 (字母均取正数): $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$; $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; $(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}})^6$ 。

M1. 逐一计算: $(-2)^2$ 、 -2^2 、 $(-2)^{-2}$ 、 2^{-2} , 并说明它们为什么不同。

知识点 (2) 实数指数幂的运算性质

A3. 求值: $8^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 。

A4. 已知 $10^x = 3$, $10^y = 4$, 求 10^{x-y} 与 10^{2x+y} 的值。

4.2 指数函数

考点精要

Q1 指数函数的定义是什么? 与幂函数怎么区分?

A $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 系数必须为 1。指数函数底数固定、指数变 (2^x); 幂函数指数固定、底数变 (x^2)。

Q2 指数函数图象过什么定点?

A 都过点 $(0, 1)$ (因为 $a^0 = 1$)。

Q3 指数函数的值域是什么?

A $(0, +\infty)$, x 轴 ($y = 0$) 是水平渐近线, 图象永远在 x 轴上方。

Q4 底数如何决定单调性?

A $a > 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增; $0 < a < 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减。

Q5 比较指数式大小有哪些方法?

A 同底用单调性 (底数大于 1 增、小于 1 减); 底数不同先找中间量 0 或 1 过渡。

例题精讲

例题 4.2

(指数函数概念辨析与比较大小) (1) 下列函数中, 哪些是指数函数? $y = 3^x$ 、 $y = x^3$ 、 $y = (-2)^x$ 、 $y = 2^{x+1}$ 。(2) 比较大小: $0.7^{0.8}$ 与 $0.7^{1.2}$; $1.5^{0.3}$ 与 $0.8^{0.3}$ 。

知识点 (1) 指数函数的概念与图象

A5. 已知指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象经过点 $(2, 4)$, 求 $f(x)$, 并求 $f(0)$ 、 $f(-1)$ 。

A6. 比较大小: $2^{0.3}$ 与 $2^{1.7}$; $0.5^{-0.3}$ 与 $0.5^{0.2}$; $1.2^{0.5}$ 与 $0.8^{0.5}$ 。

B1. (2022·全国甲卷·理) 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为 () 【文字化还原: 原题为图象选择题, 以下按图象特征改写四个选项】

- A. 图象关于原点对称, 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒为正
- B. 图象关于 y 轴对称, 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒为正
- C. 图象关于原点对称, 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒为负
- D. 图象关于 y 轴对称, 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上先负后正

M2. 下列说法正确的是 ()

- A. $y = 2^x$ 与 $y = x^2$ 都是指数函数
 B. $y = 2^x$ 与 $y = 3^x$ 的图象在 $x < 0$ 一侧, $y = 3^x$ 在上方
 C. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 1$) 与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称
 D. 幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象都经过原点

知识点 (2) 指数函数的单调性与值域

- A7. 求函数 $y = 2^x$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的值域。
 A8. 求函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的值域。
 A9. 解不等式 $2^{x-1} \leq 8$ 。

4.3 对数与对数运算

考点精要

Q1 对数的定义是什么? 真数有什么约束?

A $a^x = N \iff x = \log_a N$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$, 且真数 $N > 0$ ——负数和 0 没有对数。

Q2 常用对数与自然对数是什么?

A $\lg N = \log_{10} N$ (常用对数); $\ln N = \log_e N$ (自然对数, $e \approx 2.718$)。

Q3 对数运算的三大性质?

A 乘变加: $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$; 除变减: $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$; 幂变系数: $\log_a M^n = n \log_a M$ ($M, N > 0$)。

Q4 换底公式是什么?

A $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; 特别推论 $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ 。

Q5 对数恒等式有哪些?

A $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $a^{\log_a N} = N$; $\log_a a^x = x$ 。

例题精讲

例题 4.3

(指对互化与对数运算求值) (1) 把 $3^4 = 81$ 写成对数式; 把 $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ 写成指数式。(2) 求值: $\lg 25 + \lg 4$; $\log_5 75 - \log_5 3$; $\log_2 3 \cdot \log_3 4$ 。

知识点 (1) 对数的概念与指对互化

A10. 求值: $\log_3 81$; $\lg 0.001$; $\ln e^2$; $5^{\log_5 3}$ 。

知识点 (2) 对数运算性质与换底公式

A11. 已知 $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$, 用 a 、 b 表示 $\log_2 15$ 与 $\log_2 \frac{3}{5}$ 。

A12. 求值: $\log_2 6 - \log_2 3$; $\lg 5 + \lg 20$; $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$ 。

B2. (2022 · 浙江卷) 已知 $2^a = 5$, $\log_8 3 = b$, 则 4^{a-3b} 等于 ()

A. 25 B. 5 C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

M3. 下列说法正确的是 ()

A. $\log_2(3+5) = \log_2 3 + \log_2 5$

B. $\frac{\log_2 8}{\log_2 2} = \log_2 \frac{8}{2}$

C. $\log_2 4^3 = (\log_2 4)^3$

D. $\log_2 8 + \log_2 2 = \log_2 16$

4.4 对数函数

考点精要

Q1 对数函数的定义域是什么?

A $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域是 $(0, +\infty)$, 不是 $\mathbb{R}$ ——真数必须大于 0。

Q2 对数函数与指数函数有什么关系?

A 互为反函数, 图象关于直线 $y = x$ 对称; 定义域与值域互换。

Q3 底数如何决定对数函数的单调性?

A $a > 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $0 < a < 1$ 单调递减。

Q4 解对数不等式要注意什么?

A 先把两边化成同底对数, 再用单调性“去掉 $\log$ ”; 底数小于 1 时不等号要反向, 同时必须保证真数大于 0。

Q5 求对数型复合函数单调区间, 第一件事是什么?

A 先求定义域 (内层真数大于 0), 再用“同增异减”逐层判断, 定义域外的区间绝不能写进答案。

例题精讲

例题 4.4

(对数函数定义域与比较大小) (1) 求函数 $f(x) = \log_3(2x-1)$ 的定义域。(2) 比较大小: $\log_2 1.5$ 与 $\log_2 2.5$; $\log_{0.5} 2$ 与 $\log_{0.5} 3$ 。

知识点 (1) 对数函数的概念与求值

A13. 求函数 $f(x) = \log_2(4-x) + \lg(x+1)$ 的定义域。

B3. (2023 · 北京卷) 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

知识点 (2) 对数函数的单调性 (比较大小与解不等式)

A14. 解不等式 $\log_{0.5}(x-1) > -2$ 。

A15. 比较大小: $\log_2 1.5$ 与 $\log_2 2.5$; $\log_{0.5} 2$ 与 $\log_{0.5} 3$ 。

B4. (2022 · 新高考 I 卷) 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

知识点 (3) 对数型复合函数与情境应用

A16. 求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3)$ 的定义域, 并求它的单调递增区间。

B5. (2023 · 新高考 I 卷) (多选) 噪声污染问题越来越受到重视。用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 p_0 ($p_0 > 0$) 是听觉下限阈值, p 是实际声压。下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60 90
混合动力汽车	10	50 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1 、 p_2 、 p_3 , 则 ()

A. $p_1 \geq p_2$ B. $p_2 > 10p_3$ C. $p_3 = 100p_0$ D. $p_1 \leq 100p_2$

B6. (2023 · 新课标 II 卷) 若函数 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

M4. 解方程 $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$ 。有同学解得 $x = 1$ 或 $x = -2$, 两个都写进答案。判断正误, 并给出正确解答。

4.5 函数的应用 (二): 零点、二分法与增长模型

考点精要

Q1 什么叫函数的零点?

A 使 $f(x) = 0$ 的实数 x 。零点是“数”, 不是“点”; 它与方程 $f(x) = 0$ 的实根、图象与 x 轴交点的横坐标是同一件事。

Q2 零点存在性定理是什么?

A $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上图象连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点 (只能保证存在, 不保证唯一)。

Q3 二分法求零点有什么前提? 每步怎么缩小区间?

A 前提是 $f(a) \cdot f(b) < 0$; 取中点 m , 算 $f(m)$, 若 $f(a)f(m) < 0$ 零点在 (a, m) , 否则在 (m, b) 。每二分一次, 误差约减半。

Q4 半衰期模型的形式?

A $y = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, 其中 T 为半衰期, y_0 为初始量。

Q5 复利模型的形式?

A $A = P(1+r)^n$, 本金 P 、年利率 r 、按年复利 n 年后本息和 A 。

例题精讲

例题 4.5

(二分法求近似解) 用二分法求方程 $x^3 - 2 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内的近似解 (精确到 0.25, 做 3 次)。

知识点 (1) 函数的零点与二分法

A17. 用零点存在性定理判断: 函数 $g(x) = \lg x + x - 3$ 在区间 $(2, 3)$ 内是否有零点。

A18. 函数 $f(x) = 2^x - 3$ 的零点所在的一个区间是 ()

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

知识点 (2) 指数对数增长模型

A19. 某种细胞每 30 分钟由 1 个分裂成 2 个, 经过 3 小时后, 1 个细胞能分裂成多少个?

A20. 某放射性物质按半衰期规律衰减, 半衰期为 2 天。初始量为 100 mg, 则 6 天后剩余多少 mg?

C1. (复利与人口增长) 某城市常住人口今年为 500 万, 若年增长率保持为 1.2%。(1) 写出人口 y (万) 与年份 t 的函数关系; (2) 已知 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 1.012 \approx 0.00518$, 估计该城市人口翻一番大约需要多少年。

C2. (半衰期与药物代谢) 某药物在人体内的含量按半衰期规律衰减, 已知其半衰期为 6 小时, 初始剂量为 400 mg。(1) 写出 t 小时后体内含量 y (mg) 的函数关系; (2) 求 6 小时、12 小时后体内的含量; (3) 大约多少小时后含量降到 50 mg?

本章综合

S1. 已知 $\log_a 2 = m$, $\log_a 3 = n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)。(1) 用 m 、 n 表示 $\log_a 12$ 与 $\log_a \frac{2}{3}$; (2) 求 a^{2m+n} 的值。

S2. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 与 $g(x) = \log_a x$ 。(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 4, 求 a ; (2) 解关于 x 的不等式 $g(x) \leq 2$ 。

第五章 三角函数

5.1 任意角与弧度制

考点精要

Q1 任意角的正负如何规定？

A 逆时针旋转形成的角为正角，顺时针旋转形成的角为负角；角是旋转量，可以任意大（转多圈）。

Q2 与角 α 终边相同的角如何表示？

A $\beta = \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ——同终边不同角，是周期性的源头。

Q3 判断一个角在第几象限的方法？

A 先“取模”：把角写成 $\alpha + 2k\pi$ （或 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ）化到 $[0, 2\pi)$ ，再看终边所在象限。

Q4 1 弧度的定义与角度弧度的互化？

A 长度等于半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度。 $180^\circ = \pi$ ； $n^\circ = \frac{n\pi}{180} \text{ rad}$ ， $n \text{ rad} = \frac{180n}{\pi} \text{ 度}$ 。

Q5 弧长与扇形面积公式（弧度制）？

A $l = |\alpha|r$ ； $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$ ——弧度制让公式不再带 $\frac{\pi}{180}$ 。

例题精讲

例题 5.1

（角度弧度互化与弧长扇形）（1）把 135° 化成弧度；把 $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ 化成角度。（2）已知半径 $r = 4$ ，圆心角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，求该圆心角所对的弧长与扇形面积。

知识点 (1) 任意角与弧度制

A1. 把 225° 化成弧度；把 $\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$ 化成角度。

A2. 时钟的分针长 10 cm，从 12 点走到 12 点 20 分，分针尖端扫过的弧长是多少？

A3. 已知扇形的半径为 2，圆心角为 120° ，求该扇形的弧长与面积。

知识点 (2) 弧长与扇形面积（文化情境）

B1.（2022·全国甲卷·理）沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计

算圆弧长度的“会圆术”。如图， $\widehat{AB}$ 是以 O 为圆心、 OA 为半径的圆弧， C 是弦 AB 的中点， D 在 $\widehat{AB}$ 上， $CD \perp AB$ 。“会圆术”给出 $\widehat{AB}$ 的弧长的近似值 s 的计算公式： $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$ 。当 $OA = 2$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ 时， $s = ()$ 【文字化还原： C 为弦 AB 的中点， $CD \perp AB$ ，且 O 、 C 、 D 三点共线 (D 在 $\widehat{AB}$ 上)】

- A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

5.2 三角函数的概念与同角关系

考点精要

Q1 任意角三角函数的单位圆定义？

A 角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，则 $\sin \alpha = y$ 、 $\cos \alpha = x$ 、 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)。

Q2 终边经过一般点 $P(x, y)$ 时怎么求三角函数值？

A 先算 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。

Q3 三角函数值在各象限的符号规律？

A 口诀“一全正、二正弦、三正切、四余弦”——正弦在一二象限正，余弦在一四象限正，正切在一三象限正。

Q4 同角三角函数的两个基本关系？

A $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ； $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)。

Q5 由 $\sin \alpha$ 求 $\cos \alpha$ 时最容易漏什么？

A 开方后的符号——必须按角所在象限取正或负；不给定象限时要写 $\cos \alpha = \pm \dots$ 。

例题精讲

例题 5.2

(终边过点求值与同角关系求值) (1) 已知角 α 的终边经过点 $P(3, -4)$ ，求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。(2) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，且 α 是第二象限角，求 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 。

知识点 (1) 任意角三角函数的定义

A4. 已知角 β 的终边经过点 $P(-5, 12)$ ，求 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 、 $\tan \beta$ 。

A5. 求值： $\sin \frac{3\pi}{4}$ 、 $\cos \frac{5\pi}{3}$ 、 $\tan \frac{5\pi}{4}$ 。

知识点 (2) 同角三角函数的基本关系

A6. 已知 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ，且 α 是第二象限角，求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 。

M1. (1) $\sin 30$ 与 $\sin 30^\circ$ 相等吗？说明理由。(2) 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，且 α 是第三象限角。有同学直接写出 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ，对吗？

5.3 诱导公式

考点精要

Q1 诱导公式的记忆口诀是什么？

A “奇变偶不变，符号看象限”—— $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍函数名变 ($\sin \leftrightarrow \cos$)，偶数倍不变名；符号把 α 一律“当作锐角”，看原函数在目标象限的符号。

Q2 用诱导公式求任意角三角函数值的步骤？

A 先用公式一去整圈（化到 $0 \sim 2\pi$ ），再把 $\pi \pm \alpha$ 、 $-\alpha$ 型化为锐角 α ，最后处理 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 型（变名）。

Q3 诱导公式的本质是什么？

A 单位圆上的对称性—— $-\alpha$ 关于 x 轴对称、 $\pi - \alpha$ 关于 y 轴对称、 $\pi + \alpha$ 关于原点对称，函数值按对称后的坐标变号或不变。

例题精讲

例题 5.3

（用诱导公式求值）求下列各式的值：(1) $\sin 210^\circ$ ；(2) $\cos 120^\circ$ ；(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ；(4) $\sin \frac{7\pi}{6}$ 。

知识点 (1) 诱导公式与求值化简

A7. 求值： $\sin 300^\circ$ 、 $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ 、 $\tan \frac{4\pi}{3}$ 。

A8. 化简： $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\tan(\pi + \alpha)}$ 。

A9. 求值： $\sin(-930^\circ)$ 。

M2. 求 $\cos(\pi + \alpha)$ ，其中 α 是第二象限角。有同学的过程如下：“ $\pi = 2 \times \frac{\pi}{2}$ 是偶数倍，不变名； $\pi + \alpha$ 在第三象限，第三象限余弦为负，所以 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 不对，应该是 $\cos(\pi + \alpha) = \cos \alpha$ 。”判断这位同学的结论是否正确，并写出正确结果。

5.4 三角函数的图象与性质

考点精要

Q1 五点法作 $y = \sin x$ 的图象，五个关键点是什么？

A $(0, 0)$ 、 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 、 $(\pi, 0)$ 、 $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ 、 $(2\pi, 0)$ 。

Q2 周期公式？

A $y = \sin(\omega x)$ 、 $y = \cos(\omega x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ； $y = \tan(\omega x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$ 。

Q3 正弦函数的主要性质?

A 值域 $[-1, 1]$ 、奇函数、单调递增区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 。

Q4 求 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间有什么通用方法?

A 令 $t = \omega x + \varphi$, 先写 $\sin t$ 的单调区间 (关于 t 的不等式), 再反解出 x ; 若 $\omega < 0$ 还要变不等号方向。

Q5 已知 $\sin x = a$ 求角, 为什么不能只写一个解?

A 在 $[0, 2\pi]$ 内 $\sin x = \frac{1}{2}$ 有两个解; 在 $\mathbb{R}$ 上的通解要写成 $\theta + 2k\pi$ 两个解集并起来。

例题精讲

例题 5.4

(周期、值域与单调区间) 已知函数 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 。(1) 求最小正周期与值域; (2) 求它在区间 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间。

知识点 (1) 周期、值域与单调性

A10. 求函数 $y = \sin 3x$ 与 $y = \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期。

A11. 求函数 $y = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调递增区间。

A12. 求函数 $y = 1 - 2 \sin x$ 的最大值与最小值, 并写出取最大值时 x 的取值集合。

A13. 求函数 $y = 3 \cos 2x$ 的最大值、最小值与最小正周期。

B2. (2022 · 新高考 I 卷) 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T 。若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\quad)$

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

B3. (2022 · 全国乙卷 · 理) 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T 。若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为_____。

M3. 下列说法正确的是 ()

A. 函数 $y = \sin 2x$ 的最小正周期是 4π

B. 函数 $y = \tan 2x$ 的最小正周期是 2π

C. 函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

D. 函数 $y = \cos 2x$ 的最小正周期是 π

知识点 (2) 零点与极值点的个数 (新高考趋势)

A14. 求函数 $y = \sin 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的零点个数。

B4. (2023 · 新课标 I 卷) 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____。

B5. (2022 · 全国甲卷 · 理) 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$ C. $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right]$

B6. (2024 · 新课标 II 卷) (多选) 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列说法中正确的有 ()

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点
 B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值
 C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
 D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

5.5 三角恒等变换

考点精要

Q1 两角和与差公式?

A $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ 。

Q2 二倍角公式?

A $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ 。

Q3 辅助角公式?

A $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ——幅度系数 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 绝不能丢。

Q4 已知 $\sin \alpha$ 、 $\cos \beta$ 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的步骤?

A 先按各自象限求出 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ (注意符号), 再代入和角公式。

Q5 降幂公式?

A $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ 。

例题精讲

例题 5.5

(两角和公式与辅助角公式) (1) 求 $\sin 75^\circ$ 的值。(2) 把 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 化成 $y = A \sin(x + \varphi)$ 的形式, 并求它的最大值。

知识点 (1) 两角和与差、二倍角公式

A15. 化简: $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 计算 $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$ 。

A16. 已知 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, 且 α 为第一象限角, 求 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 。

A17. 化简: $\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha$ 。

B7. (2023 · 新课标 I 卷) 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = ()$

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

知识点 (2) 辅助角公式

A18. 把 $y = \sin x + \cos x$ 化成 $y = A \sin(x + \varphi)$ 的形式, 并求它的最大值与最小值。

M4. 下列说法正确的是 ()

- A. $\sin x + \cos x$ 的最大值为 2
 B. 函数 $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ 的最大值为 7
 C. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$
 D. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

考点精要

Q1 参数 A 、 ω 、 φ 各表示什么?

A A 是振幅 (纵向伸缩); ω 决定周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (横向压缩); φ 是初相; $+b$ 是上下平移 (中线 $y = b$)。

Q2 由图象求解析式时 A 、 b 、 ω 怎么定?

A $A = \frac{\text{最大值} - \text{最小值}}{2}$, $b = \frac{\text{最大值} + \text{最小值}}{2}$, ω 由周期 T 反解, φ 代入一个已知点求出。

Q3 图象变换“左加右减”作用在谁身上?

A 作用在 x 上—— $y = \sin(2x + \varphi)$ 相对 $y = \sin 2x$ 的平移量是 $\frac{\varphi}{2}$ (φ 要除以 ω); 先平移后伸缩与先伸缩后平移, 平移量不同。

例题精讲

例题 5.6

(读参数与图象变换) 已知函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。(1) 求振幅、最小正周期、初相; (2) 说明从 $y = \sin x$ 的图象出发, 经过怎样的变换可以得到它的图象 (写出一种路径)。

知识点 (1) 参数 A 、 ω 、 φ 的意义

A19. 求函数 $y = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的振幅、最小正周期与初相。

知识点 (2) 图象变换

A20. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 求所得图象对应的函数解析式。

5.7 三角函数的应用

考点精要

Q1 用三角函数模型 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 建模的四个步骤？

A 读数据（最大值 M 、最小值 m 、周期 T ） $\rightarrow$ 定参数 $(A = \frac{M-m}{2}, b = \frac{M+m}{2}, \omega = \frac{2\pi}{T})$
 $\rightarrow$ 代已知点定 $\varphi \rightarrow$ 写模型并标注实际定义域。

Q2 从最低点出发的摩天轮高度模型常见形式？

A $h(t) = b - A \cos(\omega t)$ ——最低点高度是 $b - A$ ，最高点是 $b + A$ ；余弦形式比 “ $\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ ” 更直接。

例题精讲

例题 5.7

（摩天轮模型）某摩天轮的直径为 90 米，轮心离地面 50 米，轿厢从最低点出发，每 10 分钟转一圈。设时间为 t （分钟），轿厢离地高度为 $h(t)$ 。（1）求 $h(t)$ 的函数解析式；（2）求轿厢离地高度的最大值与最小值。

知识点 (1) 三角函数模型的实际应用

A21. 某弹簧振子做简谐运动，位移 x （厘米）与时间 t （秒）的关系为 $x = 8 \sin \frac{\pi}{4} t$ 。求振幅、最小正周期与 $t = 2$ 秒时的位移。

C1.（摩天轮进港式建模）某摩天轮半径为 30 米，轮心离地面 35 米，轿厢从最低点出发，每 8 分钟转一圈。（1）写出轿厢离地高度 $h(t)$ （米）关于时间 t （分钟）的函数解析式；（2）求 $t = 2$ 分钟时轿厢离地的高度；（3）轿厢第一次到达离地 50 米时，经过了多长时间。

C2.（弹簧振子与简谐运动）某弹簧振子做简谐运动，位移 x （厘米）与时间 t （秒）的关系为 $x = 6 \sin(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{6})$ 。（1）求振幅、周期与频率；（2）求 $t = 0$ 与 $t = 1$ 秒时的位移。

本章综合

S1. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 。（1）把 $f(x)$ 化成 $A \sin(x + \varphi)$ 的形式，并求振幅与最小正周期；（2）求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值。

S2. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 。（1）求 ω 的值；（2）求 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间。

第六章 数列

6.1 数列的概念、递推公式与前 n 项和

考点精要

Q1 什么是数列？它和集合有什么区别？

A 按确定顺序排成的一列数叫数列，顺序是它的命—— $(1, 3, 5)$ 与 $(3, 1, 5)$ 是两个不同数列，但 $\{1, 3, 5\}$ 与 $\{3, 1, 5\}$ 是同一个集合。数列还允许重复项。

Q2 什么是通项公式？什么是递推公式？

A 通项公式 $a_n = f(n)$ 用“第几项”直接算出“这一项是多少”；递推公式用“初始项 + 前项到后项的规则”（如 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ）逐项生长。斐波那契数列只有递推公式，一样能长出整列数。

Q3 数列可以看作函数吗？

A 可以。 $\{a_n\}$ 是定义域为正整数集的函数， $a_n = f(n)$ ，图象是一串孤立的点。

Q4 由前 n 项和 S_n 求通项 a_n ，最关键的步骤是什么？

A 分段： $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 。 $n = 1$ 必须单独验证——因为 S_0 没有定义，直接套 $S_n - S_{n-1}$ 是错的。验证后若 $n = 1$ 也满足公式，才能合并成一段。

Q5 由前几项写通项公式，一般先观察什么？

A 先看相邻两项之差是否恒定（等差）、相邻两项之比是否恒定（等比），再看项与序号 n 的关系（ n 、 $2n-1$ 、 n^2 、 $\frac{1}{n}$ 、 $(-1)^n$ 是常见模板），写出来再用前几项代回去验证。

例题精讲

例题 6.1

（由前几项写通项公式）写出下列数列的一个通项公式：(1) 1, 4, 9, 16, 25; (2) 1, 3, 5, 7, 9; (3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 。

例题 6.2

（由 S_n 求 a_n ）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n$ ，求 a_n 。

例题 6.3

(递推公式写前几项并猜通项) 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \geq 1$)。写出前 4 项, 并猜测通项公式。

知识点 (1) 数列的概念与通项公式

A1. 数列 2, 5, 10, 17, 26, ... 的一个通项公式是 ()

A. $a_n = n^2 + 1$ B. $a_n = 2n + 1$ C. $a_n = n^2 + n$ D. $a_n = n^2$

A2. 已知 $a_n = 3n - 1$, 则 $a_1 + a_2 + a_{10}$ 等于 ()

A. 32 B. 34 C. 36 D. 38

A3. 数列 1, 3, 6, 10, 15, ... 的一个通项公式是 ()

A. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ B. $a_n = n^2$ C. $a_n = 2n - 1$ D. $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$

A4. 数列 1, -1, 1, -1, ... 的一个通项公式是 ()

A. $a_n = (-1)^{n-1}$ B. $a_n = (-1)^n$ C. $a_n = (-1)^{n+2}$ D. $a_n = (-1)^{n-2}$

知识点 (2) 由前 n 项和求通项

A5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n^2 + n$, 则 a_n 等于 ()

A. $4n - 1$ B. $4n + 1$ C. $4n - 3$ D. $2n + 1$

M1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n + 2$ 。小明这样求通项:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 2) - [(n-1)^2 + (n-1) + 2] = 2n$$

于是直接写 “ $a_n = 2n$ ”。他的做法错在哪里? 请写出正确的 a_n 。

知识点 (3) 递推公式与情境应用

B1. (2022 · 全国乙卷理 · T4) 嫦娥二号卫星在完成探月任务后, 继续进行深空探测, 成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星。为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值, 用到数列 $\{b_n\}$:

$$b_1 = 1 + \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad b_3 = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \dots$$

依此类推, 其中 $a_k \in \mathbb{N}^*$ ($k = 1, 2, \dots$)。则 ()

A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$

C1. 斐波那契数列 $F_1 = F_2 = 1$, 且 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$)。(1) 写出 F_3, F_4, F_5, F_6, F_7 ; (2) 计算 $F_1 + F_2 + F_3, F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, 与 $F_5 - 1, F_6 - 1$ 比较, 你能提出什么猜想? (3) 用数学归纳法证明你提出的猜想。

6.2 等差数列

考点精要

Q1 等差数列的定义和通项公式是什么？

A 从第 2 项起每项与前一項的差为同一常数 d (公差), 即 $a_n - a_{n-1} = d$ 。通项 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ——从首項走到第 n 項要跨 $n-1$ 步, 所以是 $(n-1)d$ 而不是 nd 。

Q2 什么是等差中項? 有什么用?

A 若 a, A, b 成等差, 则 $A = \frac{a+b}{2}$ 。反过来 $A = \frac{a+b}{2}$ 也推出成等差。“设三个数成等差”常用对称设元 $a-d, a, a+d$, 和已知时先解中间項, 能大幅简化运算。

Q3 前 n 項和公式有哪两种形式?

A $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ (已知首末項, 倒序相加推导) 与 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ (已知首項公差)。

Q4 公差为负时, 前 n 項和 S_n 什么时候最大?

A S_n 是开口向下的二次函数, 最大值在“最后一个非负項”处取到——解 $a_n \geq 0$ 找到最后一个非负項的下标 n , S_n 就在那最大。注意不是“第一个负項”处。

例题精讲

例题 6.4

(等差数列通項) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 9$, $a_7 = 21$, 求通項公式 a_n 与 a_{20} 。

例题 6.5

(等差数列前 n 項和) 求 $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ 的值。

知识点 (1) 通項公式与基本量

A6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 14$, $a_9 = 34$, 则公差 d 与 a_{15} 分别为 ()

A. $d = 4$, $a_{15} = 58$ B. $d = 4$, $a_{15} = 54$ C. $d = 3$, $a_{15} = 55$ D. $d = 5$, $a_{15} = 59$

A7. 求 $5 + 10 + 15 + \cdots + 200$ 的值, 结果为 ()

A. 4000 B. 4050 C. 4100 D. 4150

A8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_6 = 12$, $a_3 + a_8 = 20$, 则公差 d 等于 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

A9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_6 = 21$, 则 a_4 等于 ()

A. 10 B. 13 C. 16 D. 26

知识点 (2) 等差中項与下标和性质

A10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_7 = 10$, 则 a_5 等于 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

M2. 三个数成等差数列, 它们的和为 15, 平方和为 83。求这三个数。小刚硬设三个数为 a, b, c , 列了三个方程却绕不出来。请用对称设元法 (设 $a-d, a, a+d$) 求解, 并说明对称设元的好处。

知识点 (3) 前 n 项和与充要条件

A11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 20$, $d = -3$, 则 S_n 取最大值时 n 等于 ()

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

B2. (2023 · 新课标 I 卷) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列。则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

B3. (2024 · 新课标 II 卷) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $a_3 + a_4 = 7$, $3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} =$ _____。

M3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 29 - 3n$ 。(1) 判断“最后一个不小于 0 的项”是哪一项; (2) 求前 n 项和 S_n 的最大值。小红认为“ S_n 最大应该在第一个负数项那里”, 对吗?

6.3 等比数列与求和工具

考点精要

Q1 等比数列的定义和通项公式是什么?

A 从第 2 项起每项与前一項的比为同一非零常数 q (公比)。通项 $a_n = a_1 q^{n-1}$ ——从首项到第 n 项乘了 $n-1$ 次 q 。用“代 $n=1$ 应得首项”自检次数: $a_n = a_1 q^n$ 是错的。

Q2 什么是等比中项? 注意什么?

A a, G, b 成等比 $\Leftrightarrow G^2 = ab$ (需 $ab > 0$), 此时 $G = \pm\sqrt{ab}$ 有两解。等差数列先入为主会让你忘了 $\pm$; 若 $ab < 0$, 三个数不可能成等比 (等比数列各项同号)。

Q3 等比数列前 n 项和公式要注意什么?

A 必须分 $q=1$ 与 $q \neq 1$ 两种情形: $S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$ 。 $q=1$ 时分母为零, 直接套公式是错的。

Q4 裂项相消最容易漏什么?

A 漏配系数。 $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$ ——先验算 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{k}{n(n+k)}$, 再补上 $\frac{1}{k}$ 。

Q5 错位相减的操作要点是什么?

A 适用于“等差 $\times$ 等比”型: 写出 S_n , 乘公比 q 写 qS_n 并错位对齐, 相减后中间全部抵消, 首项与末项各剩一个, 化为等比求和。写完后用 $n=1$ 或 $n=2$ 代入验证。

例题精讲

例题 6.6

(等比数列通项) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 6$, $a_5 = 48$, 求通项公式 a_n 。

例题 6.7

(等比数列前 n 项和, 注意 $q = 1$) 求 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10}$ 的值。

例题 6.8

(错位相减求和) 求 $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ 。

知识点 (1) 等比数列的通项与等比中项

A12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 12$, $a_5 = 48$, 则公比 q 等于 ()

A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\pm\sqrt{2}$

A13. 求 2 与 18 的等比中项, 结果为 ()

A. 6 B. -6 C. ± 6 D. ± 3

A14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $q = 2$, 则 a_6 等于 ()

A. 48 B. 96 C. 32 D. 64

M4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, $a_4 = 16$ 。(1) 求 a_3 。小明算出 $a_3^2 = a_2 a_4 = 64$, 直接写 $a_3 = 8$, 对吗? (2) 若条件改为 $a_2 = 4$, $a_4 = -8$, 这样的等比数列存在吗? 为什么?

知识点 (2) 等比数列的前 n 项和

A15. 求 $3 + 6 + 12 + \cdots + 96$ 的值, 结果为 ()

A. 180 B. 186 C. 189 D. 192

A16. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $q = 3$, 则 S_4 等于 ()

A. 40 B. 81 C. 120 D. 121

A17. 求 $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$ 的和为 ()

A. $2^{n+1} - 2$ B. $2^n - 1$ C. 2^{n+1} D. $2^n - 2$

M5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $q = 1$, 求 S_6 。有同学直接套公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 发现分母为 0 算不下去。问题出在哪里? $q = 1$ 时前 n 项和应该怎么写?

B4. (2022 · 全国乙卷理 · T8) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2 - a_5 = 42$, 则 $a_6 =$ ()

A. 14 B. 12 C. 6 D. 3

B5. (2023 · 新课标 II 卷) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5$, $S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$ ()

A. 120 B. 85 C. -85 D. -120

知识点 (3) 裂项相消与错位相减

A18. 数列 $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 的前 n 项和为 ()

A. $\frac{n}{n+1}$ B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{n}{2n+1}$ D. $\frac{n-1}{n}$

M6. 求数列 $\left\{\frac{1}{n(n+2)}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 。(1) 先验证恒等式 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$; (2) 写出 $\frac{1}{n(n+2)}$ 的裂项形式 (注意配系数), 再求 S_n , 并用 $n=1$ 代入验证。

M7. 求 $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ 。(1) 写出 $2S_n$ 的表达式, 并与 S_n 错位对齐; (2) 两式相减, 指出“哪些项抵消、首项和末项各剩几个”; (3) 求出 S_n , 并用 $n=2$ 代入验证。

B6. (2023 · 全国甲卷 · 理) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2S_n = na_n$ 。(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

C2. 张先生计划每年年初存入银行 10000 元 (共存 5 年), 年利率 3%, 按复利计息。问第 5 年年底时, 他账户里的本息和约为多少元? (提示: 第 k 年年初存入的钱, 到第 5 年年底经历 $(5-k+1)$ 次计息, 把 5 笔钱的终值用等比数列求和。结果保留整数。)

6.4 数学归纳法

考点精要

Q1 数学归纳法证明“与正整数 n 有关的命题”要做哪两件事?

A (1) 奠基: 验证起点 $n = n_0$ 时命题成立; (2) 递推: 假设 $n = k$ ($k \geq n_0$) 时成立, 证明 $n = k+1$ 时也成立。两步缺一不可——只有奠基只能验证一个特殊值, 只有递推则“第一块骨牌”根本没倒。

Q2 奠基的起点一定是 $n = 1$ 吗?

A 不一定。要看命题从几开始有意义。如 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$ 必须从 $n = 2$ 奠基, 因为 $n = 1$ 时 $n-1 = 0$ 无意义。

Q3 递推步最容易犯什么错?

A 跳步: 假设 $n = k$ 成立后, “另起炉灶”直接证 $n = k+1$, 没用上归纳假设。递推步必须从假设出发 (把 k 的结果代入 $k+1$ 的形式), 这样归纳假设才真正被用上。

Q4 用归纳法证明递推数列的通项时, a_{k+1} 怎么得到?

A 必须由递推关系 $a_{k+1} = f(a_k)$ 结合归纳假设 $a_k = \cdots$ 代进去算出来, 而不是直接代通项公式。

例题精讲

例题 6.9

(归纳法证明求和公式) 用数学归纳法证明: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

例题 6.10

(归纳法证明整除性) 用数学归纳法证明: $n^3 + 5n$ 能被 6 整除 ($n \in \mathbb{N}^*$)。

知识点 (1) 数学归纳法的原理与基本应用

A19. 用数学归纳法证明: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

A20. 用数学归纳法证明: $n^3 - n$ 能被 3 整除 ($n \in \mathbb{N}^*$)。

知识点 (2) 数学归纳法与不等式

M8. 用数学归纳法证明: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ ($n \geq 2$)。小丽在递推步直接写“由归纳假设, $n = k + 1$ 时显然成立”, 结果被判错。请完成正确的证明, 并指出小丽错在哪里。

本章综合

S1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$, 公比 $q > 0$, 且 $a_3 + a_5 = 40$ 。(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求 $\{b_n\}$ 的前 10 项和。

S2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - 1$ 。(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 (注意 $n = 1$ 的验证); (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

S3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。(1) 求 a_2, a_3, a_4 ; (2) 猜测通项公式, 并用数学归纳法证明; (3) 另法: 说明 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 由此直接写出通项公式。

第七章 一元函数的导数及其应用

7.1 导数的概念及其几何意义

考点精要

Q1 什么是函数在区间上的平均变化率？

A 自变量从 x_1 变到 x_2 时， $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 。几何上是割线 P_1P_2 的斜率，物理上是平均速度——它只在乎起点和终点，不在乎中间怎么走。

Q2 什么是瞬时变化率？它和平均变化率是什么关系？

A 当 h 无限趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 所趋近的确切值，就是 $x = x_0$ 处的瞬时变化率（位移函数时即瞬时速度）。**瞬时 = 平均的极限**，二者一般不相等。

Q3 导数的定义是什么？求导极限式怎么算？

A $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 。计算时先化简分式（因式分解/有理化消去分子里的 h ），**保留 $\lim$ 直到最后一步**，再代 $h = 0$ 。 h 趋于 0 但不等于 0，所以“先消后代”。

Q4 导数的几何意义是什么？切线方程怎么写？

A $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率，切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 。

Q5 切线题里“过点”和“在点”有什么区别？

A “在点 $(x_0, f(x_0))$ 处”——该点就是切点，直接求 $f'(x_0)$ ；“过点 $P(a, b)$ ”—— P 可能在也可能不在曲线上，若不在，必须设切点 $(t, f(t))$ ，由“斜率 = 导数值”且“切点、 P 都在切线上”列方程解 t ，可能有多条切线。

例题精讲

例题 7.1

（平均变化率与瞬时变化率）物体位移 $s(t) = 2t^2$ （单位：m， t 单位：s）。(1) 求 t 从 2 到 3 的平均速度；(2) 用定义求 $t = 2$ 时的瞬时速度。

例题 7.2

（求切线方程）求曲线 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线方程。

知识点 (1) 平均变化率与瞬时变化率

A1. 函数 $f(x) = 3x^2$ 在 x 从 1 变到 3 时的平均变化率是 ()

A. 6 B. 10 C. 12 D. 14

A2. 物体位移 $s(t) = t^2 + 2t$ (单位: m), 则 $t = 3$ s 时的瞬时速度为 ()

A. 6 m/s B. 8 m/s C. 10 m/s D. 11 m/s

A3. 函数 $f(x) = x^2$ 在 x 从 1 变到 2 时的平均变化率是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

M1. 物体沿直线运动, 位移 $s(t) = t^3$ (单位: m)。(1) 求 t 从 1 到 3 的平均速度; (2) 用定义求 $t = 2$ 时的瞬时速度; (3) 小明说“既然 (1)(2) 都在算速度, 答案应该一样”。通过你的计算说明这个想法错在哪里。

C1. 高铁列车出站后沿直线运动, 位移 $s(t) = 2t^2 + 6t$ (单位: m, t 单位: s, $t \geq 0$)。(1) 求 t 从 2 到 4 的平均速度; (2) 求 $t = 3$ s 时的瞬时速度; (3) 加速度是速度对时间的导数 (即 $s''(t)$)。求该列车加速度的表达式, 并判断它是否恒定。

知识点 (2) 导数的几何意义与切线

A4. 曲线 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线方程为 ()

A. $y = 4x - 4$ B. $y = 2x$ C. $y = 4x$ D. $y = 2x + 2$

M2. 过点 $P(2, 0)$ 作曲线 $y = x^3$ 的切线, 求切线方程。小华把 P 直接当切点: $f'(2) = 12$, 于是切线为 $y = 12(x - 2)$ 。他错在哪里? 请正确求解。

B1. (2025 · 新课标 I 卷) 若直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = e^x + a$ 的切线, 则 $a =$ _____。

B2. (2024 · 全国甲卷) 设函数 $f(x) = e^x + 2\sin x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 ()

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7.2 导数的运算

考点精要

Q1 基本初等函数的导数公式有哪些必须背熟?

A 常数: $(c)' = 0$; 幂函数: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $\sin x \rightarrow \cos x$, $\cos x \rightarrow -\sin x$; e^x 导数还是 e^x ; $\ln x$ 导数是 $\frac{1}{x}$ 。

Q2 四则运算法则容易错在哪?

A 积的导数不是导数的积! $(uv)' = u'v + uv'$ (“左导右不导 + 左不导右导”)。商的导数 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, 分子的“减号”和顺序别记反。

Q3 复合函数链式法则怎么用?

A 先拆（识别内层 $g(x)$ 与外层 f ），再算 $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ——外层求导、内层不动、再乘内层导数。每次求完问自己一句“内层要不要再乘一层”。

例题精讲

例题 7.3

（求导运算）求下列函数的导数：（1） $f(x) = x^3 - 2x + 5$ ；（2） $f(x) = x^2 e^x$ ；（3） $y = (2x + 1)^3$ 。

知识点 (1) 导数的四则运算法则

A5. 函数 $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 5$ 的导数为（ ）

A. $4x^3 + 6x - 2$ B. $4x^3 + 3x - 2$ C. $4x^3 + 6x^2 - 2$ D. $x^4 + 6x - 2$

A6. 函数 $f(x) = x \ln x$ 的导数为（ ）

A. 1 B. $\ln x$ C. $\ln x + 1$ D. $x \ln x + 1$

A7. 函数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 的导数为（ ）

A. $\frac{1}{(x+1)^2}$ B. $\frac{2}{(x+1)^2}$ C. $\frac{x}{(x+1)^2}$ D. $\frac{1}{x+1}$

A8. 函数 $f(x) = x^2 \cos x$ 的导数为（ ）

A. $2x \cos x$ B. $2x \cos x - x^2 \sin x$ C. $x^2 \sin x - 2x \cos x$ D. $2x \cos x + x^2 \sin x$

知识点 (2) 复合函数的导数

A9. 函数 $y = (3x + 1)^5$ 的导数为（ ）

A. $5(3x + 1)^4$ B. $15(3x + 1)^4$ C. $3(3x + 1)^4$ D. $15(3x + 1)^5$

A10. 函数 $y = e^{2x+1}$ 的导数为（ ）

A. e^{2x+1} B. $2e^{2x+1}$ C. $2xe^{2x}$ D. e^{2x}

M3. 下列求导运算正确的是（ ）

A. $(x^2 e^x)' = 2xe^x$

B. $((2x + 1)^3)' = 3(2x + 1)^2$

C. $(\sin 2x)' = \cos 2x$

D. $(\ln(2x + 1))' = \frac{2}{2x + 1}$

7.3 函数的单调性与极值

考点精要

Q1 导数符号与单调性有什么关系？

A 在区间内 $f'(x) > 0$ 则 $f(x)$ 单调递增， $f'(x) < 0$ 则单调递减。求单调区间流程：写定义域 $\rightarrow$ 求 $f'(x)$ $\rightarrow$ 解 $f'(x) > 0$ 与 $f'(x) < 0$ $\rightarrow$ 写区间（注意端点归属与定义域，不写并集）。

Q2 $f'(x) \geq 0$ (个别点为 0) 算单调递增吗?

A 算。如 $y = x^3$ 在 $x = 0$ 处 $f'(0) = 0$, 但整个 $\mathbb{R}$ 上单调递增。 $f'(x) \geq 0$ 且只在孤立点取等, 仍是递增。

Q3 什么是极值? 怎么用导数判断?

A 极值是“局部”概念—— x_0 附近所有 x 都有 $f(x) < f(x_0)$ (极大) 或 $f(x) > f(x_0)$ (极小)。用导数判断: $f'(x_0) = 0$ (驻点), 再看左右符号是否**变号**——左正右负是极大值点, 左负右正是极小值点。

Q4 $f'(x_0) = 0$ 处一定取极值吗?

A 不一定。 $f'(x_0) = 0$ 只是必要条件, **变号才是充分条件**。 $y = x^3$ 在 $x = 0$ 处 $f'(0) = 0$ 但左右同号, 无极值。

Q5 含参讨论单调性要注意什么?

A 先写定义域 (对数、分式、根号函数决定讨论骨架), 再按参数分情形解 $f'(x)$ 的正负。讨论出的区间必须落在定义域内。

Q6 什么是“隐零点”? 含隐零点的题怎么处理?

A 当 $f'(x) = 0$ 是超越方程 (含 e^x 、 $\ln x$ 、 a^x 等) 时, 零点解不出来, 就叫“隐零点”。处理套路: 先证零点存在且唯一 (利用单调性 + 端点值异号), 再把它设出来 (设 x_0), 只利用“ x_0 满足 $f'(x_0) = 0$ ”这一关系进行代换, 不求其具体值。极值点个数、参数范围类压轴题经常考它。

例题精讲

例题 7.4

(用导数求单调区间) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的单调区间。

例题 7.5

(用导数求极值) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极值。

知识点 (1) 导数与函数的单调性

A11. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递增区间是 ()

A. $(-\infty, -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C. $(-\infty, \sqrt{2})$ D. $\mathbb{R}$

A12. 函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的单调递减区间是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, 1)$

A13. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$ 。

A14. 函数 $f(x) = e^x - ax$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, e]$

B3. (2023 · 新课标 II 卷) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 则 a 的最小值为 ()

A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

知识点 (2) 函数的极值

A15. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 的极大值为 ()

A. 4 B. 0 C. -4 D. 2

A16. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 在 $x = 2$ 处取得 ()

A. 极大值 B. 极小值 C. 无极值 D. 无法判断

M4. 判断函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ 在 $x = 1$ 处是否取得极值。小刚算得 $f'(1) = 0$, 立刻下结论 “ $x = 1$ 是极值点”。对吗? 请用变号表说明理由。

B4. (2025 · 新课标 II 卷) 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - a)$ 的极值点, 则 $f(0) =$ _____。

知识点 (3) 含参讨论与隐零点

M5. 设 a 为常数, 讨论函数 $f(x) = \ln x - ax$ 的单调区间。(提示: 先写定义域, 再按 $a \leq 0$ 与 $a > 0$ 分类讨论 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ 的正负。)

B5. (2022 · 全国乙卷理 · T16) 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点。若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____。

B6. (2022 · 全国甲卷理 · T6) 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) =$ ()

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7.4 函数的最大(小)值与导数

考点精要

Q1 极值和最值有什么区别?

A 极值是“身边最强”(局部), 最值是“全场最强”(全局)。闭区间上的最大值/最小值 = $\max/\min\{f(a), f(b), \text{区间内各驻点值}\}$ ——**端点必查**。

Q2 求闭区间 $[a, b]$ 上最值的标准三步是什么?

A (1) 求 $f'(x)$, 解 $f'(x) = 0$ 得区间内驻点; (2) 计算驻点与端点 a 、 b 处的函数值; (3) 比较得最大最小。“端点加驻点, 比较定最值”。

Q3 最优化建模的四步流程?

A 审题定目标函数 $\rightarrow$ **写出定义域(现实约束!)** $\rightarrow$ 求导找驻点 + 比端点 $\rightarrow$ 检验答案是否符合实际。定义域(如边长 > 0 、售价不低进价)是模型成立的前提, 忘了它整个求解都是空谈。

例题精讲

例题 7.6

(闭区间上的最值) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值。

例题 7.7

(最优化应用) 某商品进价为 30 元/件, 市场调查发现售价定为 p 元时日销量为 $100 - p$ 件。要使日利润最大, 售价应定为多少元? 最大日利润是多少?

知识点 (1) 闭区间上的最值

A17. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值分别为 ()

- A. 最大值 2, 最小值 -2 B. 最大值 2, 最小值 0
C. 最大值 0, 最小值 -2 D. 最大值 2, 最小值 -4

A18. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值为 ()

- A. -2 B. 0 C. 2 D. -3

M6. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[2, 4]$ 上的最大值与最小值。小刚求出驻点 $x = \pm 1$ 后, 直接代入 $f(1) = -2$ 当最小值。他错在哪里?

M7. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值与最小值。小丽算出驻点 $f(2) = -2$ 就宣布“最大值 -2、最小值 -2”。她漏了什么? 请完整求解。

知识点 (2) 最优化建模

A19. 要做一个容积为 $27\pi \text{ m}^3$ 的无盖圆柱形水箱 (一个底面 + 一个侧面), 问底面半径 r 为多少时用料最省? 最少用料是多少?

A20. 用总长 36 m 的篱笆围成一个矩形菜园 (四边都围), 菜园面积的最大值为 ()

- A. 72 m^2 B. 81 m^2 C. 100 m^2 D. 144 m^2

M8. 用一张边长为 24 cm 的正方形铁皮, 四角各剪去一个边长为 x cm 的小正方形, 折成一个无盖的长方体盒子。(1) 写出盒子容积 $V(x)$ 的表达式, 并先写出 x 的定义域; (2) 求 x 为何值时容积最大, 最大容积是多少。小明直接对 $V(x)$ 求导令其为零, 却忘了定义域, 还把不在定义域内的 x 也拿来当候选。请按正确流程求解。

C2. 某商品进价为 50 元/件, 市场调查发现: 售价定为 p 元/件时, 日销量为 $q = 200 - 2p$ 件。(1) 写出日利润 $L(p)$ 的函数表达式及其定义域; (2) 售价定为多少元时日利润最大? 最大日利润是多少元?

本章综合

S1. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ 。(1) 求 $f(x)$ 的单调区间; (2) 求 $f(x)$ 的极大值与极小值, 并求极大值与极小值的差。

S2. 某农场用总长 120 m 的篱笆围成一个矩形菜园, 其中一边靠墙 (墙足够长, 不围篱笆)。(1) 设垂直于墙的边长为 x m, 写出菜园面积 $S(x)$ 与定义域; (2) x 取何值时面积最大? 最大面

积是多少?

S3. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$ 。(1) 求 $f'(x)$; (2) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值; (3) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值与最小值。

第八章 卷末综合检测

一、单选题

Z1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \mid 2^x > 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

A. $(0, 3)$ B. $(1, 3)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

Z2. 已知 $a = \log_2 3$, $b = 2^{0.3}$, $c = \log_3 2$, 则 $(\quad)$

A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

Z3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2$, $a_5 = 16$, 则 $S_6 = (\quad)$

A. 63 B. 31 C. 127 D. 64

Z4. 若 $\sin \theta = \frac{3}{5}$, 且 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\tan \theta = (\quad)$

A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

二、多选题

Z5. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$, 下列说法正确的是 $(\quad)$

A. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减

B. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 2

D. 方程 $f(x) = 2$ 有 3 个不同的实数根

Z6. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 20$, $d = -3$, 下列说法正确的是 $(\quad)$

A. $a_7 = 2$

B. $S_7 = 98$

C. 当 S_n 最大时, $n = 7$

D. 前 n 项和 S_n 的最大值为 77

三、填空题

Z7. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 3)$ 的值域是_____。

Z8. 曲线 $y = x^3 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为_____。

Z9. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_5 =$ _____。

四、解答题

Z10. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ 。(1) 求 $f(x)$ 的定义域与值域; (2) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增; (3) 解不等式 $f(2x) < f(x+1)$ (其中 $2x > -1$ 且 $x+1 > -1$)。

Z11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 。(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

Z12. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 。(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值; (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值; (3) 若方程 $f(x) = m$ 在区间 $(0, 3)$ 内有两个不同的实数根, 求实数 m 的取值范围。

Z13. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ (a 为实数)。(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性; (2) 若 $f(x) \geq 0$ 对一切 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围; (3) 在 (2) 的条件下证明: 当 $x \geq 0$ 时, $e^x \geq 1 + x$, 并指出等号成立的条件。